МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Том 41, № 1

Суми – 2026

Рекомендовано до видання вченою радою
Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка
(протокол № 7 від 02.03.2026 р.)

Ф45 Фізико-математична освіта : науковий журнал. Том 41, № 1. Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Фізико-математичний факультет ; редкол.: О.В. Семеніхіна (гол.ред.) [та ін.]. Суми : [СумДПУ ім. А.С. Макаренка], 2026. 56 с.

Наказом МОН України №1412 від 18.12.2018 р. журнал «Фізико-математична освіта» затверджено як **фахове наукове видання категорії «Б»** у галузі педагогічних наук (13.00.02 – математика, фізика, інформатика; 13.00.10) і за спеціальностями 011, 014, 015.

Журнал індексуються наукометричною базою **Index Copernicus** Journals Master List

Автори статей несуть відповідальність за достовірність наведеної інформації (точність наведених у статті даних, цитат, статистичних матеріалів тощо) та за порушення прав інтелектуальної власності інших осіб.

Висловлені авторами думки можуть не співпадати з точкою зору редакції.

УДК 53+51]:37(051)
DOI: 10.31110/2413-1571

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Makarenko Sumy State Pedagogical University
Physics and Mathematics Faculty

ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)

PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION

Scientific Journal

Vol. 41, No. 1

Sumy – 2026

Recommended for publication by the Academic Council
of Makarenko Sumy State Pedagogical University
(Protocol No 7 from 02.03.2026)

F 45 Physical and Mathematical Education : Scientific Journal. Vol. 41, No. 1. Makarenko Sumy State Pedagogical University, Physics and Mathematics Faculty ; O.V. Semenikhina (chief editor). Sumy : [Makarenko Sumy State Pedagogical University], 2025. 56 p.

The authors of the articles are responsible for the authenticity of the information (the accuracy of the presented information in the article, quotations, statistical materials, etc.) and for the violation of the intellectual property rights of others.

Opinions expressed by the authors may not reflect the views of the editors.

UDC 53+51]:37(051)
DOI: 10.31110/2413-1571

ЗМІСТ

CONTENTS

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2026, 41(1), https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-01
УДК: 519.6

ТРИ КРОКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ОЗНАЧЕННЯ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Микола БІЛОЦЬКИЙ ✉
Український державний університет імені М.П. Драгоманова, Україна
m.m.bilotskyy@udu.edu.ua .
https://orcid.org/0009-0001-5457-8997

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Важливим компонентом математичної підготовки є володіння студентами понятійним апаратом математичних дисциплін, які в більшості вищих навчальних закладів об'єднують під назвою вища математика, зокрема, математичного аналізу. Об'єктом вивчення класичного математичного аналізу є функція, різноманітні функціональні залежності, предметом вивчення – властивості функцій, а основним інструментом вивчення цих властивостей є граничний перехід. Для курсів математичного аналізу ключовим поняттям є поняття границі. Пояснюється це тим, що такі важливі поняття цих дисциплін як границя функції, неперервність функції, похідна функції, різні види інтегралів вводяться, спираючись саме на операцію граничного переходу. Тому успішність оволодіння студентами цими курсами великою мірою визначається рівнем оволодіння поняттям границі, що актуалізує проблему розробки ефективної стратегії формування у здобувачів освіти поняття границі послідовності, в тому числі і в задачах практичного використання означень поняття границі.*

Матеріали і методи. *Використано аналіз науково-методичної літератури та навчальних видань з вищої математики і математичного аналізу; систематизацію вітчизняного і зарубіжного досвіду введення поняття границі; узагальнення авторського досвіду організації практичних занять і добору вправ, у яких доведення здійснюється без апеляції до готових теорем, лише на основі означення.*

Результати. *Вироблено стратегію формування у здобувачів освіти поняття границі послідовності, розуміння та закріплення його змісту на практичних заняттях. Обґрунтовано «алгоритмічний» підхід розв'язування задач застосування поняття границі послідовності у вигляді трьох послідовних кроків, який ґрунтується на використанні означень границі послідовності «ε-n0». Алгоритм зменшує когнітивне навантаження на здобувачів освіти на початку теми, допомагає відділити евристику оцінок від формального завершення доведення, формує навичку керування похибкою та усвідомлення залежності $n_0(\varepsilon)$. Алгоритм слугує основою методичних рекомендацій для практичних занять і активізує навички доведення нерівностей як інструментів аналізу.*

Висновки. *Особливостями запропонованої методики застосування поняття границі послідовності на практичних заняттях є те, що студенти самостійно можуть засвоїти зміст та важливість кожної деталі означення границі послідовності. Подальші розвідки доцільно спрямувати на алгоритмізацію застосування означень границі функції однієї змінної в точці.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: вища математика; математичний аналіз; границя послідовності; методика формування математичного поняття; послідовність; границя послідовності дійсних чисел; границя послідовності комплексних чисел; три кроки; алгоритмізація; оцінки; розв'язування нерівності; транзитивність відношення порядку; функція обернена до функції математична освіта.

THREE STEPS FOR SOLVING PROBLEMS USING THE DEFINITION OF THE LIMIT OF A SEQUENCE

Mykola BILOTSKY ✉
Ukrainian State University named after M.P. Drahomanov, Ukraine
m.m.bilotskyy@udu.edu.ua .
https://orcid.org/0009-0001-5457-8997

ABSTRACT

Formulation of the problem. *An important component of mathematical training is learners' command of the conceptual apparatus of mathematical disciplines, which, in most higher education institutions, is taught under the umbrella title Higher Mathematics, in particular Mathematical Analysis. The object of study in classical mathematical analysis is the function and various functional dependencies; its subject matter is the properties of functions, and the main tool for investigating these properties is the limit process. For courses in mathematical analysis, the central notion is that of a limit. This is explained by the fact that fundamental concepts such as the limit of a function, continuity, the derivative, and various types of integrals are introduced in terms of limits. Therefore, success in mastering these courses largely depends on the extent to which learners have mastered the notion of a limit, which makes the development of an effective strategy for forming the concept of the limit of a sequence relevant, including in tasks that require the practical use of the formal definitions of a limit.*

Materials and methods. *The study employed an analysis of scientific and methodological literature and textbooks in higher mathematics and mathematical analysis; a systematization of domestic and international approaches to introducing the concept of a limit; and a generalization of the author's experience in organizing practical classes and selecting exercises in which proofs are constructed without appealing to ready-made theorems, relying only on the definition.*

Results. *A strategy was developed to develop learners' understanding of the limit of a sequence and to consolidate this understanding in practical classes. An "algorithmic" approach to solving problems that apply the concept of the limit of a sequence is substantiated in the form of three consecutive steps based on the ε–n_0 definition of the limit of a sequence. The algorithm reduces learners' cognitive load at the beginning of the topic, helps separate the heuristic search for estimates from the formal completion of the proof, develops skills in controlling error, and supports awareness of the dependence $n_0(\varepsilon)$. The algorithm serves as a basis for methodological recommendations for practical classes and strengthens skills in proving inequalities as analytical tools.*

Conclusions. *A feature of the proposed method for applying the concept of the limit of a sequence in practical classes is that learners can independently grasp the meaning and importance of each detail in the definition of the limit of a sequence. Further research should be directed toward algorithmizing the application of definitions of the limit of a real-valued function of one variable at a point.*

KEYWORDS: higher mathematics; mathematical analysis; limit of a sequence; methodology of forming a mathematical concept; sequence; limit of a sequence of real numbers; limit of a sequence of complex numbers; three steps; algorithmization; estimates; solving inequalities; transitivity of the order relation; inverse function; mathematics education.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Білоцький М. Три кроки розв'язування задач на означення границі послідовності. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 1. С. 6-14. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-01.

FOR CITATION: Bilotsky, M. (2026). Three steps for solving problems using the definition of the limit of a sequence. *Physical and Mathematical Education*, *41*(1), 6-14. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-01.

ВСТУП

В сучасному суспільстві більшість напрямків діяльності людини потребують широкого використання математичних методів. Тому до математичної підготовки фахівців, які в майбутній своїй діяльності можуть використовувати математичні методи, висуваються підвищені вимоги. Визначальними складовими математичної підготовки є не тільки володіння студентами понятійним апаратом математичних дисциплін але і наявність умінь та навичок застосування означень понять при розв'язуванні задач. Відоме означення границі послідовності дійсних або комплексних чисел завжди було важким для змістовного сприйняття на перших етапах навчання математичному аналізу студентами перших курсів вищих навчальних закладів. Окрім цього, не тільки у студентів а, почасти, і у викладачів, які читають лекції і проводять практичні заняття на тему «Границя послідовності», виникають труднощі у виборі способів і прийомів використання означення границі при розв'язуванні відповідних задач математичного аналізу та теорії функцій комплексної змінної.

Математична підготовка студентів здійснюється в процесі вивчення вищої математики, математичного аналізу, алгебри, геометрії тощо. Володіння студентами понятійним апаратом відповідних математичних дисциплін є важливою частиною засвоєння основ математичних дисциплін. Необхідно визнати, що питанням методики введення основних понять різних математичних дисциплін, зокрема, математичного аналізу у закладах вищої освіти присвячено мало вітчизняних досліджень і публікацій, Серед математичних понять є значна їх кількість, яка є складною для розуміння більшістю студентами. І до таких понять, зокрема, належить поняття границі. Для курсів класичного математичного аналізу поняття границі є ключовим з наступних причин. Об'єктом вивчення класичного математичного аналізу є функція, різноманітні функціональні залежності, предметом вивчення – властивості функцій, а основним інструментом вивчення цих властивостей є граничний перехід. Більше того, такі важливі поняття цих дисциплін як границя функції, неперервність функції, похідна функції, різні види інтегралів вводяться, спираючись саме на операцію граничного переходу. Тому успішність оволодіння студентами вищою математикою чи математичним аналізом великою мірою визначається тим, наскільки добре студенти оволодіють змістом процесу граничного переходу, поняттям границі. І першим етапом в такому навчанні є знайомство та засвоєння поняття гранці послідовності, що актуалізує проблему розробки ефективної методики формування поняття границі послідовності. Але без з відчуття того, як працює інструмент граничного переходу при доведенні того, що дане число є границею послідовності можливе тільки при розв'язуванні відповідних задач.

Аналіз актуальних досліджень. Про методику застосування означення границі послідовності при розв'язанні задач на практичних заняттях у закладах вищої освіти України наявних досліджень мало.

У дослідженні (Білоцький, 2011) наведені спроби алгоритмізації розв'язування задач застосування границі послідоовності з дійсними членами. Стаття (Томащук та ін., 2024) присвячена методиці формування поняття границі послідовності у студентів закладів вищої освіти. У цій роботі порівнюються різні означення границі послідовності, аналізуються випадки застосування кожного з цих означень при розв'язуванні задач. Розв'язування прикладу супроводжується обчислювальним експериментом та відповідним рисунком, виконаними за допомогою табличного процесора Microsoft Excel. В цій статті наведений достатньо повний аналіз досліджень присвячених методиці формування поняття границі послідовності. Дисертація (Босовський, 2010) присвячена наступності вивчення теорії границь у школі та закладах вищої освіти. Окремі аспекти, пов'язані з вивченням границь послідовностей у закладах вищої освіти, знайшли відображення в публікаціях: Михаліним (2003). Цей підхід ґрунтується на понятті «майже рівності». За допомогою цього поняття вдається дуже легко формулювати і доводити властивості границь послідовностей.

У праці (Третяк & Босовський, 2017) представлено авторське бачення змістового наповнення та методики вивчення теми «Границя числової послідовності» в курсі математичного аналізу для студентів математичних спеціальностей. Виклад ведеться у вигляді аргументованих відповідей на ряд традиційних для даної теми питань. Автори притримуються думки, що вивчення теорії границь потрібно розпочинати з вивчення границі послідовності, а потім – границі функції і неперервності. Такий підхід, до речі, реалізується в більшості підручників і навчальних посібників з математичного аналізу. Серед різних означень поняття границі послідовності автори пропонують першим вводити означення мовою околів та достатньо переконливо аргументують це. Проте сама методика введення поняття границі послідовності в цій публікації не висвітлена.

Виникає питання, чи можна рекомендувати послідовність кроків, яка максимально близька до процесу використання означення границі послідовності при розв'язанні задач відповідної тематики на практичних заняттях з математичного аналізу, як алгоритм дій, що сприятиме формуванню у здобувачів освіти поняття границі послідовності?

Мета статті: виробити стратегію формування у здобувачів освіти поняття границі послідовності, розуміння та закріплення його змісту на практичних заняттях через обґрунтування алгоритмічного підходу до розв'язування задач застосування поняття границі послідовності.

Матеріали цієї статті базуються на досвіді навчання математичного аналізу та теорії функцій комплексної змінної у закладах вищої освіти, зокрема, на досвіді проведення практичних занять з цих дисциплін в Українському державному університеті імені М. П. Драгоманова.

МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

Використано аналіз науково-методичної літератури та навчальних видань з вищої математики і математичного аналізу; систематизацію вітчизняного і зарубіжного досвіду введення поняття границі; узагальнення авторського досвіду організації практичних занять і добору вправ, у яких доведення здійснюється без апеляції до готових теорем, лише на основі означення.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Стратегія формування у здобувачів освіти поняття границі послідовності була вироблена на основі багаторічного досвіду навчання математичного аналізу. Вона базується на такому алгоритмі (дається для випадку $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, коли $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \overset{def}{\Leftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > o \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right)$):

1 крок - Виконання оцінок. Побудова скінченної послідовності порівнянь, прикінцевим результатом якої, завдяки транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел буде порівняння $|x_n - a| \le (\varphi(n))^{-1}$, де $\varphi(x)$– по можливості не складна, з додатними значеннями, зростаюча на проміжку $[\lambda_0;+\infty) \subset [1;+\infty)$ елементарна функція і $\varphi(x) \to +\infty (x \to +\infty)$ (наприклад, $\varphi(x) = x^{\alpha}, 0 < \alpha \le 1$).

2 крок - Розв’язування нерівності. Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon > 0$ покладаємо $|x_n - a| \le (\varphi(n))^{-1} < \varepsilon$ і розв’язуємо нерівність $\left(\varphi(n) > \varepsilon^{-1}, n \in N \cap \left[[\lambda_0]+1;+\infty\right)\right)$, де $(\lambda_0;+\infty) \supset \left(\varphi^{-1}(\varepsilon^{-1});+\infty\right)$– множина розв’язків нерівності, $\varphi^{-1}(x)$– функція обернена до $\varphi(x)$, $n_0 = n_0(\varepsilon) := \left[\varphi^{-1}(\varepsilon^{-1})\right] + 1 \ge [\lambda_0] + 1$, де $[d]$– ціла частина дійсного числа d.

3 крок - Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left((\varphi(n))^{-1} < \varepsilon\right), \left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| \le (\varphi(n))^{-1}\right)\right\} \Rightarrow \left(\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| < \varepsilon\right)\right)$$

Отже, для заданого $\varepsilon > 0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $\left(n > n_0(\varepsilon)\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| < \varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Застосування алгоритму подамо на прикладах.

Можливі означення границі послідовностей тільки для наступних випадків :

1) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$; 2) $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$; 3) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$; 4) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Приклад 1). Довести: 1а). $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}$; 1б). $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Приклад 1а) .◄ Маємо $x_n = \frac{2n-1}{2-3n} \forall n \in N$, $a = -\frac{2}{3}$. Виконаємо три кроки:

1 крок - $\forall n \in N : |x_n - a| = \left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{2n-1}{2-3n} + \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3(3n-2)}$ і $\varphi(x) = 3(3x-2)$ на проміжку $[1;+\infty)$.

2 крок - Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon > 0$ покладаємо $|x_n - a| = \frac{1}{3(3n-2)} < \varepsilon$ і розв’язуємо нерівність $\left(\frac{1}{3(3n-2)} < \varepsilon, n \in N\right) \Leftrightarrow \left(3n - 2 > \frac{1}{3\varepsilon}, n \in N\right) \Leftrightarrow \left(n > \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}, n \in N\right)$, де $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}$.

Виберемо $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}\right] + 1$.

3 крок - За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел для вибраного $n_0(\varepsilon)$ маємо

$$\left\{\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{3(3n-2)} < \varepsilon\right), \left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| = \left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| \le \frac{1}{3(3n-2)}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| = \left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| < \varepsilon\right)\right)$$

Отже, для заданого $\varepsilon > 0$ знайдено $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}\right] + 1$ таке, що $\left(n > n_0(\varepsilon)\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| = \left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| < \varepsilon\right)$,

і доведено, що $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, тобто $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}$.►

Зауваження 1.

А. Зрозуміло, що найважливішим з трьох кроків є перший крок отримання (доведення) потрібної нерівності. Він має евристичний характер, потребує творчості, вміння гнучко використовувати попередніх знань з математики.

В. На другому кроці, задовольняючи при цьому всі умови вибору $n_0 = n_0(\varepsilon)$, достатньо покласти $n_0 = n_0(\varepsilon) := \max\left\{\left[\varphi^{-1}(\varepsilon^{-1})\right] + 1, [\lambda_0] + 1\right\}$. Результатом першого та другого кроків може бути і така оцінка $|x_n - a| \le\le \cdots \le \lambda(\varepsilon)$, де $\lambda(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. Але в такому випадку знайдеться $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що $|x_n - a| < \varepsilon$

С. Після перших декілька прикладів використання запропонованого правила з трьох кроків на третьому останньому кроці можна обмежитись стандартною фразою «*для наперед заданого довільного* $\varepsilon>0$ *знайдено* $n_0=n_0(\varepsilon)\in N$ *таке, що* $(n>n_0(\varepsilon))\Rightarrow(|x_n-a|<\varepsilon)$, *і доведено, що* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ».

Приклад 1б). ◄ Маємо $x_n=\sqrt[n]{n}\ \forall n\in N, a=1$. Так як $x_n=\sqrt[n]{n}\ge 1=a\ \forall n\in N,$ можемо покласти $x_n=\sqrt[n]{n}:=1+\beta_n\ \forall n\in N$, де $\beta_n\ge 0\,\forall n\in N$. Тоді за формулою бінома Ньютона дістанемо $\forall n\in N, n\ge 2$ нерівність

$$n=(1+\beta_n)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\beta_n)^n=1+n\beta_n+\frac{n(n-1)}{2}(\beta_n)^2+\cdots+(\beta_n)^n\ge\frac{n(n-1)}{2}(\beta_n)^2,$$

з якої маємо $|x_n-a|=\sqrt[n]{n}-1=\beta_n\le\sqrt{2n^{-1}}\ \ \forall n\in N, n\ge 2$. Виконаємо необхідні кроки.

1 крок- $\forall n\in N, n\ge 2$: $|x_n-a|=\sqrt[n]{n}-1=\beta_n\le\sqrt{2n^{-1}}=\sqrt{2}\sqrt{n^{-1}}$, і $\varphi(x)=\sqrt{0{,}5x}\ \forall x\in[2;+\infty)$.

2 крок - Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon>0$, покладаємо $|x_n-a|<\sqrt{2}\sqrt{n^{-1}}<\varepsilon$ і розв'язуємо нерівність $\left(\sqrt{2}\sqrt{n^{-1}}<\varepsilon, n\in N, n\ge 2\right)\Leftrightarrow\left(n>2\varepsilon^{-2}, n\in N, n\ge 2\right)$, де $\varphi^{-1}(\varepsilon^{-1})=2\varepsilon^{-2}$. Виберемо $n_0=n_0(\varepsilon)=\max\left\{2,\left[2\varepsilon^{-2}\right]+1\right\}$.

3 крок - За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел для $n_0=n_0(\varepsilon)=\max\left\{2,\left[2\varepsilon^{-2}\right]+1\right\}$ маємо $(n>n_0(\varepsilon))\Rightarrow\left(|x_n-a|=\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon\right)$

і доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.►

Послідовність кроків для випадку $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, де $\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty\right)\overset{def}{\Leftrightarrow}\left(\forall\varepsilon>o\exists n_0=n_0(\varepsilon)\in N: n>n_0\Rightarrow|x_n|>\varepsilon\right)$:

1 крок Виконання оцінок. $|x_n|\ge\ge\cdots\ge\varphi(n)$, де $\varphi(x)>0\forall x\in(\lambda_0;+\infty)\subset(0;+\infty), \varphi(x)\uparrow+\infty(x\to+\infty)$,

тобто побудова скінченної послідовності порівнянь, прикінцевою метою якої завдяки властивості транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел буде порівняння $|x_n|\ge\varphi(n)$, де $\varphi(x)-$ по можливості достатньо проста елементарна додатнозначна зростаюча на проміжку $[\lambda_0;+\infty)\subset[1;+\infty)$ функція і $\varphi(x)\to+\infty(x\to+\infty)$ (наприклад, $\varphi(x)=x^\alpha,\quad 0<\alpha\le 1$).

2 крок Розв'язування нерівності. Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon>0$ покладаємо $|x_n|\ge\varphi(n)>\varepsilon$ і розв'язуємо нерівність

$\left(\varphi(n)>\varepsilon, n\in N\cap\left[[\lambda_0]+1;+\infty\right)\right)\Leftrightarrow\left(\varphi(n)>\varepsilon, n\in N\cap\left[[\lambda_0]+1;+\infty\right)\right)\Leftrightarrow\left(n\in N\cap\left(\varphi^{-1}(\varepsilon);+\infty\right)\cap\left[[\lambda_0]+1;+\infty\right)\right),$

де $(\lambda_0;+\infty)\supset\left(\varphi^{-1}(\varepsilon);+\infty\right)-$ множина розв'язків нерівності $\varphi(x)>\varepsilon$, $\varphi^{-1}(x)-$ функція обернена до функції $\varphi(x)$. Тоді всі $n\in N\cap\left[\left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right]+1;+\infty\right)\subset\left[[\lambda_0]+1;+\infty\right)\subset[\lambda_0;+\infty)$ задовольняють нерівність $\varphi(n)>\varepsilon$. Покладаємо $n_0=n_0(\varepsilon):=\left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right]+1\ge[\lambda_0]+1$, де $[d]-$ ціла частина дійсного числа d. Такий вибір $n_0=n_0(\varepsilon)$ для довільного наперед заданого фіксованого $\varepsilon>0$ завжди є коректним так як для довільного $\varepsilon>0$

$\left(n>n_0(\varepsilon)=\left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right]+1>\varphi^{-1}(\varepsilon)\ge\lambda_0, n\in N\right)\Rightarrow\left(|x_n|\ge\varphi(n)>\varepsilon\right)\Rightarrow\left(|x_n|>\varepsilon\right)$.

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n>n_0(\varepsilon), n\in N\right)\Leftrightarrow\left(\varphi(n)>\varepsilon\right),\left(n>n_0(\varepsilon), n\in N\right)\Rightarrow\left(|x_n|\ge\varphi(n)\right)\right\}\Rightarrow\left(\left(n>n_0(\varepsilon), n\in N\right)\Rightarrow\left(|x_n|>\varepsilon\right)\right).$$

Отже, для заданого $\varepsilon>0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $(n>n_0(\varepsilon))\Rightarrow(|x_n|>\varepsilon)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

Приклад 2). Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\left((-1)^n5^n\right)+(-1)^n\left(n^\alpha+1\right)\right)=\infty$, коли $\alpha>0$.

◄. Маємо $x_n=\cos\left((-1)^n5^n\right)+(-1)^n\left(n^\alpha+1\right)\ \forall n\in\mathrm{N}$, коли $\alpha>0$.

1 крок. $|x_n|=\left|\cos\left((-1)^n5^n\right)+(-1)^n\left(n^\alpha+1\right)\right|\ge\left|(-1)^n\left(n^\alpha+1\right)\right|-\left|\cos\left((-1)^n5^n\right)\right|\ge\left(n^\alpha+1\right)-1=n^\alpha\ \forall n\in\mathrm{N}$

2 крок. Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon>0$ покладаємо $|x_n|\ge\varphi(n)=n^\alpha>\varepsilon$ і розв'язуємо нерівність $\left(n^\alpha>\varepsilon, n\in N\right)\Leftrightarrow\left(n\in N\cap\left(\varepsilon^{1/\alpha};+\infty\right)\right)$. Тоді всі $n\in N\cap\left[\left[\varepsilon^{1/\alpha}\right]+1;+\infty\right)$ задовольняють нерівність $\varphi(n)=n^\alpha>\varepsilon$.

Покладаємо $n_0=n_0(\varepsilon):=\left[\varepsilon^{1/\alpha}\right]+1$,

3 крок. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо $\left\{\left(n>n_0(\varepsilon), n\in N\right)\Rightarrow\left(\varphi(n)>\varepsilon\right),\left(n>n_0(\varepsilon), n\in N\right)\Rightarrow\left(|x_n|\ge\varphi(n)\right)\right\}\Rightarrow\left(\left(n>n_0(\varepsilon), n\in N\right)\Rightarrow\left(|x_n|>\varepsilon\right)\right)$.

Отже, для заданого $\varepsilon>0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $(n>n_0(\varepsilon))\Rightarrow(|x_n|>\varepsilon)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.►

Послідовність кроків для випадку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, де $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty\right) \overset{def}{\Leftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > o \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : n > n_0 \Rightarrow x_n > \varepsilon\right)$:

1 крок Виконання оцінок. $x_n \geq\geq \cdots \geq \varphi(n)$, де $\varphi(x) > 0 \forall x \in (\lambda_0; +\infty) \subset (0; +\infty), \varphi(x) \uparrow +\infty (x \to +\infty)$,

тобто побудова скінченної послідовності порівнянь, прикінцевою метою якої завдяки властивості транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел буде порівняння $x_n \geq \varphi(n)$, де $\varphi(x)-$ по можливості достатньо проста елементарна додатнозначна зростаюча на проміжку $[\lambda_0; +\infty) \subset [1; +\infty)$ функція і $\varphi(x) \to +\infty (x \to +\infty)$ (наприклад, $\varphi(x) = x^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1$).

2 крок Розв'язування нерівності. Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon > 0$ покладаємо $x_n \geq \varphi(n) > \varepsilon$ і розв'язуємо нерівність

$$\left(\varphi(n) > \varepsilon, n \in N \cap \left[[\lambda_0] + 1; +\infty\right)\right) \Leftrightarrow \left(\varphi(n) > \varepsilon, n \in N \cap \left[[\lambda_0] + 1; +\infty\right)\right) \Leftrightarrow \left(n \in N \cap \left(\varphi^{-1}(\varepsilon); +\infty\right) \cap \left[[\lambda_0] + 1; +\infty\right)\right),$$

де $(\lambda_0; +\infty) \supset \left(\varphi^{-1}(\varepsilon); +\infty\right)-$ множина розв'язків нерівності $\varphi(x) > \varepsilon$, $\varphi^{-1}(x)-$ функція обернена до функції $\varphi(x)$. Тоді всі $n \in N \cap \left[\left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right] + 1; +\infty\right) \subset \left[[\lambda_0] + 1; +\infty\right) \subset [\lambda_0; +\infty)$ задовольняють нерівність $\varphi(n) > \varepsilon$. Покладаємо $n_0 = n_0(\varepsilon) := \left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right] + 1 \geq [\lambda_0] + 1$, де $[d]-$ ціла частина дійсного числа d. Такий вибір $n_0 = n_0(\varepsilon)$ для довільного наперед заданого фіксованого $\varepsilon > 0$ завжди є коректним так як для довільного $\varepsilon > 0$

$$\left(n > n_0(\varepsilon) = \left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right] + 1 > \varphi^{-1}(\varepsilon) \geq \lambda_0, n \in N\right) \Rightarrow \left(x_n \geq \varphi(n) > \varepsilon\right) \Rightarrow (x_n > \varepsilon).$$

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Leftrightarrow \left(\varphi(n) > \varepsilon\right), \left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(x_n \geq \varphi(n)\right)\right\} \Rightarrow \left(\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow (x_n > \varepsilon)\right).$$

Отже, для заданого $\varepsilon > 0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $\left(n > n_0(\varepsilon)\right) \Rightarrow \left(|x_n| > \varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Приклад 3). Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$ ◄. Для послідовності $x_n = \sqrt[n]{n!} \ \forall n \in N$ маємо наступні кроки:

1 крок Виконання оцінок. Методом математичної індукції неважко показати, що $n! > \left(n/3\right)^n \forall n \in N$.

2 крок Розв'язування нерівності. Для наперед заданого довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ розв'язуємо нерівність $\left(n/3 > \varepsilon, n \in N\right) \Leftrightarrow (n > 3\varepsilon, n \in N) \Leftrightarrow \left(n \in N \cap (3\varepsilon; +\infty) \Leftrightarrow \left(n \in \left[[3\varepsilon] + 1; +\infty\right)\right)\right)$, де $x_n = \sqrt[n]{n!} > n/3 > \varepsilon \ \forall n \in N$

Покладаємо $n_0 = n_0(\varepsilon) := [3\varepsilon] + 1$.

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(n/3 > \varepsilon\right), \left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(x_n = \sqrt[n]{n!} > n/3\right)\right\} \Rightarrow \left(\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(x_n = \sqrt[n]{n!} > \varepsilon\right)\right).$$

Отже, для довільного наперед заданого $\varepsilon > 0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $\left(n > n_0(\varepsilon)\right) \Rightarrow \left(|x_n| = \sqrt[n]{n!} > \varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. ►

Послідовність кроків для випадку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$**, де** $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right) \overset{def}{\Leftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > o \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : n > n_0 \Rightarrow x_n < -\varepsilon\right)$**:**

1 крок Виконання оцінок. $x_n \leq\leq \cdots \leq -\varphi(n)$, де $\varphi(x) > 0 \forall x \in (\lambda_0; +\infty) \subset (0; +\infty), \varphi(x) \uparrow +\infty (x \to +\infty)$, тобто побудова скінченної послідовності порівнянь, прикінцевою метою якої завдяки властивості транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел буде порівняння $x_n \leq -\varphi(n)$, де $\varphi(x)-$ по можливості достатньо проста елементарна додатнозначна зростаюча на проміжку $[\lambda_0; +\infty) \subset [1; +\infty)$ функція і $\varphi(x) \to +\infty (x \to +\infty)$ (наприклад, $\varphi(x) = x^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1$).

2 крок Розв'язування нерівності. Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon > 0$ покладаємо $x_n \leq -\varphi(n) < -\varepsilon$ і розв'язуємо нерівність

$$\left(\varphi(n) > \varepsilon, n \in N \cap \left[[\lambda_0] + 1; +\infty\right)\right) \Leftrightarrow \left(-\varphi(n) < -\varepsilon, n \in N \cap \left[[\lambda_0] + 1; +\infty\right)\right) \Leftrightarrow \left(n \in N \cap \left(\varphi^{-1}(\varepsilon); +\infty\right) \cap \left[[\lambda_0] + 1; +\infty\right)\right),$$

де $(\lambda_0; +\infty) \supset \left(\varphi^{-1}(\varepsilon); +\infty\right)-$ множина розв'язків нерівності $\varphi(x) > \varepsilon$, $\varphi^{-1}(x)-$ функція обернена до функції $\varphi(x)$. Тоді всі $n \in N \cap \left[\left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right] + 1; +\infty\right) \subset \left[[\lambda_0] + 1; +\infty\right) \subset [\lambda_0; +\infty)$ задовольняють нерівність $\varphi(n) > \varepsilon$. Покладаємо $n_0 = n_0(\varepsilon) := \left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right] + 1 \geq [\lambda_0] + 1$, де $[d]-$ ціла частина дійсного числа d. Такий вибір $n_0 = n_0(\varepsilon)$ для довільного наперед заданого фіксованого $\varepsilon > 0$ завжди є коректним так як для довільного $\varepsilon > 0$

$$\left(n > n_0(\varepsilon) = \left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right] + 1 > \varphi^{-1}(\varepsilon) \geq \lambda_0, n \in N\right) \Rightarrow \left(x_n \leq -\varphi(n) < -\varepsilon\right) \Rightarrow (x_n < -\varepsilon).$$

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Leftrightarrow \left(-\varphi(n) < -\varepsilon\right), \left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(x_n \leq -\varphi(n)\right)\right\} \Rightarrow \left(\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow (x_n < -\varepsilon)\right).$$

Отже, для заданого $\varepsilon>0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $(n>n_0(\varepsilon))\Rightarrow(x_n<-\varepsilon)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$

Приклад 4). Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{2-3n}=-\infty$. Маємо для послідовності $x_n=\frac{2n^2-1}{2-3n}$ $\forall n\in\mathrm{N}$ наступні кроки:

◄ ***1 крок. Виконання оцінок*** $x_n=\frac{2n^2-1}{2-3n}=-\frac{2n^2-1}{3n-2}<-\frac{2n^2-n^2}{3n}=-\frac{n}{3}$ $\forall n\in N$.

2 крок. Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon>1$ покладаємо $x_n=\frac{2n^2-1}{2-3n}<-\frac{n}{3}<-\varepsilon$ $\forall n\in N$ і розв'язуємо нерівність $(n>3\varepsilon,n\in N)\Leftrightarrow(n>3\varepsilon,n\in N)\Leftrightarrow(n\in N\cap(3\varepsilon;+\infty))\Leftarrow(n\in[[3\varepsilon]+1;+\infty))$. Покладаємо $n_0=n_0(\varepsilon):=[3\varepsilon]+1$.

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{(n>n_0(\varepsilon),n\in N)\Rightarrow\left(-\frac{n}{3}<-\varepsilon\right),(n>n_0(\varepsilon),n\in N)\Rightarrow\left(x_n=\frac{2n^2-1}{2-3n}<-\frac{n}{3}\right)\right\}\Rightarrow\left((n>n_0(\varepsilon),n\in N)\Rightarrow\left(x_n=\frac{2n^2-1}{2-3n}<-\varepsilon\right)\right)$$

Отже, для довільного наперед заданого фіксованого $\varepsilon>0$ знайдено $n_0(\varepsilon)=[3\varepsilon]+1$ таке, що $(n>n_0(\varepsilon)=[3\varepsilon]+1)\Rightarrow\left(x_n=\frac{2n^2-1}{2-3n}<-\varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$. ►

Надалі надамо приклади на застосування означення границі послідовності комплексних чисел, для якої можливі такі випадки:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$ $a-$ скінченне комплексне число; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$.

При застосуванні алгоритму при обчисленні границі послідовності комплексних чисел мета кожного з трьох кроків залишається не змінною. Але при виконанні першого кроку потрібно застосовувати модуль комплексного числа та його властивості, і доречно використовувати геометричну інтерпретацію комплексних чисел для більшої наочності міркувань. Також потрібно пам'ятати, що для комплексних чисел справедливі нерівності:

$$|z|=\sqrt{(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2}\le\sqrt{(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2+2|\operatorname{Re}z||\operatorname{Im}z|}=|\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|,$$

і $\forall n\in\mathrm{N}$:

- $|z_n-a|\le|\operatorname{Re}z_n-\operatorname{Re}a|+|\operatorname{Im}z_n-\operatorname{Im}a|$, $|z_n|\le|\operatorname{Re}z_n|+|\operatorname{Im}z_n|$;
- $\sqrt{2\min\{|\operatorname{Re}z_n-\operatorname{Re}a|,|\operatorname{Im}z_n-\operatorname{Im}a|\}}\le|z_n-a|\le2\max\{|\operatorname{Re}z_n-\operatorname{Re}a|,|\operatorname{Im}z_n-\operatorname{Im}a|\}$;
- $\sqrt{2\min\{|\operatorname{Re}z_n|,|\operatorname{Im}z_n|\}}\le|z_n|\le2\max\{|\operatorname{Re}z_n|,|\operatorname{Im}z_n|\}$

Останні нерівності обґрунтовується з використанням нерівності між середнім геометричним та середнім арифметичним в наступний спосіб.

$$\forall n\in\mathrm{N}:\sqrt{2\min\{|\operatorname{Re}z_n-\operatorname{Re}a|,|\operatorname{Im}z_n-\operatorname{Im}a|\}}\le\sqrt{2|\operatorname{Re}z_n-\operatorname{Re}a|\cdot|\operatorname{Im}z_n-\operatorname{Im}a|}\le|z_n-a|=\sqrt{(\operatorname{Re}z_n-\operatorname{Re}a)^2+(\operatorname{Im}z_n-\operatorname{Im}a)^2}\le$$

$$\le\sqrt{(|\operatorname{Re}z_n-\operatorname{Re}a|+|\operatorname{Im}z_n-\operatorname{Im}a|)^2}=|\operatorname{Re}z_n-\operatorname{Re}a|+|\operatorname{Im}z_n-\operatorname{Im}a|\le2\max\{|\operatorname{Re}z_n-\operatorname{Re}a|,|\operatorname{Im}z_n-\operatorname{Im}a|\}.$$

Приклад 5). Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100+n-2ni}{1+ni}=-2-i$.

◄ Виконаємо для послідовності $z_n=\frac{100+n-2ni}{1+ni}$, $a=-2-i$ наступні кроки:

1 крок Виконання оцінок

$$\forall n\in N:|z_n-a|=\left|\frac{100+n-2ni}{1+ni}-(-2-i)\right|=\left|\frac{100+n-2ni}{1+ni}+2+i\right|=\left|\frac{(100+n-2ni)(1-ni)}{(1+ni)(1-ni)}+2+i\right|=$$

$$=\left|\frac{(100+n-2n^2)-i(102n+n^2)}{1+n^2}+2+i\right|=\left|\frac{(100+n-2n^2)-i(102n+n^2)+2+2n^2+i+in^2}{1+n^2}\right|=\left|\frac{(102+n)-i(102n-1)}{1+n^2}\right|\le$$

$$\le2\max\left\{\frac{102+n}{1+n^2},\frac{102n-1}{1+n^2}\right\}=2\frac{102n-1}{1+n^2}\ \text{при}\ n\ge2.$$

Отже, на завершення першого кроку дістанемо $|z_n-a|\le2\frac{102n-1}{1+n^2}<2\frac{102n}{n^2}=\frac{204}{n}$ $\forall n\in N,n\ge2$

2 крок Розв'язування нерівності. Для наперед заданого довільного фіксованого $\varepsilon>0$ визначимо значення n, для яких $|z_n-a|<\frac{204}{n}<\varepsilon$ $\forall n\in N,n\ge2$. Маємо $\left(n>\frac{204}{\varepsilon},n\in N,n\ge2\right)\Leftrightarrow\left(n\in\left(N\cap\left(\left[\frac{204}{\varepsilon}\right]+2;+\infty\right)\right)\right)$. Означимо $n_0=n_0(\varepsilon):=\left[\frac{204}{\varepsilon}\right]+2$.

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n>n_0(\varepsilon),n\in N\right)\Rightarrow\left(\frac{204}{n}<\varepsilon\right),\left(n>n_0(\varepsilon),n\in N\right)\Rightarrow\left(\left|z_n-a\right|<\frac{204}{n}\right)\right\}\Rightarrow\left(\left(n>n_0(\varepsilon),n\in N\right)\Rightarrow\left(\left|z_n-a\right|<\varepsilon\right)\right).$$

Отже, для довільного наперед заданого $\varepsilon>0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $\left(n>n_0(\varepsilon)\right)\Rightarrow\left(\left|z_n-a\right|<\varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100+n-2ni}{1+ni}=-2-i$. ►

Приклад 6). Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{14+7n^2+2ni}{1+ni}=\infty$.

◄ Маємо для послідовності $z_n=\dfrac{14+7n^2+2ni}{1+ni}$, $a=\infty$ наступні кроки:

1 крок Виконання оцінок $\forall n\in N$ дістанемо таку нерівність

$$\left|z_n\right|=\left|\frac{14+7n^2+2ni}{1+ni}\right|=\frac{\left|14+7n^2+2ni\right|}{\left|1+ni\right|}=\frac{\sqrt{\left(14+7n^2\right)^2+4n^2}}{\sqrt{1+n^2}}=\sqrt{\frac{\left(7+7\left(1+n^2\right)\right)^2+4\left(1+n^2\right)-4}{1+n^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{49+98\left(1+n^2\right)+49\left(1+n^2\right)^2+4\left(1+n^2\right)-4}{1+n^2}}=\sqrt{\frac{45}{1+n^2}+102+49\left(1+n^2\right)}>\sqrt{49\left(1+n^2\right)}>7n.$$

2 крок Розв'язування нерівності. Для довільного фіксованого $\varepsilon>0$ маємо $\left|z_n\right|>7n>\varepsilon\ \forall n\in N$. Знайдемо потрібні значення n з нерівності $\left(7n>\varepsilon,n\in N\right)\Leftrightarrow\left(n>\varepsilon/7,n\in N\right)\Leftrightarrow\left(n\in N\cap\left(\varepsilon/7;+\infty\right)\right)\Leftarrow\left(n\in\left[\left[\varepsilon/7\right]+1;+\infty\right)\right)$.

Покладаємо $n_0=n_0(\varepsilon):=\left[\varepsilon/7\right]+1$.

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n>n_0(\varepsilon),n\in N\right)\Rightarrow\left(7n>\varepsilon\right),\left(n>n_0(\varepsilon),n\in N\right)\Rightarrow\left(\left|z_n\right|>7n\right)\right\}\Rightarrow\left(\left(n>n_0(\varepsilon),n\in N\right)\Rightarrow\left(\left|z_n\right|=\left|\frac{14+7n^2+2ni}{1+ni}\right|>\varepsilon\right)\right).$$

Отже, для довільного наперед заданого $\varepsilon>0$ знайдено $n_0=n_0(\varepsilon)=\left[\varepsilon/7\right]+1$ таке, що $\left(n>n_0(\varepsilon)\right)\Rightarrow\left(\left|z_n\right|>\varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$. ►

Приклад 7). Твердження. Для того, щоб існувала границя $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A,\ A\neq0,\arg z_n\neq\pi\,\forall n\in\mathbb{N}$, необхідно і достатньо, щоб існували границі $\lim\limits_{n\to\infty}\left|z_n\right|=\left|A\right|,\ \lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=\arg A.$ або символічно:

$$\left(\exists\lim_{n\to\infty}z_n=A,\ \ A\neq0,\arg z_n\neq\pi\,\forall n\in\mathbb{N}\right)\Leftrightarrow\left(\exists\lim_{n\to\infty}\left|z_n\right|=\left|A\right|,\exists\lim_{n\to\infty}\arg z_n=\arg A,\ \ \arg z_n\neq\pi\,\forall n\in\mathbb{N}\right).$$

Доведення твердження.

Достатність. Якщо $n\to\infty,\exists\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=\arg A,\ A\neq0,\arg z_n\neq\pi\,\forall n\in\mathbb{N}$, то

$$z_n=\left|z_n\right|\left(\cos\arg z_n+i\sin\arg z_n\right)=\left|z_n\right|\left(\cos\arg z_n+i\sin\arg z_n\right)=\left|z_n\right|\cos\arg z_n+i\left|z_n\right|\sin\arg z_n\to\left|A\right|\cos\arg A+i\left|A\right|\sin\arg A,\ n\to\infty$$

за теоремами про границю добутку та границю суми двох збіжних послідовностей.

Необхідність. Нехай $\exists\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A,\ A\neq0,\arg z_n\neq\pi\,\forall n\in\mathbb{N}$. Тоді за означенням, *по-перше*, $\forall\varepsilon>0\,\exists n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\left|z_n-A\right|<\varepsilon\ \forall n>n_1$ і тому $\forall\varepsilon>0\,\exists n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\left|\left|z_n\right|-\left|A\right|\right|\leq\left|z_n-A\right|<\varepsilon\ \forall n>n_1$ Отже, за означенням границі послідовності, маємо: $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\left|z_n\right|=\left|A\right|$. *По-друге*, доведемо, що $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=\arg A$

1 крок (рис.1). Маємо

$$\forall\varepsilon\in\left(0;\min\left\{d(z)=\left|z-A\right|:\operatorname{Im}z=0,\ \operatorname{Re}z\leq0\right\}\right)\exists n_2(\varepsilon)>n_1(\varepsilon),n_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\left|z_n-A\right|<\varepsilon$$

$$\arg A-\arcsin\frac{\varepsilon}{\left|A\right|}<\arg z_n<\arg A+\arcsin\frac{\varepsilon}{\left|A\right|}\ \forall n>n_2(\varepsilon)>n_1(\varepsilon).$$

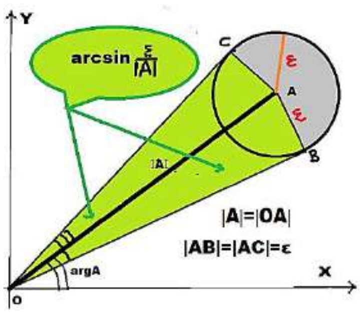


Рис. 1. Інтерпретація границі у комплексній площині

Джерело: розроблено авторами

2 крок. Це означає, що $\left|\arg z_n - \arg A\right| < \arcsin\frac{\varepsilon}{|A|}, \forall n > n_2(\varepsilon),$

де $0<\lambda(\varepsilon) = \arcsin\frac{\varepsilon}{|A|} = O(\varepsilon)$ як завгодно мале, якщо $0<\varepsilon$ як -завгодно мале. Тому

$$\exists n_0 = n_0(\varepsilon) > n_2(\varepsilon) : \left|\arg z_n - \arg A\right| < \varepsilon$$

3 крок. Отже, за означенням границі послідовності, маємо: $\exists \lim_{n\to\infty} \arg z_n = \arg A$. Твердження доведено.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Встановлено мінімальну кількість кроків, яку пропонується виконувати при розв'язуванні задач з використанням означення границі послідовності на практичних заняттях з математичного аналізу. Разом з цим встановлено, що подібні задачі дозволяють активно залучати знання з теорії дійсного числа, навички розв'язування та доведення нерівностей, які є одним з основних інструментів встановлення та доведення фактів і теорем аналізу функцій дійсної змінної.

Подальші дослідження планується присвяти алгоритмізації розв'язування задач на означення границі функції однієї змінної в точці. Також будуть виділені три кроки розв'язування задач з використанням означення границі функції однієї змінної в точці.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Білоцький, М.М. (2013). Про алгоритмізацію процесу розв'язування задач з використанням границі послідовності. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*: Міжнародний збірник наук. робіт, 40, 66 – 72.
2. Томащук, О., Самусенко, П., Лещинський, О., & Іллічева, Л. (2024). Методика формування поняття границі послідовності у студентів закладів вищої освіти. *Фізико-математична освіта*, 39(2), 60-67. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i2-08
3. Босовський, М. В. (2010). *Наступність у вивченні теорії границь у загальноосвітніх та вищих навчальних закладах.* Дис. канд. пед.наук, Черкаський національний університет імені Б. Хмельницького.
4. Михалін, Г.О. (2003). *Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу*. РННЦ «ДІНІТ».
5. Третяк, М.В., & Босовський, М.В. (2017). Деякі роздуми про вивчення границі числової послідовності. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*, 135, 14-17. https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/557428.pdf
6. Шкіль, М. І., Колесник, Т. В., & Котлова, В. М. (1984). Вища математика. Елементи аналітичної геометрії. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї дійсної змінної. К.: Вища школа.
7. Дороговцев, А. Я. (1993). Математичний аналіз: Підручник. Частина 1.К. :Либідь.
8. Дюженкова, Л. І., Колесник, Т. В., Лященко, М. Я., Михалін, Г. О., & Шкіль, М. І. (2002). Математичний аналіз у задачах і прикладах. Частина І. К.: Вища школа.
9. Дюженкова, Л. І., Дюженкова, О. Ю., & Михалін, Г. О. (2002). Вища математика. Приклади і задачі. К. :Видавничий центр «Академія».

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bilotskyi, M.M. (2013). Pro alhorytmizatsiiu protsesu rozv'iazuvannia zadach z vykorystanniam hranytsi poslidovnosti [On the algorithmization of the problem-solving process using the sequence limit]. *Dydaktyka matematyky: problemy i doslidzhennia – Didactics Of Mathematics*: Problems And Investigations: Mizhnarodnyi zbirnyk nauk. robit, 40, 66 – 72. (Ukrainian).
2. Tomashchuk, O., Samusenko, P., Leshchynskii, O., & Illicheva, L. (2024). Metodyka formuvannia poniattia hranytsi poslidovnosti u studentiv zakladiv vyshchoi osvity [Methods of forming the concept of sequence limits for students of higher education institutions]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education, 39*(2), 60-67. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i2-08 (Ukrainian).
3. Bosovskyi, M. V. (2010). *Nastupnist u vyvchenni teorii hranyts u zahalnoosvitnikh ta vyshchykh navchalnykh zakladakh [Continuity in the study of boundary theory in general and higher education institutions]*. Dys. kand. ped.nauk, Cherkaskyi natsionalnyi universytet imeni B. Khmelnytskoho. (Ukrainian).
4. Mykhalin, H.O. (2003). *Profesiina pidhotovka vchytelia matematyky u protsesi navchannia matematychnoho analizu [Professional training of mathematics teachers in the process of teaching mathematical analysis]*. RNNTs «DINIT». (Ukrainian).
5. Tretiak, M.V., & Bosovskyi, M.V. (2017). Deiaki rozdumy pro vyvchennia hranytsi chyslovoi poslidovnosti [Some thoughts on studying the limit of a numerical sequence]. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*, *135*, 14-17. https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/557428.pdf (Ukrainian).

6. Shkil, M. I., Kolesnyk, T. V., & Kotlova, V. M. (1984). *Vyshcha matematyka. Elementy analitychnoi heometrii. Dyferentsialne ta intehralne chyslennia funktsii odniiei diisnoi zminnoi [Higher Mathematics. Elements of Analytical Geometry. Differential and Integral Calculus of a Function of One Real Variable]*. K.: Vyshcha shkola. (Ukrainian).
7. Dorohovtsev, A. Ya. (1993). *Matematychnyi analiz [Mathematical analysis]*: Pidruchnyk. Chastyna 1.K. :Lybid. (Ukrainian).
8. Diuzhenkova, L. I., Kolesnyk, T. V., Liashchenko, M. Ya., Mykhalin, H. O., & Shkil, M. I. (2002). *Matematychnyi analiz u zadachakh i prykladakh [Mathematical analysis in problems and examples]*. Chastyna I. K.: Vyshcha shkola. (Ukrainian).
9. Diuzhenkova, L. I., Diuzhenkova, O. Yu., & Mykhalin, H. O. (2002). *Vyshcha matematyka. Pryklady i zadachi [Higher Mathematics. Examples and Problems]*. K. :Vydavnychyi tsentr «Akademiia». (Ukrainian).

| *Матеріал надійшов до редакції: 18.12.2025 р.* | *Прийнято до друку: 25.01.2026 р.* | *Опубліковано: 02.03.2026 р.* |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2026, 41(1), https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-02
УДК: [373.5:004.738.5]:004.056

ОЦІНКА РІВНЯ ОБІЗНАНОСТІ УЧНІВ ЩОДО БЕЗПЕЧНОГО ВИКОРИСТАННЯ ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ В УМОВАХ ТРАНСФОРМАЦІЇ ОСВІТНЬОГО ПРОСТОРУ

Наталія ПРЯДКО
Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка, Україна
twin011@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-0686-6449

Дарія ЛЮБЧИКОВА ✉
Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка, Україна
liubchykovadariia@gmail.com
https://orcid.org/0009-0003-7103-0442

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Сучасний освітній процес перебуває на етапі незворотної цифрової трансформації, яка вимагає від учнів високого рівня цифрової компетентності. Критичною невирішеною проблемою є недостатній рівень обізнаності учнів основної школи (зокрема 8-х класів) щодо безпечного користування інформаційно-комунікаційними технологіями (ІКТ). Недостатність знань у сфері захисту персональних даних, запобігання кіберзагрозам та цифрова недбалість створюють високий освітній ризик, що гальмує успішну реалізацію національних стратегій цифрової трансформації освіти. Це зумовлює необхідність емпіричної оцінки фактичного рівня обізнаності цільової групи.*

Матеріали і методи. *Дослідження ґрунтується на міждисциплінарному підході, поєднуючи положення концепції цифрової компетентності та теорії освітніх ризиків. Емпірична частина була проведена на базі Чернігівського ліцею №12 шляхом анкетування учнів 8-х класів (N=77) під час педагогічної практики. Використовувались методи теоретичного аналізу та синтезу, а також кількісного аналізу з обчисленням дескриптивних статистичних показників для оцінки розподілу відповідей та рівня обізнаності за компонентами цифрової безпеки. Анкета була розроблена на основі безпекового виміру цифрової компетентності.*

Результати. *Дослідження підтвердило високу інтегрованість цифрових технологій у навчальний процес (90,9% учнів використовують ЦТ щодня/кілька разів на тиждень) та загальну позитивну оцінку інструментів (100% задоволеності). Виявлено, що 37% опитаних учнів мають недостатній рівень знань та навичок безпечного користування Інтернетом та захисту власних даних. Встановлено, що питання безпеки не охоплюють 9,1% учнів цілеспрямованим навчанням. Також ідентифіковано інфраструктурні проблеми, зокрема запити на покращення Wi-Fi у захисних спорудах, що є критичним для забезпечення безперервності та безпеки освітнього процесу в умовах воєнного часу.*

Висновки. *Дослідження підтвердило актуальність проблеми і свідчить про необхідність зміщення акценту з технологічної інтеграції на формування безпекової культури. Ключовий висновок полягає у необхідності систематичної інтеграції питань цифрової безпеки та етики як наскрізної теми у навчальні програми всіх предметів. Рекомендовано розробку інтегрованих навчальних модулів, орієнтованих на практичне*

ASSESSMENT OF THE LEVEL OF STUDENTS' AWARENESS REGARDING THE SAFE USE OF DIGITAL TECHNOLOGIES IN THE CONDITIONS OF TRANSFORMATION OF THE EDUCATIONAL SPACE

Nataliia PRIADKO
T.H. Shevchenko National University «Chernihiv Colehium», Ukraine
twin011@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-0686-6449

Dariia LIUBCHYKOVA ✉
T.H. Shevchenko National University «Chernihiv Colehium», Ukraine
liubchykovadariia@gmail.com
https://orcid.org/0009-0003-7103-0442

ABSTRACT

Formulation of the problem. *The modern educational process is undergoing an irreversible digital transformation, requiring students to have a high level of digital competence. A critical unresolved problem is the insufficient awareness among primary school students (in particular, 8th graders) about the safe use of information and communication technologies (ICT). Insufficient knowledge in personal data protection, cyber threat prevention, and digital negligence creates a high educational risk, hindering the successful implementation of national strategies for the digital transformation of education. This necessitates an empirical assessment of the target group's actual level of awareness.*

Materials and methods. *The study is based on an interdisciplinary approach, combining the concept of digital competence with the theory of educational risks. The empirical part was conducted at Chernihiv Lyceum No. 12, with 8th-grade students (N=77) surveyed during pedagogical practice. Methods of theoretical analysis and synthesis, as well as quantitative analysis with the calculation of descriptive statistical indicators, were used to assess the distribution of responses and the level of awareness of the components of digital security. The questionnaire was developed based on the security dimension of digital competence.*

Results. *The study confirmed the high integration of digital technologies into the educational process (90.9% of students use digital technologies daily/several times a week) and an overall positive assessment of the tools (100% satisfaction). It was found that 37% of the surveyed students have insufficient knowledge and skills in the safe use of the Internet and in protecting their own data. It was found that 9.1% of students are not covered by targeted training for security issues. Infrastructure problems were also identified, in particular requests to improve Wi-Fi in protective structures, which are critical for ensuring the continuity and security of the educational process in wartime conditions.*

Conclusions. *The study confirmed the problem's relevance and indicated the need to shift the emphasis from technological integration to the formation of a security culture. The key conclusion is the need for the systematic integration of digital security and ethics as a cross-cutting theme across all curricula. The development of integrated training modules focused on practical skills to counter cyber threats and on strengthening the lyceum's secure ICT infrastructure is recommended.*

відпрацювання навичок протидії кіберзагрозам, та посилення захищеної ІКТ інфраструктури ліцею.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: цифрова компетентність; цифрова безпека; учні 8-х класів; анкетування; освітні ризики; інтегроване навчання; цифрова трансформація.

KEYWORDS: digital competence; digital security; 8th-grade students; questionnaire; educational risks; integrated learning; digital transformation.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Прядко Н., Любчикова Д. Оцінка рівня обізнаності учнів щодо безпечного використання цифрових технологій в умовах трансформації освітнього простору. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 1. С. 15-20. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-02.

FOR CITATION: Priadko, N., & Liubchykova, D. (2026). Assessment of the level of students' awareness regarding the safe use of digital technologies in the conditions of transformation of the educational space. *Physical and Mathematical Education*, *41*(1), 15-20. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-02.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасний розвиток суспільства характеризується стрімкою та незворотною цифровою трансформацією, яка охоплює всі сфери життєдіяльності, включно з освітою. Цей процес вимагає не просто оснащення навчальних закладів технікою, а докорінної зміни педагогічних підходів та формування нової моделі взаємодії між усіма учасниками освітнього процесу. Перехід до інтегрованих цифрових технологій має як значні перспективи, так і цілу низку викликів (Саєнко та ін., 2022), які пов'язані з ефективністю управління ресурсами (Sue Chen, 2025) та методичним забезпеченням процесу навчання. Національні освітні стратегії чітко визначають необхідність формування високого рівня цифрової компетентності громадян, складові якої детально описані у відповідних рамках (Міністерство цифрової трансформації України, 2021). Однак критично важливим аспектом цієї компетентності є безпека користування цифровими технологіями. Учні основної школи (зокрема 8-х класів) є активними користувачами мережевих ресурсів, але їхній вік, недостатній життєвий досвід та імпульсивність часто роблять їх найбільш вразливими до кіберзагроз, булінгу, фішингу та інших ризиків цифрового середовища. Отже, успіх цифрової трансформації освітнього середовища безпосередньо залежить від рівня обізнаності учнів щодо безпечного використання ІКТ.

Аналіз актуальних досліджень. Питання інтеграції цифрових технологій та відповідної методики викладання є предметом активного дослідження. Зокрема, значна увага приділяється впровадженню інтерактивних цифрових інструментів для персоналізованого супроводу обдарованих здобувачів освіти (Петренко та ін., 2025) та їхньому впливу на розвиток навичок розв'язання проблем (Fitria, 2023; Taranto та ін., 2022). Дослідники також вивчають вплив ІКТ на формування візуальної грамотності при викладанні природничих дисциплін (Ячна та ін., 2025), що є важливим елементом сприйняття сучасного освітнього контенту. Окремим напрямком є вивчення готовності майбутніх педагогів до роботи в нових умовах (Головіна та ін., 2024; Мацюк, 2020), оскільки ефективність використання технологій залежить від рівня їхньої підготовки. Питання безпеки використання ІКТ у контексті природничих та медичних спеціальностей також знайшли своє відображення в наукових працях (Ячна та ін., 2024).

У межах даного дослідження формування культури безпечного використання цифрових технологій розглядається як поетапний процес, початковою стадією якого є діагностика рівня обізнаності та ставлення учнів до цифрової безпеки. Представлене дослідження має описово-діагностичний характер і створює емпіричне підґрунтя для подальшої розробки та впровадження цілеспрямованих освітніх програм.

Попри значний обсяг наявних напрацювань, залишається недостатньо вивченим емпіричний аспект готовності самих учнів до безпечної взаємодії з трансформованим освітнім середовищем. Зокрема, бракує актуальних досліджень, які б за допомогою прямого анкетування визначали реальний рівень обізнаності учнів 8-х класів щодо конкретних загроз та правил цифрової безпеки. Це створює невирішену проблему, що полягає в необхідності отримання достовірної інформації про прогалини у знаннях та навичках учнів, що є критичним для розробки ефективних навчальних програм і методик, спрямованих на превентивну освіту з кібербезпеки.

Наукова новизна дослідження полягає в отриманні первинної емпіричної оцінки безпекового компонента цифрової компетентності учнів 8-х класів у конкретних умовах воєнного часу та цифрової трансформації освітнього простору на основі Рамки цифрових компетентностей для громадян України

Мета статті. Аналіз та емпірична оцінка рівня обізнаності учнів 8-х класів щодо безпечного користування цифровими технологіями та цифрової трансформації навчання, а також визначення ключових напрямків для вдосконалення методики викладання інтегрованих курсів у контексті формування безпечної цифрової компетентності.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретичні основи даного дослідження ґрунтуються на міждисциплінарному підході, що поєднує положення педагогіки, дидактики, інформаційних технологій та теорії освітніх ризиків. Фундаментальною основою дослідження є концепція цифрової компетентності, що розглядається як інтегрована здатність особистості використовувати ІКТ для вирішення життєвих і професійних завдань. На національному рівні ця компетентність детально описана в Рамці цифрових компетентностей для громадян України (Міністерство цифрової трансформації України, 2021). Ця рамка виділяє п'ять основних сфер, однією з яких є Безпека (включно із захистом даних, здоров'я, навколишнього середовища та кібербезпекою). Емпіричне дослідження рівня обізнаності учнів 8-х класів є прямим інструментом перевірки сформованості цієї ключової складової компетентності у цільової групи. Успіх цифрової трансформації освітнього середовища (Саєнко та ін., 2022) неможливий без досягнення встановлених стандартів цифрової компетентності, особливо в аспекті безпеки.

Освоєння учнями цифрових технологій розглядається через призму теорії діяльності, де навчальний процес є активною, цілеспрямованою взаємодією суб'єкта (учня) з об'єктом (навчальним контентом) за допомогою інструментів (ІКТ). Згідно з соціальним конструктивізмом, знання, зокрема про цифрову безпеку, не просто передаються, а активно конструюються самими учнями через соціальну взаємодію та вирішення проблемних ситуацій. Розвиток навичок моделювання та вирішення проблем (Fitria, 2023; Taranto та ін., 2022) є прямим наслідком активної, опосередкованої технологіями навчальної діяльності. Таким чином, анкета виступає засобом оцінки результату засвоєння знань та перетворення їх на навички безпечної діяльності в цифровому середовищі.

Дослідження методичного аспекту, викладеного в меті статті, ґрунтується на принципах інтегрованого навчання. Інтеграція вимагає поєднання знань із різних предметних галузей для формування цілісного розуміння явища. У контексті цифрової трансформації це означає, що питання безпеки та ефективного використання ІКТ не можуть бути ізольовані лише в курсі інформатики. Натомість вони мають бути інтегровані в природничі дисципліни (Ячна та ін., 2025), соціальні науки та інші предмети, створюючи єдиний, міждисциплінарний підхід. Методичні напрацювання в цій сфері (Мацюк, 2020) закладають основу для вдосконалення навчальних планів з метою посилення безпекової складової.

Центральним елементом роботи є теорія освітніх ризиків, що вимагає систематичного, превентивного підходу до навчання. У контексті ІКТ, ця теорія зосереджується на ідентифікації, оцінці та управлінні потенційними загрозами в кіберпросторі (Ячна та ін., 2024). Оскільки учні 8-х класів знаходяться у фазі активного соціального та цифрового входження, їхня обізнаність є першим і найважливішим рівнем захисту. Результати анкетування дозволяють виявити прогалини у знаннях, які можуть стати "слабкими ланками" в системі безпеки, і відповідно скоригувати методики, щоб забезпечити надійний персоналізований супровід (Петренко та ін., 2025) для формування культури безпечного цифрового поводження.

У контексті теорії освітніх ризиків недостатня обізнаність учнів щодо цифрової безпеки розглядається як чинник підвищеної вразливості до кіберзагроз. Зокрема, відповіді типу «частково» або «ні» свідчать про наявність латентних ризиків, які не усвідомлюються самими учнями, але можуть мати критичні наслідки (витік персональних даних, кібербулінг, психологічна шкода, маніпуляції). Частка 27,3% учнів із частковими знаннями відповідає середньому рівню ризику, тоді як 9,1% з повною відсутністю обізнаності — високому рівню освітнього ризику.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення поставленої мети та перевірки робочих гіпотез було використано комплекс теоретичних та емпіричних методів дослідження. Теоретичні методи: аналіз та синтез (використано для вивчення та узагальнення положень щодо цифрової компетентності, інтегрованого навчання та освітніх ризиків; систематизація та класифікація (застосовано для структурування основних теоретичних підходів та визначення компонентів цифрової безпеки, які були включені до інструментарію дослідження); моделювання (використано для теоретичного обґрунтування моделі формування безпечної цифрової компетентності учнів основної школи). Основу емпіричного дослідження склав метод анкетування (опитування), який був застосований для отримання кількісних та якісних даних про обізнаність учнів.

Дослідження проводилось на базі Чернігівського ліцею №12 впродовж жовтня-листопада 2025 року. Емпіричний етап було реалізовано під час проходження виробничої (педагогічної) практики. Вибірку дослідження склали учні 8-х класів (загальна кількість N=77 осіб). Віковий діапазон учасників становив 13–14 років. Вибірка є репрезентативною для оцінки рівня обізнаності здобувачів освіти основної школи щодо використання цифрових технологій у навчанні та поза ним. Дослідження проводилося з дотриманням етичних принципів педагогічних досліджень. Участь учнів була добровільною та анонімною. Анкетування здійснювалося за погодженням з адміністрацією закладу освіти та за інформованою згодою батьків (законних представників) учасників. Отримані дані використовувалися виключно в узагальненому вигляді для наукових цілей.

Головним інструментом дослідження виступила авторська анкета, розроблена на основі положень Рамки цифрових компетентностей України, зокрема її безпекового виміру. Анкета містила 16 питань закритого та напівзакритого типу і була спрямована на виявлення рівня обізнаності про основні кіберзагрози (фішинг, шкідливе програмне забезпечення); навичок захисту персональних даних та приватності; обізнаності про правила безпечної поведінки в соціальних мережах та Інтернеті (кібербулінг, мережевий етикет). Анкетування проводилося анонімно та добровільно в електронному форматі для забезпечення об'єктивності та чесності відповідей.

Для оцінювання рівня обізнаності використовувалися номінальні та порядкові шкали (варіанти відповідей: «так», «частково», «ні»). До категорії учнів з недостатнім рівнем цифрової безпеки було віднесено респондентів, які в ключових питаннях безпекового блоку обрали варіанти «ні» або «частково». Узагальнений показник (37%) було отримано шляхом підсумовування відповідей за цими категоріями.

Методи обробки даних: Отримані емпіричні дані піддавалися кількісному аналізу. Були використані методи математичної статистики, включаючи обчислення дескриптивних показників (середнє арифметичне значення, відсоткові показники) для візуалізації розподілу відповідей та визначення рівня обізнаності за кожним із компонентів цифрової безпеки. Дослідження має описово-діагностичний характер, тому інтегральні індекси не обчислювалися.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Емпіричне дослідження проводилось методом анкетування серед учнів 8-х класів Чернігівського ліцею №12 (N=77), що дозволило отримати первинну інформацію про їхню обізнаність у сфері цифрової безпеки та сприйняття ними цифрової трансформації освітнього процесу. Отримані дані було згруповано в кілька блоків для системного аналізу.

Частота та інструментарій використання цифрових технологій згідно опитування представлено на рис.1.

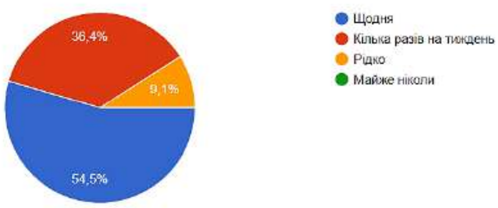


Рис. 1. Частота використання цифрових технологій в ЗЗСО, %
Джерело: отримано авторами

Аналіз свідчить про високий рівень інтегрованості цифрових технологій у навчальний процес. Більшість учнів (54,5%) користуються цифровими інструментами щодня, і ще 36,4% – кілька разів на тиждень. Це підтверджує, що цифрова трансформація є реальністю, що постійно супроводжує освітню діяльність (Саєнко та ін., 2022). Цифрові інструменти найчастіше використовуються на уроках англійської мови (63,6%) та інформатики (45,5%), що свідчить про ключову роль цих дисциплін як "драйверів" цифрового освітнього середовища. Абсолютним лідером є Google Classroom (100% учнів), що є базовою платформою для організації навчання. Для інтерактиву та оцінювання учні активно використовують Kahoot / Quizizz (81,8%) та Zoom / Meet (63,6%). Це демонструє орієнтацію на інструменти, які підвищують рівень залученості та ефективно підтримують інтегровані методики (Петренко та ін., 2025).

Ефективність та ставлення до цифрових технологій представлено на рис. 2.

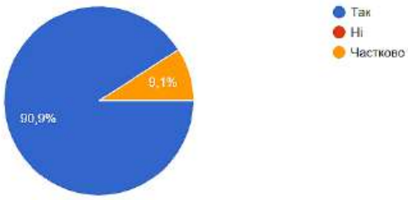


Рис. 2. Ставлення здобувачів освіти до цифрових технологій в ЗЗСО, %
Джерело: отримано авторами

Учні позитивно оцінюють інтеграцію ЦТ – 90,9% респондентів відповіли, що їм подобається працювати з технологіями на уроках. Це підтверджує мотиваційний потенціал цифрових інструментів. Із опитаних 54,5% учнів вважають, що інструменти частково допомагають засвоювати матеріал, тоді як 45,5% зазначають, що вони дуже допомагають. Завдяки ЦІ більшість учнів почали краще розуміти матеріал (45,5%) або більше цікавитися навчанням (36,4%). Це узгоджується з положеннями теорії діяльності, де інструменти (ІКТ) опосередковують і покращують навчальну взаємодію. На рис. 3 представлено результати упевненості коритування ЦТ.

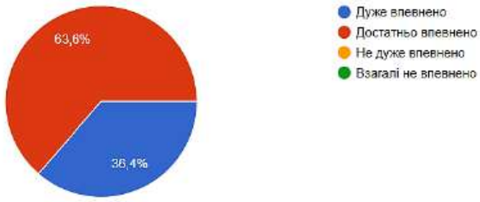


Рис. 3. Оцінка впевненості здобувачів освіти користування цифровими технологіями, %
Джерело: отримано авторами

Переважна більшість опитаних (63,6%) оцінює своє користування онлайн-платформами як "достатньо впевнене", а 36,4% – як "дуже впевнене".

Оцінка безпекового виміру та інфраструктури. Цей блок є ключовим для оцінки сформованості безпекового компонента цифрової компетентності (Міністерство цифрової трансформації України, 2021). Обізнаність про безпеку виразили у наступних даних: 63,6% учнів впевнені, що знають, як безпечно користуватись Інтернетом та захищати свої дані. Однак, 27,3% учнів відповіли "частково" або "іноді", а 9,1% – "ні". Наявність майже третини учнів із сумнівами або відсутністю знань вказує на невирішену проблему, зазначену у вступі, і вимагає цілеспрямованої методичної корекції. Навчання безпеці та етиці відмітили 72,7% учнів, які підтвердили, що вчителі обговорюють із ними питання цифрової етики та поведінки онлайн. Щодо цілеспрямованого навчання безпеці, 45,5% отримували його на уроках, а 27,3% – під час окремих заходів. Проте 9,1% не отримували такого навчання взагалі, що є критичною прогалиною.

Учні високо оцінюють загальний рівень цифрової трансформації: 63,6% вважають його "високим", а 36,4% – "середнім". Незважаючи на високу оцінку трансформації, учні бачать інфраструктурні проблеми. Лише 27,3% вважають забезпечення технікою повним, тоді як 45,5% оцінюють його як "часткове". Крім того, у відкритих відповідях учні прямо вказували на проблеми з інтернетом у бомбосховищі та необхідність покращення якості Wi-Fi.

Відкриті відповіді учнів підкреслюють їхню потребу в практичній інтеграції технологій: Найбільше подобається учням брати участь у інтерактивних іграх (Kahoot), відмічено також цікавість, можливість побачити досліди. Опитані пропонують покращити інтернет-з’єднання (особливо в укриттях), ввести ЦТ на всіх уроках та надавати персональне забезпечення (планшет чи електронну книгу).

Висновки якісного аналізу чітко вказують на необхідність не лише підтримки вже наявного рівня інтеграції, а й вирішення інфраструктурних питань, які прямо впливають на безперервність та безпеку освітнього процесу (Ячна та ін., 2024).

ОБГОВОРЕННЯ

Отримані емпіричні дані дозволяють зробити низку висновків щодо динаміки цифрової трансформації ліцею та готовності учнів 8-х класів до безпечної роботи в нових умовах. Висока частота використання ЦТ (90,9% учнів щодня/кілька разів на тиждень) та позитивне ставлення (100% задоволеність) свідчать про те, що цифрові інструменти є ефективним мотиватором, що узгоджується з положеннями соціально-конструктивістського підходу (Fitria, 2023). Учні сприймають технології як засіб, що підвищує їхню зацікавленість і допомагає краще розуміти матеріал. Проте бажання ввести ЦТ на всіх уроках вказує на нерівномірність їхньої інтеграції, що потребує посилення міжпредметних зв’язків та застосування принципів інтегрованого навчання (Ячна та ін., 2025). Найбільш критичним є виявлення майже 37% учнів, які не впевнені або не знають, як безпечно користуватися інтернетом. Хоча більшість вважає себе обізнаними, суб'єктивна оцінка часто не збігається з реальними навичками. Це створює високий освітній ризик (Ячна та ін., 2024), оскільки саме ця група учнів становить потенційну "слабку ланку" в системі безпеки, піддаючись кіберзагрозам.

Висока оцінка загальної трансформації школи контрастує з виявленими інфраструктурними проблемами (45,5% вважають забезпечення частковим) та конкретними запитами щодо Wi-Fi, особливо в укриттях. Це свідчить про те, що в умовах навчання з елементами дистанційної роботи та загроз безпеки, надійність інфраструктури (Sue Chen, 2025) стає не лише питанням комфорту, а й питанням безперервності та безпеки освітнього процесу. Забезпечення стабільного доступу до мережі в укриттях є ключовим для персоналізованого супроводу та гарантії безпеки (Петренко та ін., 2025).

Результати анкетування прямо вказують на необхідність вдосконалення методики: питання цифрової етики та безпеки мають стати наскрізними, інтегрованими не лише в інформатику, а й у всі предмети; зростаючий інтерес учнів до інтерактивних форм (ігри) має бути використаний для створення навчальних сценаріїв, орієнтованих на симуляцію кіберризиків та вироблення навичок їхнього уникнення.

Отримані результати слід розглядати як результати пілотного описового дослідження, що має обмеження щодо узагальнення. Разом з тим, вони є достатніми для виявлення проблемних зон та формування гіпотез для подальших поглиблених досліджень із застосуванням валідованих інструментів та статистичних показників надійності.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведене емпіричне дослідження рівня обізнаності учнів 8-х класів Чернігівського ліцею №12 щодо цифрової трансформації та безпечного використання ІКТ дозволило досягти поставленої мети та сформулювати низку ключових висновків. Цифрова трансформація освітнього середовища у закладі має високий показник успішності: 90,9% учнів активно використовують ЦТ у навчанні, а 100% позитивно оцінюють такий підхід. Інструменти, орієнтовані на гейміфікацію (Kahoot, Quizizz), ефективно виконують свою роль як мотиваційні чинники та сприяють кращому розумінню матеріалу. Це підтверджує важливість застосування інтерактивних технологій для залучення учнів основної школи. Незважаючи на те, що питання цифрової етики обговорюються, цілеспрямоване та систематичне навчання цифрової безпеки охоплює не всіх учнів. Це вказує на необхідність інтеграції питань кібербезпеки як наскрізної теми у навчальні програми всіх предметів (а не лише інформатики) з акцентом на практичному відпрацюванні навичок запобігання ризикам. Позитивна оцінка загальної трансформації (63,6% "високий рівень") не нівелює необхідність вирішення інфраструктурних проблем. Виявлені запити учнів щодо покращення Wi-Fi, особливо в укриттях, свідчать, що забезпечення стабільного та безпечного інтернет-доступу є критичним елементом освітньої безпеки в умовах воєнного часу. Отримані результати становлять новизну як пілотне емпіричне дослідження безпекового виміру цифрової компетентності учнів основної школи в регіональному контексті.

На основі отриманих результатів можуть бути сформульовані такі рекомендації для системи освіти: розробка інтегрованих модулів з цифрової безпеки для учнів 8-х класів, які включатимуть елементи правознавства, етики та інформаційних технологій; створення практичних навчальних ігор та симуляторів, орієнтованих на вироблення навичок реагування на кіберзагрози (фішинг, кібербулінг); посилення інфраструктури, зокрема забезпечення стабільним та захищеним інтернет-з’єднанням всіх навчальних локацій, включаючи захисні споруди, для гарантії безпеки та безперервності навчання.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

ФІНАНСУВАННЯ

Дослідження не отримувало зовнішнього фінансування.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Дані можуть бути надані за обґрунтованим запитом відповідному автору.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Під час підготовки цієї роботи автори не використовували інструменти штучного інтелекту.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Fitria, Y. (2023). The application of educational technology to develop problem-solving skills in higher education students. *Social and Humanities Education Journal, 3*(4), 199–209. https://doi.org/10.17977/um026v3i42023p199
2. Sue Chen, A. (2025). Research on the efficiency and optimization strategy of teachers' digital management platform in education resource management. *SHS Web of Conferences, 213*, 1003. https://doi.org/10.1051/shsconf/2025213010038
3. Taranto, E., Colajanni, G., Gobbi, A., Picchi, M., & Raffaele, A. (2022). Fostering students' modelling and problem-solving skills through operations research, digital technologies and collaborative learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 55*(8), 1957–1998. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2115421
4. Головіна, Н. А., Головін, М. Б., & Калугіна, І. М. (2024). Психолого-педагогічна навчальна практика – перший крок здобувача освіти для реалізації себе як педагога. *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки, (212),* 85–94. https://doi.org/10.36550/2415-7988-2024-1-212-85-94
5. Мацюк, В. М. (2020). Формування у студентів-фізиків педагогічних університетів готовності до організації дослідницької роботи з учнями. У М. Ю. Мельник & В. М. Шульга (Упоряд.), *Нові підходи до організації та ефективного проведення практик в кризових умовах*: Матеріали міжфакультет. навч.-метод. семінару. Вектор. http://dspace.tnpu.edu.ua/handle/123456789/23791
6. Міністерство цифрової трансформації України. (2021). *Опис Рамки цифрових компетентностей для громадян України*. https://bit.ly/3a7IXu915
7. Петренко, С. М., Мехед, Д. Б., & Мехед, О. Б. (2025). Застосування інтерактивних цифрових технологій для персоналізованого супроводу обдарованих здобувачів освіти. У М. Ю. Мельник & В. М. Шульга (Упоряд.), *Обдарованість: методи діагностики та шляхи розвитку*: матеріали науково-практичного онлайн-семінару (Київ, 22–26 травня 2025 року) (С. 654–660). Інститут обдарованої дитини НАПН України.
8. Саєнко, Н. С., Голуб, Т. П., Лавриш, Ю. Е., & Литовченко, І. М. (2022). *Інтеграція цифрових технологій в освітній процес: виклики та перспективи*: монографія. Центр учбової літератури. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/54226
9. Ячна, М. Г., Мехед, Д. Б., Третяк, О. П., & Мехед, О. Б. (2025). Інформаційно-комунікаційні технології як інструмент формування візуальної грамотності при викладанні природничих дисциплін. *Вісник Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка, 33* (189), 196–202. https://doi.org/10.58407/visnik.253331
10. Ячна, М. Г., Полетай, В. М., & Мехед, О. Б. (2024). Висвітлення основних питань безпеки праці майбутніх фахівців природничих і медичних спеціальностей у процесі використання інформаційно-комунікаційних технологій. *Наукові записки. Серія: педагогіка, (2),* 59–65. https://doi.org/10.32782/2415-3605.24.2.7

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Fitria, Y. (2023). The application of educational technology to develop problem-solving skills in higher education students. *Social and Humanities Education Journal, 3*(4), 199–209. https://doi.org/10.17977/um026v3i42023p199
2. Sue Chen, A. (2025). Research on the efficiency and optimization strategy of teachers' digital management platform in education resource management. *SHS Web of Conferences, 213*, 1003. https://doi.org/10.1051/shsconf/2025213010038
3. Taranto, E., Colajanni, G., Gobbi, A., Picchi, M., & Raffaele, A. (2022). Fostering students' modelling and problem-solving skills through operations research, digital technologies and collaborative learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 55*(8), 1957–1998. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2115421
4. Holovina, N. A., Holovin, M. B., & Kaluhina, I. M. (2024). Psykholoho-pedahohichna navchalna praktyka – pershyi krok zdobuvacha osvity dlia realizatsii sebe yak pedahoha [Psychological and pedagogical educational practice as the first step for an applicant of education to realize himself as a teacher]. *Naukovi zapysky. Seriia: Pedahohichni nauky, (212),* 85–94. https://doi.org/10.36550/2415-7988-2024-1-212-85-94 (in Ukrainian)
5. Matsiuk, V. M. (2020). Formuvannia u studentiv-fizykhiv pedahohichnykh universytetiv hotovnosti do orhanizatsii doslidnytskoi roboty z uchniamy [Formation of readiness for the organization of research work with students in physics students of pedagogical universities]. In M. Yu. Melnyk & V. M. Shulha (Eds.), *Novi pidkhody do orhanizatsii ta efektyvnoho provedennia praktyk v kryzovykh umovakh*: Materialy mizhfakultet. navch.-metod. seminaru (pp. 654–660). Vektor. http://dspace.tnpu.edu.ua/handle/123456789/23791 (in Ukrainian)
6. Ministerstvo tsyfrovoi transformatsii Ukrainy. (2021). *Opys Ramky tsyfrovykh kompetentnostei dlia hromadian Ukrainy [Description of the Digital Competence Framework for Citizens of Ukraine].* https://bit.ly/3a7IXu915 (in Ukrainian)
7. Petrenko, S. M., Mekhed, D. B., & Mekhed, O. B. (2025). Zastosuvannia interaktyvnykh tsyfrovykh tekhnolohii dlia personalizovanoho suprovodu obdarovanykh zdobuvachiv osvity [Application of interactive digital technologies for personalized support of gifted learners]. In M. Yu. Melnyk & V. M. Shulha (Eds.), *Obdarovanist: metody diahnostyky ta shliakhy rozvytku*: materialy naukovo-praktychnoho onlain-seminaru (Kyiv, May 22–26, 2025) (pp. 654–660). Instytut obdarovanoi dytyny NAPN Ukrainy. (in Ukrainian)
8. Saienko, N. S., Holub, T. P., Lavrysh, Yu. E., & Litovchenko, I. M. (2022). *Intehratsiia tsyfrovykh tekhnolohii v osvitnii protses: vyklyky ta perspektyvy: monohrafiia [Integration of digital technologies into the educational process: Challenges and prospects: Monograph].* Tsentr uchbovoi literatury. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/54226 (in Ukrainian)
9. Yachna, M. H., Mekhed, D. B., Tretiak, O. P., & Mekhed, O. B. (2025). Informatsiino-komunikatsiini tekhnolohii yak instrument formuvannia vizualnoi hramotnosti pry vykladanni pryrodnychykh dystsyplin [Information and communication technologies as a tool for forming visual literacy in teaching natural sciences]. *Visnyk Natsionalnoho universytetu «Chernihivskyi kolehium» imeni T. H. Shevchenka, 33* (189), 196–202. https://doi.org/10.58407/visnik.253331 (in Ukrainian)
10. Yachna, M. H., Poletai, V. M., & Mekhed, O. B. (2024). Vysvitlennia osnovnykh pytan bezpeky pratsi maibutnikh fakhivtsiv pryrodnychykh i medychnykh spetsialnostei u protsesi vykorystannia informatsiino-komunikatsiinykh tekhnolohii [Highlighting the main issues of labor safety for future specialists in natural and medical specialties in the process of using information and communication technologies]. *Naukovi zapysky. Seriia: pedahohika, (2),* 59–65. https://doi.org/10.32782/2415-3605.24.2.7 (in Ukrainian)

| *Матеріал надійшов до редакції: 25.11.2025 р.* | *Прийнято до друку: 05.01.2026 р.* | *Опубліковано: 02.03.2026 р.* |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X **2026, 41(1)**, https://doi.org/**10.31110/fmo2026.v41i1-03**
УДК: 004.96:51

СТВОРЕННЯ В СЕРЕДОВИЩІ MS EXCEL ШАБЛОНІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАВДАНЬ З ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Сергій РАДЧЕНКО
Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна
s.radchenko@kubg.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-6930-5801

Марія АСТАФ'ЄВА ✉
Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна
m.astafieva@kubg.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-2198-4614

Анатолій МАЗУР
Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна
avmazur.fitm24@kubg.edu.ua
https://orcid.org/0009-0000-6952-9437

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *У процесі навчання математичного аналізу, незалежно від форми організації освітнього процесу, важливу роль відіграють тренувальні вправи, спрямовані на вироблення й удосконалення практичних умінь і навичок. Зокрема, при вивченні інтегрування раціональних дробів виникає потреба у великій кількості однотипних задач, які були б методично коректними, обчислювально помірними та орієнтованими на формування відповідних алгоритмічних умінь. Практика показує, що набір числових параметрів у таких завданнях, взятий довільно, часто призводить до ускладнених обчислень з дробовими чи ірраціональними числовими виразами, що не відповідає дидактичній меті тренувальних вправ. Це зумовлює актуальність розробки формалізованих підходів до моделювання завдань, які б відповідали наперед заданим дидактичним вимогам.*

Матеріали і методи. *Для вирішення поставленої проблеми було проведено аналіз теоретичних і практичних результатів українських і зарубіжних дослідників та практиків щодо розробки математичних завдань. Для створення шаблонів використовувалася програма MS Excel з подальшим оформленням умов і результатів у текстовому редакторі LaTeX.*

Результати. *Побудовано набір шаблонів для автоматизовано генерування масивів тренувальних завдань з контрольованою складністю та наперед заданими методичними характеристиками. Показано, що використання таких шаблонів дозволяє уникати некоректних або дидактично небажаних варіантів, підвищує ефективність самостійної роботи студентів і значно спрощує підготовку навчальних матеріалів.*

Висновки. *Створення шаблонів у середовищі MS Excel для моделювання завдань з інтегрування раціональних дробів є ефективним інструментом формування навчального контенту для самостійного тренування студентів. Запропонований підхід поєднує математичну коректність, методичну доцільність і технологічну доступність, що робить його придатним для використання в освітньому процесі з математичного аналізу.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *шаблони для моделювання математичних завдань; MS Excel; LaTeX; математичний аналіз; інтегрування раціональних дробів.*

MS EXCEL TEMPLATES FOR MODELING PROBLEMS ON INTEGRATION OF RATIONAL FUNCTIONS

Serhiy RADCHENKO
Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine
s.radchenko@kubg.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-6930-5801

Mariia ASTAFIEVA ✉
Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine
m.astafieva@kubg.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-2198-4614

Anatoly MAZUR
Borys Grinchenko Kyiv Metropolitan University, Ukraine
avmazur.fitm24@kubg.edu.ua
https://orcid.org/0009-0000-6952-9437

ABSTRACT

Formulation of the Problem. *In teaching mathematical analysis, regardless of the educational organization, training exercises play an essential role in developing and improving students' practical skills and abilities. In particular, when studying the integration of rational functions, there is a need for a large number of similar tasks that are methodologically correct, computationally moderate, and focused on the formation of appropriate algorithmic skills. Practice shows that an arbitrary choice of numerical parameters in such tasks often leads to cumbersome calculations involving fractional or irrational expressions, which does not correspond to the didactic purpose of training exercises. This determines the relevance of developing formalized approaches to task modeling that meet predefined didactic requirements.*

Materials and Methods. *To address the stated problem, an analysis of theoretical and practical results of Ukrainian and international researchers and practitioners concerning the design of mathematical tasks was conducted. MS Excel was used to create task templates, followed by formatting the problem statements and solutions using the LaTeX typesetting system.*

Results. *A set of templates for the automated generation of collections of training tasks with controlled complexity and predefined methodological characteristics has been developed. It is shown that the use of such templates enables the avoidance of incorrect or didactically undesirable variants, increases the effectiveness of students' independent work, and significantly simplifies the preparation of instructional materials.*

Conclusion. *The development of templates in the MS Excel environment for modeling tasks on the integration of rational functions is an effective tool for creating educational content aimed at students' independent practice. The proposed approach combines mathematical correctness, methodological appropriateness, and technological accessibility, making it suitable for teaching mathematical analysis.*

KEYWORDS: *templates for modeling mathematical tasks; MS Excel environment; LaTeX; mathematical analysis; integration of rational functions.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Радченко С., Астаф'єва М., Мазур А. Створення в середовищі MS Excel шаблонів для моделювання завдань з інтегрування раціональних дробів. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 1. С. 21-25. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-03.

FOR CITATION: Radchenko, S., Astafieva, M., & Mazur, A. (2026). MS Excel templates for modeling problems on integration of rational functions. *Physical and Mathematical Education*, *41*(1), 21-25. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-03.

ВСТУП

Постановка проблеми. Створюючи інформаційне середовище для моделювання пакетів математичних завдань, ми ставимо перед собою дві взаємопов'язані цілі: по-перше, конструювати задачі, розв'язання яких не потребує надмірно складних арифметичних обчислень, оскільки такі обчислення не є основною дидактичною метою; по-друге, використовувати прості й загальнодоступні інструменти – програмне середовище Excel та текстовий редактор LaTeX. Зазначена проблема доволі успішно розв'язується у випадку завдань з лінійної алгебри, яким притаманна виражена алгоритмічність (операції з матрицями, обчислення визначників, знаходження власних чисел і власних векторів тощо), що дає змогу ефективно конструювати шаблони для однотипних завдань. Натомість багатовимірність і варіативність об'єктів математичного аналізу, чутливість їх математичної коректності до незначних змін параметрів, а також суттєва концептуальна складова відповідних задач роблять застосування шаблонного методу в математичному аналізі методично більш складним і ресурсомістким, що й зумовлює підвищену науково-педагогічну цінність розробок шаблонів для генерування завдань з цієї навчальної дисципліни.

Аналіз актуальних досліджень.

Навчальні задачі та вправи дуже важливі у навчанні математики, адже саме в процесі розв'язування задач відбувається узгодження процедурних навичок із концептуальним розумінням, що забезпечує цілісне засвоєння навчального матеріалу, усвідомлення природи математичної діяльності. Саме тому численні дослідження присвячені проблемам створення практичних завдань, тренувальних вправ при вивченні математичних дисциплін. Актуальний огляд відповідних досліджень щодо розробки завдань у математичній освіті, аналіз нових ідей наведені в колективній монографії (Watson & Ohtani (Eds.), 2015). Зокрема, автори дослідження (Kieran та ін., 2021) аналізують процес проектування завдань в математичній освіті за останні десятиліття, взаємозв'язки між викладанням, дослідженням та проектуванням, формулюють деякі загальні рекомендації щодо рамок та принципів розробки завдань і майбутніх досліджень, пов'язаних із розробкою.

Великий масив досліджень присвячений вивченню і виявленню потенціалу цифрових інструментів у розробці навчальних математичних завдань (Leung & Baccaglini-Frank (Eds.), 2017; Bokhove, 2017; Gierl & Lai, 2016), технологій, що підтримують персоналізацію в умовах змішаного навчання в закладах вищої освіти (Alamri та ін., 2021).

Проблеми підготовки вчителів (викладачів) до проєктування якісних математичних завдань, зокрема, й із використанням цифрових інструментів, професійного розвитку педагогів у зазначеному напрямку розглядаються в (Zaslavsky & Sullivan (Eds.), 2011; Joubert, 2016).

Ряд робіт пропонують підходи й інструменти розробки й автоматичного генерування багатоваріантних математичних завдань одного й того ж типу різного цільового призначення: для вироблення чи поновлення певних практичних навичок, для диференціації навчання за рівнем складності, для формування індивідуальних траєкторій навчання тощо. Так, у статті (Zaika та ін., 2021) автори розглядають онлайн-інструменти (Kahoot, Quizizz, Classtime) для створення математичних тестів, які доцільно використовувати під час викладання математики у вищій та загальній середній школі як у форматі очного, так і дистанційного online-навчання, роблять їх порівняльний аналіз, наводять конкретні приклади застосування. Дослідження (Sangwin & Grove, 2006; Astafieva та ін, 2024) стосуються використання STACK; для створення адаптивних математичних завдань, програмування дерева відповідей та автоматичного їх оцінювання STACK використовує систему комп'ютерної алгебри Maxima. Методика генерування в середовищі системи Maple завдань з інтегрування частинами невизначених інтегралів пропонується в статті (Михалевич та ін., 2008).

Безпосередньо створенню шаблонів для автоматизованого генерування пакетів математичних завдань присвячені дослідження (Радченко, 2021; Bodnenko та ін., 2021; Круглова & Диховичний, 2025). Круглова Н. та Диховичний О. розробляють програми-шаблони з використанням сервісів Wolfram Mathematica 14.0 (для складних символічних обчислень), GeoGebra (для графічних і геометричних завдань), R (для статистичних і ймовірнісних завдань) та Excel (для створення масових варіантів завдань і експорту даних). Середовище, у якому створюють шаблони автори дослідження (Радченко, 2021; Bodnenko та ін., 2021), міститься у звичайному файлі Excel і ніяк не пов'язане з програмуванням, що робить пропоновану ними методику доступною ширшому колу розробників. Крім того, вона не потребує спеціальної й постійної технологічної підтримки. У зазначених дослідженнях наведені приклади генерування завдань з лінійної алгебри.

Мета статті. Описати технологію створення в середовищі Excel шаблонів для генерування завдань з інтегрування раціональних дробів, що відповідають заздалегідь визначеним дидактичним вимогам, та проілюструвати їх використання на конкретних прикладах.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Процес інтегрування правильного раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де степінь полінома $P(x)$ менший за степінь полінома $Q(x)$, передбачає подання його у вигляді суми так званих елементарних дробів (дробів вигляду: $\frac{A}{x-a}$; $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$; $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}$, де $p^2-4q<0$) та знаходження суми первісних кожного з доданків. Зазначимо, що розклад правильного раціонального дробу на елементарні практично можливий, якщо вдається розкласти його знаменник на множники: лінійні та квадратні тричлени, які не мають дійсних нулів. Тут піде мова про моделювання саме таких правильних раціональних дробів. Крім того, коефіцієнти поліномів $P(x)$ та $Q(x)$ обиратимемо з множини цілих чисел та ще й такими, щоб нулі полінома $Q(x)$ були дійсними цілими та/або комплексно спряженими з цілими дійсною та уявною частинами. Ця дидактична вимога має за мету мінімізувати зусилля на арифметичні дії з «незручними» дробами чи ірраціональними числами.

Завдання розкладу правильного раціонального дробу на елементарні, а отже й завдання з інтегрування, слід розбити на окремі групи у залежності від нулів знаменника (усі нулі дійсні, різні; усі нулі дійсні, але серед них є кратні; усі нулі прості, але серед них є дійсні і комплексно спряжені; нулі лише комплексні прості; серед комплексних нулів є кратні) та степенів чисельника й знаменника дробу (чисельник першого, а знаменник другого степеня; чисельних першого, а знаменник третього степеня; чисельник другого, а знаменник третього степеня тощо), і для кожного з таких випадків будувати шаблон.

Щоб сформувати шаблон для певного типу завдання рухаємося з кінця, від очікуваного (тобто запланованого) результату. Пояснимо сказане на конкретному прикладі. Будемо моделювати правильний раціональний дріб, знаменник якого є поліномом третього степеня, який має три простих нулі, а чисельник – квадратний тричлен. Тоді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^2+bx+c}{x^3+mx^2+nx+l} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}.$$

Звівши до спільного знаменника дроби у правій частині цієї рівності, матимемо:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(A+B+C)x^2 - \big(A(\beta+\gamma)+B(\alpha+\gamma)+C(\alpha+\beta)\big)x + \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma}.$$

Звідси отримуємо значення усіх коефіцієнтів дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$, який пропонуватиметься для інтегрування:

$$a = A+B+C; b = A(\beta+\gamma)+B(\alpha+\gamma)+C(\alpha+\beta); c = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma;$$
$$m = -(\alpha+\beta+\gamma); n = (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma);\ l = -\alpha\beta\gamma.$$

Тобто, цілочисельний кортеж $\langle A, B, C, \alpha, \beta, \gamma\rangle$ однозначно задає шістку коефіцієнтів дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Внесена інформація в MS Excel має блочну структуру і є основою для побудови документу LaTeX з подальшою конвертацією у формат PDF. Блочна форма організації числової інформації дозволяє збільшувати кількість однотипних масивів (без втрати їх функціональності) простим копіюванням.

Масив даних в середовищі MS Excel може мати такий вигляд (Рис. 1):

A	B	C	α	β	γ	A+B+C	β+γ	α+γ	α+β	βγ	αγ	αβ	αβγ	A(β+γ)	B(α+γ)	C(α+β)	α+β+γ	αβγ
-4	-5	-3	3	2	3	-12	5	6	5	6	9	6	18	-20	-30	-15	8	18
-4	-1	5	1	-4	1	0	-3	2	-3	-4	1	-4	-4	12	-2	-15	-2	-4
3	-4	2	-2	3	-2	1	1	-4	1	-6	4	-6	12	3	16	2	-1	12
-5	4	5	1	3	-3	4	0	-2	4	-9	-3	3	-9	0	-8	20	1	-9
-2	2	-4	2	4	-3	-4	1	-1	6	-12	-6	8	-24	-2	-2	-24	3	-24
4	2	3	4	3	4	9	7	8	7	12	16	12	48	28	16	21	11	48
2	-5	-2	-4	-1	1	-5	0	-3	-5	-1	-4	4	4	0	15	10	-4	4
-1	2	-4	-3	2	3	-3	5	0	-1	6	-9	-6	-18	-5	0	4	2	-18

Рис. 1. Фрагмент масиву даних в середовищі MS Excel

Джерело: авторська розробка

Дані масиву надходять в область формування текстового документу, який містить, разом із числовими даними та коментарями, команди текстового редактора LaTeX. Автоматично створюється упорядкована послідовність комірок, у кожній із яких міститься необхідна змістова частина майбутнього документу (текстова, числова або службова). Зазначимо, що вміст кожної комірки цієї послідовності не пов'язаний із вмістом її інших комірок. Командою CONCATENATE «склеюємо» комірки послідовності, щоб утворити документ (чи фрагмент документу), організованого за правилами редактора LaTeX. Опишемо, наприклад, механізм побудови одного із фрагментів, що є результатом «склеювання» послідовності десяти комірок командою CONCATENATE(O5;P5;Q5;R5;S5;T5;U5;V5;W5;X5), де кожна комірка послідовності має свою будову: O5=”\[\int\frac{“; P5=”=J5”; Q5=”x”; R5=”'+”; S5=”K5”; T5=”}{x^2+”; U5=”L5”;V=”x+”; W5=”=M5”; X5=”}dx”. Результат такого «склеювання» в MS Excel виглядатиме формульним кодом: \[\int\frac{14x+42}{x^2+2x+17}dx. В редакторі LaTeX, після конвертації у формат PDF, ми побачимо формулу (Рис. 2).

$$\int \frac{14x+42}{x^2+2x+17}dx$$

Рис. 2. Візуальний образ відповідного формульного коду

Джерело: авторська розробка

Важливо зазначити, що «склеювати» можна не лише комірки, а й окремі змістові блоки (послідовності комірок) чи їх фрагменти одного й того ж або різних шаблонів.

Розглянемо ще один приклад. Опишемо процес створення шаблону для завдання типу: «знайти інтеграл $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, де $p^2-4q<0$». Рухаємося, як і в попередньому випадку, в зворотному напрямі, тобто – від запланованого результату до умови задачі. Запишемо послідовність очевидних перетворень:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p+\frac{2N}{M}-p}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{M}{2}\left(\frac{2N}{M}-p\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{M}{2}\left(\frac{2N}{M}-p\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a}, \text{де } a^2 = q-\frac{p^2}{4}.$$

Підберемо коефіцієнти M, N, p, q так, щоб у процесі обчислення інтеграла використовувалися якомога простіші перетворення, переважно з цілими числами. Для цього доцільно вимагати виконання таких умов:

а) $M = 2k, k \in Z$; тоді $\frac{M}{2}$ – ціле;

б) $\frac{2N}{M} = \frac{2N}{2k} = \frac{N}{k}$ – ціле, якщо $N = kl$, де $l \in Z$;

в) з умови $q - \frac{p^2}{4} = a^2$, щоб задовольнити вимогу «цілочисельності», маємо: $p = 2n, n \in Z; q = n^2 + a^2$.

Отже, всі коефіцієнти самої задачі, її розв'язку, а також проміжних результатів будуть цілими числами, якщо M, N, p, q виражаються через цілі k, l, n, a відповідно до співвідношень, отриманих у пунктах а–в.

У результаті побудови документа методом шаблонів у середовищі MS Excel та його подальшої конвертації у формат PDF, здійсненої за допомогою редактора LaTeX, на основі числової бази випадкових величин автоматично формується типографське подання математичних співвідношень – від початкової постановки задачі до кінцевого результату. Наприклад, автоматично згенерована формульна розмітка мовою LaTeX, що описує співвідношення між невизначеним інтегралом раціонального дробу та результатом його інтегрування (без проміжних перетворень)

```
\[ \int\frac{10x+25}{x^2+4x+13}dx = 5\ln(x^2+4x+13)+\frac{5}{3} \arctg\frac{x+2}{3}+C\],
```

трансформується у звичне типографське зображення формули у форматі PDF (рис. 3).

$$\int \frac{10x+25}{x^2+4x+13}\,dx = 5\ln(x^2+4x+13) + \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C$$

Рис. 3. Візуальне подання відповідного формульного коду,
автоматично сформоване під час конвертації документа з MS Excel у формат PDF
Джерело: авторська розробка

Застосування описаного методу не потребує від укладача завдань жодних додаткових «ручних» обчислень чи перетворень. Достатньо, після оновлення таблиці в середовищі MS Excel, скопіювати вміст лише однієї комірки та передати його до редактора LaTeX, після чого одним натисканням відповідної команди автоматично формується повноцінний документ. У результаті отримуємо пакет вправ будь-якого обсягу, відформатований відповідно до типографських норм. Оскільки кожне оновлення аркуша MS Excel генерує нові числові дані й відповідні їм варіанти завдань у форматі PDF, імовірність повторення варіантів є практично нульовою.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Розроблена технологія створення шаблонів у середовищі MS Excel дозволяє ефективно моделювати завдання з інтегрування раціональних дробів із наперед заданими дидактичними характеристиками. Застосування пропонованого підходу забезпечує коректність, обчислювальну помірність і придатність завдань для масового тренування, що робить його доцільним для використання в навчальному процесі з математичного аналізу.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення набору шаблонів для інших класів інтегралів, а також адаптацію до інших тем математичного аналізу, де важливо поєднати масовість тренувальних вправ із контролем їх методичної якості.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Круглова, Н., & Диховичний, О. (2025). Застосування ІКТ у створенні програм-шаблонів для генерації тестових завдань з вищої математики. *Інформаційні технології і засоби навчання*, *108*(4). 175–192. https://doi.org/10.33407/itlt.v108i4.6130
2. Михалевич, В.М., Крупський, Я.В. & Шевчук, О.І. (2008). Математичні моделі генерування завдань з інтегрування частинами невизначених інтегралів. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, 1. 116–122. URL: https://ir.lib.vntu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/5778/568.pdf
3. Радченко, С.П. (2021). Алгоритми генерування математичних завдань методом шаблонів. У *Теоретичні та практичні аспекти використання математичних методів та інформаційних технологій в освіті й науці: колективна монографія* (заг. ред. О. Литвин). (92–114). Київ. ун-т ім. Б. Грінченка. https://doi.org/10.28925/9720213284km
4. Alamri, H. A., Watson, S., & Watson, W. (2021). Learning Technology Models that Support Personalization within Blended Learning Environments in Higher Education. *TechTrends, 65*. 62–78. https://doi.org/10. 1007/s11528-020-00530-3
5. Astafieva, M., Hlushak, O., & Lytvyn, O. (2024). Using STACK to support adaptive mathematics learning in LMS Moodle. *IX International Workshop on Professional Retraining and Life-Long Learning using ICT (ICTERI 2024).* 30–41. https://ceur-ws.org/Vol-3781/
6. Bodnenko, D., Lytvyn, O., Radchenko, S., & Proshkin, V. (2021). The templates methods in e-learning of higher mathematics. In *E-learning in the Time of COVID-19: monograph*. (199–209). Katowice-Cieszyn, University of Silesia in Katowice.
7. Bokhove, C. (2017). Supporting Variation in Task Design Through the Use of Technology. In *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks,* 239–257. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_12
8. Gierl, M., & Lai, H. (2016). A process for reviewing and evaluating generated test items. *Educational Measurement:Issues and Practice*, *35*(4), 6–20. https://doi.org/10.1111/emip.12129
9. Joubert, M. (2016). Revisiting Theory for the Design of Tasks: Special Considerations for Digital Environments. In *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks* (A. Leung, A. Baccaglini-Frank (Eds.)). 17–40. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_2
10. Kieran, C., Doorman, M., & Ohtani, M. (2021). Frameworks and Principles for Task Design. In *Task Design In Mathematics Education* (A. Watson, M. Ohtani (eds.)). New ICMI Study Series, 19–81. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_2
11. Leung, A., & Baccaglini-Frank, A. (Eds.). (2017). *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks. Potential and Pitfalls*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0
12. Sangwin, C., & Grove, M. (2006). STACK: addressing the needs of the "neglected learners". In *Proceedings of the First WebALT Conference and Exhibition January 5--6, Technical University of Eindhoven, Netherlands* (pp. 81-95). Oy WebALT Inc, University of Helsinki.
13. Watson, A., & Ohtani, M. (Ed.) (2015). *Task design in mathematics education an ICMI Study 22*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2
14. Zaika, O., Vakaliuk, T., Riabko, A., Kukharchuk, R., Mintii, I., & Semerikov, S. (2021). Selection of online tools for creating math tests. *AREdu 2021: 4th International Workshop on Augmented Reality in Education,* at Kryvyi Rih, Ukraine, 82–106. https://doi.org/10.31812/123456789/4594
15. Zaslavsky, O., & Sullivan, P. (Eds.). (2011). *Constructing knowledge for teaching: Secondary mathematics tasks to enhance prospective and practicing teacher learning*. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09812-8

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Kruglova, N., & Dykhovychnyi, O. (2025). Application of ICT in creating template programs for generating test tasks in higher mathematics. *Information Technologies and Learning Tools,* 108(4). 175–192. https://doi.org/10.33407/itlt.v108i4.6130 (in Ukrainian)
2. Mykhalevych, V.M., Krupsky, Ya.V. & Shevchuk, O.I. (2008). Mathematical models for generating tasks on integration by parts of indefinite integrals. *Bulletin of Vinnytsia Polytechnic Institute*, 1. 116–122. URL: https://ir.lib.vntu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/5778/568.pdf (in Ukrainian)
3. Radchenko, S.P. (2021). Algorithms for generating mathematical tasks using the template method. In *Theoretical and practical aspects of the use of mathematical methods and information technologies in education and science: collective monograph* (ed. by O. Lytvyn). (92–114). Kyiv. B. Grinchenko University. https://doi.org/10.28925/9720213284km (in Ukrainian)
4. Alamri, H. A., Watson, S., & Watson, W. (2021). Learning Technology Models that Support Personalization within Blended Learning Environments in Higher Education. *TechTrends, 65*. 62–78. https://doi.org/10. 1007/s11528-020-00530-3
5. Astafieva, M., Hlushak, O., & Lytvyn, O. (2024). Using STACK to support adaptive mathematics learning in LMS Moodle. *IX International Workshop on Professional Retraining and Life-Long Learning using ICT (ICTERI 2024).* 30–41. https://ceur-ws.org/Vol-3781/
6. Bodnenko, D., Lytvyn, O., Radchenko, S., & Proshkin, V. (2021). The templates methods in e-learning of higher mathematics. In *E-learning in the Time of COVID-19: monograph*. (199–209). Katowice-Cieszyn, University of Silesia in Katowice.
7. Bokhove, C. (2017). Supporting Variation in Task Design Through the Use of Technology. In *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks,* 239–257. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_12
8. Gierl, M., & Lai, H. (2016). A process for reviewing and evaluating generated test items. *Educational Measurement:Issues and Practice*, *35*(4), 6–20. https://doi.org/10.1111/emip.12129
9. Joubert, M. (2016). Revisiting Theory for the Design of Tasks: Special Considerations for Digital Environments. In *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks* (A. Leung, A. Baccaglini-Frank (Eds.)). 17–40. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_2
10. Kieran, C., Doorman, M., & Ohtani, M. (2021). Frameworks and Principles for Task Design. In *Task Design In Mathematics Education* (A. Watson, M. Ohtani (eds.)). New ICMI Study Series, 19–81. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_2
11. Leung, A., & Baccaglini-Frank, A. (Eds.). (2017). *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks. Potential and Pitfalls*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0
12. Sangwin, C., & Grove, M. (2006). STACK: addressing the needs of the "neglected learners". In *Proceedings of the First WebALT Conference and Exhibition January 5--6, Technical University of Eindhoven, Netherlands* (pp. 81-95). Oy WebALT Inc, University of Helsinki.
13. Watson, A., & Ohtani, M. (Ed.) (2015). *Task design in mathematics education an ICMI Study 22*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2
14. Zaika, O., Vakaliuk, T., Riabko, A., Kukharchuk, R., Mintii, I., & Semerikov, S. (2021). Selection of online tools for creating math tests. *AREdu 2021: 4th International Workshop on Augmented Reality in Education,* at Kryvyi Rih, Ukraine, 82–106. https://doi.org/10.31812/123456789/4594
15. Zaslavsky, O., & Sullivan, P. (Eds.). (2011). *Constructing knowledge for teaching: Secondary mathematics tasks to enhance prospective and practicing teacher learning*. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09812-8

| *Матеріал надійшов до редакції: 25.12.2025 р.* | *Прийнято до друку: 30.01.2026 р.* | *Опубліковано: 02.03.2026 р.* |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2026, 41(1), https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-04
УДК: 373:004.94

МОДЕЛІ ІМЕРСИВНОГО СЕРЕДОВИЩА НАВЧАННЯ

Наталя РАШЕВСЬКА ✉
Інститут цифровізації освіти НАПН України, Україна
nvr1701@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6431-2503

АНОТАЦІЯ

У статті розглянуто деякі із розроблених та впроваджених у процес навчання інноваційних моделей на основі яких можна організовувати процес навчання в імерсивному середовищі. Виокремлено структуру таких моделей та їх переваги застосування у процесі навчання.

Формулювання проблеми. *Розвиток імерсивних технологій в освіті актуалізує проблему проєктування цілісної моделі імерсивного освітнього середовища, яка б інтегрувала педагогічні, психологічні, технологічні та розвивальні чинники й відповідала умовам навчання в закладах загальної середньої освіти. Наразі спостерігається фрагментарність моделей імерсивного навчання, що ускладнює їх системне впровадження.*

Матеріали і методи. *У дослідженні використано комплекс теоретичних методів: аналіз, систематизацію, узагальнення науково-педагогічної літератури, а також структурно-функціональний і порівняльний аналіз педагогічних моделей.*

Результати. *Систематизовано та проаналізовано п'ять моделей імерсивного навчання: когнітивно-афективну, дослідницьку, еволюційну, потокового стану та ігрового навчання на основі штучного інтелекту. Визначено їх основні характеристики, переваги й обмеження. Встановлено, що наявні моделі не враховують повною мірою специфіку змісту природничо-математичних дисциплін та освітні потреби учнів старшої школи. Це зумовлює необхідність подальшого теоретичного й практичного обґрунтування інтегративного підходу.*

Висновки. *Фрагментарний характер розглянутих моделей імерсивного навчання свідчить про актуальність розробки комплексної моделі, яка б забезпечувала педагогічну доцільність, технологічну гнучкість і змістову відповідність навчання в академічному ліцеї. Подальші дослідження спрямовуватимуться на створення та апробацію такої моделі в умовах вивчення природничо-математичних дисциплін із використанням засобів віртуальної та доповненої реальності.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: імерсивне навчання; імерсивне середовище навчання; модель організації навчання; заклад загальної середньої освіти; академічний ліцей; природничо-математичні предмети.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Рашевська Н. Моделі імерсивного середовища навчання. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 1. С. 26-31. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-04.

MODELS OF IMMERSIVE LEARNING ENVIRONMENTS

Natalia RASHEVSKA ✉
Institute of digitalization of education of NAES of Ukraine, Ukraine
nvr1701@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6431-2503

ABSTRACT

The article discusses innovative models developed and implemented to organize learning in an immersive environment. The structure of such models and their advantages in the learning process are highlighted.

Formulation of the problem. *The development of immersive technologies in education raises the question of designing a comprehensive model of an immersive educational environment that integrates pedagogical, psychological, technological, and developmental factors and meets the conditions of learning in general secondary education institutions. Currently, immersive learning models are fragmented, which complicates their systematic implementation.*

Materials and methods. *The study uses a set of theoretical methods: analysis, systematization, generalization of scientific and pedagogical literature, and structural-functional and comparative analysis of pedagogical models.*

Results. *Five models of immersive learning have been systematized and analyzed: cognitive-affective, research-based, evolutionary, flow state, and game-based learning based on artificial intelligence. Their main characteristics, advantages, and limitations have been identified. It has been established that existing models do not fully account for the specific nature of natural science and mathematics disciplines, as well as the educational needs of high school students. This necessitates further theoretical and practical justification of the integrative approach.*

Conclusion. *The fragmented nature of the immersive learning models discussed underscores the need to develop a comprehensive model that ensures pedagogical expediency, technological flexibility, and the relevance of learning content in academic lyceums. Further research will focus on creating and testing such a model in the context of studying natural and mathematical disciplines using virtual and augmented reality tools.*

KEYWORDS: immersive learning; immersive learning environment; learning organization model; general secondary education institution; academic lyceum; natural science and mathematics subjects.

FOR CITATION: Rashevska, N. (2026). Models of immersive learning environments. *Physical and Mathematical Education*, *41*(1), 26-31. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-04.

ВСТУП

Постановка проблеми. Швидкий розвиток цифрових технологій започаткував нову еру освітніх практик, у якій традиційні методики навчання все частіше доповнюються або навіть замінюються інноваційними підходами. Одним із найперспективніших напрямів у цій сфері є імерсивні технології: віртуальна реальність (VR), доповнена реальність (AR) та змішана реальність (MR). Ці технології реалізуються в рамках імерсивних середовищ – інтерактивних цифрових просторів, що забезпечують часткове або повне занурення користувача в навчальні матеріали через мультисенсорні стимули та активну взаємодію з імерсивним світом. Імерсивні середовища відкривають нові можливості для створення захопливих і персоналізованих досвідів навчання, що сприяють глибшому розумінню та засвоєнню складних концепцій, особливо актуальних в рамках Нової української школи (НУШ).

Аналіз актуальних досліджень демонструє, що науковці активно вивчають потенціал віртуальної, доповненої та змішаної реальностей як засобів трансформації освітнього процесу. У науково-освітній спільноті розроблено низку моделей імерсивних середовищ, які демонструють їхню ефективність у формуванні мотивації до навчання, розвитку пізнавальної активності та підтримці індивідуалізації освітнього процесу (Oyelere et al., 2020).

У процесі аналізу наукових джерел і практик використання імерсивних технологій в освітньому просторі виокремлено низку моделей, які можна умовно згрупувати за критерієм функціонального призначення (Pitsikalis et al., 2024):

1. *Моделі інструкційного дизайну*, що регламентують системне проєктування процесу навчання і можуть бути адаптовані до особливостей імерсивного середовища навчання. До них належать класичні та гнучкі підходи: ADDIE (Analysis, Design, Development, Implementation, Evaluation); SAM (Successive Approximation Model); TESLA (Technology Enhanced Spaces for Learning and Assessment).

2. *Моделі інтеграції технологій в освіту*, що визначають рівень та спосіб використання цифрових (у тому числі імерсивних) технологій у процесі навчання. Найбільш обґрунтованими моделями є: SAMR (Substitution, Augmentation, Modification, Redefinition); TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge); TICOL (Technological Integration in Collaborative Online Learning).

3. *Моделі імерсивного навчання* розроблені спеціально для реалізації використання імерсивних технологій у навчанні та визначають структурні компоненти й умови їх ефективного використання. На основі моделей CAMILE (Cognitive-Affective Model of Immersive Learning Environment); XR ABC (Absorb, Blend, Create); M-iVR-L (Model of Immersive Virtual Reality Learning) та моделі навчального дизайну для навчальних середовищ віртуальної реальності з імерсивним підходом доцільним є розроблення моделей організації уроків із використання імерсивних технологій, що описують різний рівень занурення учня в імерсивне середовище навчання та його взаємодію з ним. Гармонійна комбінація елементів зазначених моделей є доцільною для побудови процесу навчання учнів академічних ліцеїв в рамках НУШ.

Попри значні досягнення у сфері моделювання імерсивного навчання, більшість чинних моделей сфокусовані на окремих аспектах цього процесу – технічному забезпеченні, візуалізації навчального матеріалу, когнітивному навантаженні або мотивації, – і не забезпечують цілісної педагогічної картини, що відповідає потребам загальної середньої освіти. Зокрема, спостерігається дефіцит моделей, які б інтегрували технологічні, дидактичні, психологічні та організаційні компоненти в умовах академічних ліцеїв. Саме тому для формування нашої методологічної позиції важливим є опора на міждисциплінарний аналіз сучасних наукових підходів. Особливе значення мають праці українських дослідників – Ю. Богачкова (у контексті цифрової дидактики та віртуальних середовищ), С. Литвинової (із системного підходу до ІКТ в освіті), Ю. Носенко (із когнітивного підходу до технологічного навчання), А. Сухіх та П. Уханя (у частині педагогічної взаємодії у цифровому просторі). Водночас закордонні дослідники – Г. Макранський, Г. Макговін та С. Пітсікаліс – запропонували низку емпірично обґрунтованих моделей, які враховують когнітивні механізми занурення, емоційно-мотиваційний вплив імерсивних середовищ та їх роль у формуванні втіленого знання. Систематизація цих підходів дала змогу визначити напрями інтеграції імерсивних технологій у методичну систему навчання у закладах загальної середньої освіти.

Мета статті полягає в аналізі розроблених моделей імерсивних середовищ навчання, визначення їх переваг та обмежень, а також узагальнення педагогічних, психологічних, технологічних і розвивальних чинників, що можуть бути основою для побудови цілісної моделі імерсивного середовища в закладах загальної середньої освіти.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для розв'язання поставлених завдань було застосовано такі методи: теоретичний аналіз та узагальнення науково-педагогічної літератури та джерел з проблеми використання імерсивних технологій в освіті; структурно-функціональний аналіз моделей організації навчання в імерсивному середовищі з метою визначення їхніх характеристик, переваг і обмежень; порівняльний аналіз для виявлення спільних елементів, відмінностей та тенденцій у підходах до проєктування процесу навчання із використанням імерсивних технологій.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Аналіз наукових джерел надав можливість виокремити деякі моделі імерсивних середовищ навчання, що використовують у процесі організації навчання. Треба зазначити, що всі розглянуті в статті моделі можна віднести до феноменологічної моделі освіти, що передбачає персональний характер навчання з урахуванням індивідуально-психологічних особливостей учнів, дбайливе й шанобливе ставлення до їхніх інтересів та потреб.

Основою виокремлених моделей імерсивних середовищ навчання є гармонійне поєднання занурення та інтерактивності. Однією з ефективних моделей імерсивного середовища навчання, що поєднує в собі такі теорії як теорія самовизначення, теорія когнітивного навантаження, когнітивну теорію мультимедійного навчання та втіленого пізнання називають когнітивно-афективна модель імерсивного середовища навчання (Peña-Acuña & Rubio-Alcalá, 2024).

1. ***Когнітивно-афективна модель імерсивного середовища навчання*** (CAMILE) являє собою підхід, який об'єднує когнітивні та афективні аспекти навчання в імерсивних середовищах (VR, AR, MR тощо). Така модель підкреслює важливість як когнітивного компонента навчального досвіду, так й афективного (емоційного).

Модель описує шість афективних та когнітивних факторів (Makransky & Petersen, 2021):

1) ситуативний інтерес, який з часом повинен перейти в індивідуальний та спонукати учня отримувати нові знання;

2) внутрішня мотивація для задоволення процесом навчання, оскільки створює умови для відчуття учнями автономності в отриманні знань, формує наполегливість та допитливість;

3) самоефективність пов’язана з відчуттям учнями контролю власного процесу навчання завдяки миттєвому зворотному зв’язку;

4) втілення як досвід володіння віртуальним тілом та можливість відчувати сенсорні події, спрямовані на тіло. З наукових досліджень відомо (Goldin-Meadow, 2011), що навчання є більш ефективним за умови скоординованості моторики та візуалізації поняття. Це означає, що при побудові моделі навчання на основі використання імерсивних технологій обов’язковим є відпрацювання практичних навичок «в живу», після ознайомлення з цим поняттям в імерсивному середовищі;

5) когнітивне навантаження в зазначеній моделі підтримується використанням віртуальних лабораторій, різноманітних симуляцій та є досить сильним. Таке навантаження може призвести до перенавантаження учнів та повинно контролюватися вчителем;

6) саморегуляція та рефлексія створюють умови для активного навчання учня при правильному контролі. Саморегуляція без рефлексії може змінити акценти в отриманні учнем нових знань – навчання стане не продуктивним.

Задачею моделі є активне залучення учнів до конструювання знань та уміння застосовувати їх на практиці, підвищувати результативність навчання.

Проведене науковцями (Peña-Acuña & Rubio-Alcalá, 2024) емпіричне дослідження ефективності моделі показало, що технології занурення та інтерактивного навчання мають вплив на процес навчання через афективні та когнітивні чинники ситуативного інтересу та втіленого навчання. В дослідженні зазначено, що підвищення рівня втіленого навчання зменшує ступінь засвоєння знань, імовірно, через відсутність узгодженості між тілесними діями та змістом навчання. А на внутрішню мотивацію учня опосередковано впливають занурення та інтерактивність (через фізичну присутність).

2. *Дослідницька модель імерсивного середовища навчання* (Inquiry-Based Immersive Learning Environment Model) ґрунтується на поєднанні імерсивних технологій з дослідницьким підходом до навчання. В даній моделі учні можуть активно досліджувати, аналізувати та інтерактивно взаємодіяти з навчальним матеріалом у контексті реальних чи змодельованих ситуацій. Основна мета моделі полягає у розвитку критичного мислення, уміння знаходити шляхи розв’язання проблем та глибокого розуміння предмета через активне дослідження та експериментування.

В основі такої моделі лежить концепція втіленого пізнання, за умови якої нові знання формуються не тільки через абстрактні моделі, а й через фізичний досвід, сенсорну взаємодію з навколишнім світом. Імерсивні технології забезпечують учневі сенсорну взаємодію шляхом активного залучення їх до вивчення нового навчального матеріалу через дослідження.

Вчені зосереджують увагу на тому, що в даній моделі гармонійно поєднуються чотири типи пізнання: втілене, активне, вбудоване та розширене, що отримало назву 4E (McGowin et al., 2023). В основі концепції 4E та дослідницької моделі імерсивного середовища навчання лежить багаторівнева активність учня, що сприяє проведенню навчання через дослідження без когнітивного перевантаження учня (Conrad et al., 2024), (McGowin et al., 2023).

На першому рівні учень є пасивним отримувачем знань в середовищі, він не керує процесом навчання, його когнітивна діяльність дуже низька. На другому рівні учень самостійно керує темпом свого навчання, залучає додаткові сенсомоторні системи, які допомагають пригадувати та вивчати складний матеріал і досягати позитивних результатів навчання, активно виконує практичні дії. На третьому рівні учень має право керувати навчальним змістом, навчальний матеріал сприймає усвідомлено шляхом проведення дослідження у віртуальних лабораторіях. Цей рівень вимагає від учнів вийти за рамки пасивного сприйняття й активно взаємодіяти з навчальним матеріалом. На четвертому – учень конструює нові знання за допомогою аналізу, порівняння та синтезу. Конструювання знань виходить за рамки базової взаємодії та вимагає від учня умінь генерувати ідеї та уміння розв’язувати поставлені задачі. Групова робота, проєкти та симуляції є прикладами діяльності з конструювання знань. На цьому рівні учні не тільки конструюють нові знання, а й ведуть інтерактивні діалоги з вчителем та іншими учасниками процесу навчання (рис. 1).

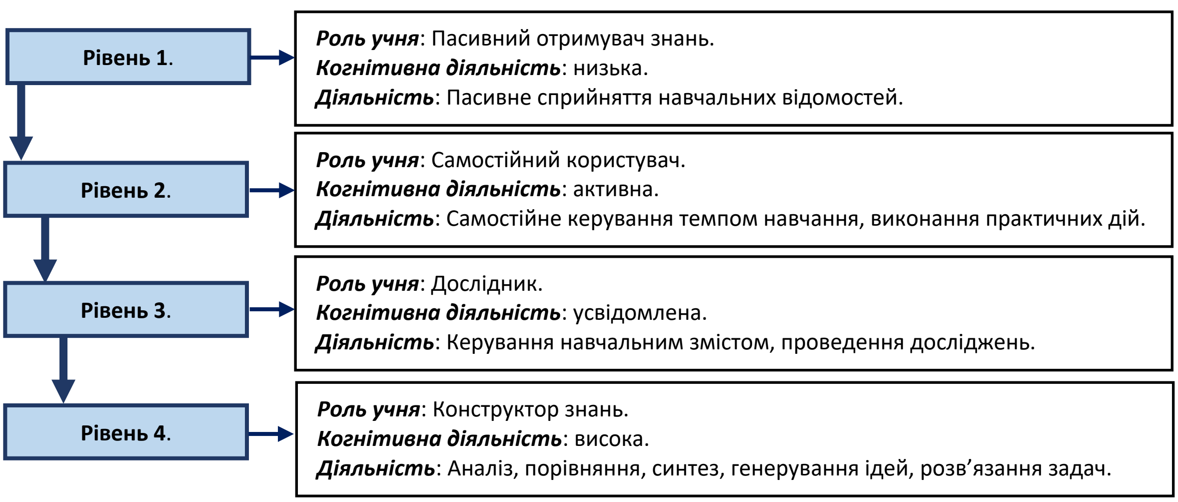


Рис. 1. Етапи дослідницької моделі імерсивного середовища навчання

Джерело: розроблене автором на основі (McGowin et al., 2023)

3. *Імерсивна модель навчання з використанням еволюційного навчання* поєднує в собі імерсивні технології з концепцією еволюційного навчання. Ця модель орієнтована на поступове вивчення навчального матеріалу шляхом експериментів, спостереженнями за результатами та саморефлексії. Вхід у модель здійснюється на основі вхідного тестування, що визначає рівень середовища до потреб учасника. Еволюційне навчання базується на адаптації, природному відборі та варіації навчального матеріалу і методів, щоб створити найкращі умови для навчання з підтримкою зворотного зв'язку (рис. 2). Чим складнішій навчальний матеріал, тим більш дрібно він подається в цій моделі, а саме середовище модифікується в напрямку більш оптимальної візуалізації для розв'язання поточної проблеми (Bhattacharjee et al., 2018).

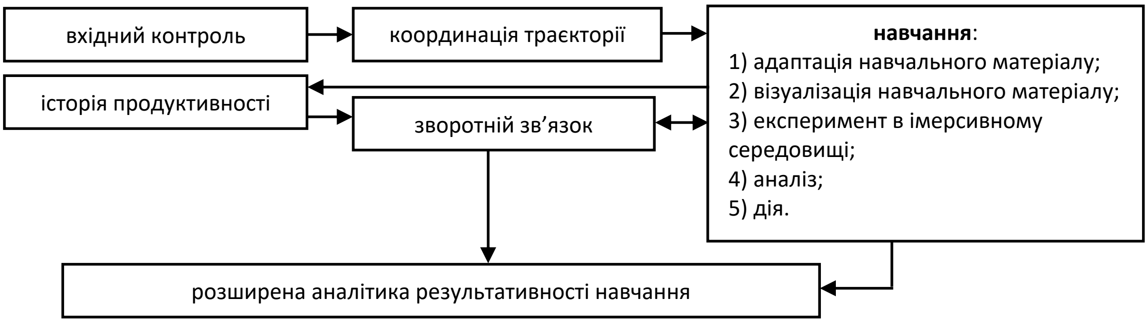


Рис. 2. Етапи еволюційної моделі навчання

Джерело: розроблене автором на основі (Bhattacharjee et al, 2018)

4. *Модель потокового стану навчання* передбачає повне занурення учня у середовище навчання шляхом створення завдань, що є дещо складнішими за його поточний рівень знань, але водночас стимулюють його активність. Характерними особливостями цієї моделі є (Li, Chen et al., 2016):

1) рівновага між викликами та уміннями. В моделі потокового стану навчальні завдання повинні бути на рівень складнішими від знань учнів, щоб стимулювати їх процес навчання; завдання повинні відповідати рівню знань та умінь учня, поступово ускладнюватись у міру підвищення його компетентності;

2) чіткі цілі та очікування полягають в тому, що учень чітко усвідомлює мету та завдання навчання в такому середовищі;

3) концентрація та фокусування уваги відбувається шляхом повного занурення учня у процес отримання знань;

4) відчуття контролю надає учням можливість контролювати свої дії та впливати на хід подій у процесі навчання;

5) занурення в діяльність на рівні емоцій, стимулювання пам'яті та уваги;

6) негайний зворотний зв'язок допомагає учням зрозуміти, чи рухаються вони в правильному напрямку;

7) втрата відчуття часу.

На нашу думку, характеристики дослідницької, еволюційної моделей та моделі потокового стану мають спільне ядро та цілі, що можуть стати основою будь-якої моделі імерсивного середовища навчання.

5. *Модель ігрового навчання на основі штучного інтелекту*. Однією з основних теорій інтеграції імерсивних технологій у процес навчання є теорія конструктивізму, що підтримує природне бажання людини творити. Реалізувати такі здібності учнів можна за допомогою генеративного штучного інтелекту, шляхом створення реалістичних віртуальних середовищ та персонажів (наприклад, аватарів) через гру. Учні можуть брати участь у процесі навчання з підвищеним відчуттям присутності, інтерактивності та занурення, що допомагає покращити їхню мотивацію, інтерес, втілення та створення знань. Використання штучного інтелекту надає можливість відстежувати прогрес учня, адаптувати вміст навчальних відомостей під досягнення учня, підтримувати учня зворотним зв'язком. Ігрові нагороди формуватимуть в учнів відчуття досягнення мети (Song et al., 2024), а також створять умови для зміни формувального оцінювання учнів (Groff, 2018), що відповідає концепціям НУШ.

В наукових дослідженнях було доведено, що організація процесу навчання через гру на основі імерсивних технологій, зокрема віртуальної реальності (Merchant et al., 2014) та доповненої реальності (Capecchi et al., 2025), є ефективною, особливо, якщо персоналізований зворотний зв'язок підтримується штучним інтелектом. Порівняно з традиційним навчанням, навчання, засноване на іграх, значно посилює відчуття присутності та мотивує учнів до навчання. Використання цієї моделі навчання трансформує формувальне оцінювання, сприяє розвитку стратегічного мислення, навчає планувати та комунікувати, заохочує брати відповідальність за власні рішення та вчить аналізувати дані для оптимізації подальшого навчання.

В наукових дослідженнях було визначено, що найбільша частина ігор на основі імерсивних технологій використовується в закладах загальної середньої освіти для вивчення тем, пов'язаних з охороною здоров'я, правил безпеки та поведінки, а предмети природничо-математичного циклу в дослідженнях ігрових середовищ навчання складають лише десяту частину (Oyelere et al., 2020).

Ігрове середовище навчання, побудоване на основі імерсивних технологій, є синтетичним та має значний потенціал для підвищення ефективності навчання. Таке середовище забезпечує (Pinchuk et al., 2019):

– *емоційну залученість*: ігрові завдання є цікавими для учнів, що створює умови для залучення їх до процесу навчання на емоційному рівні та сприяє кращому засвоєнню матеріалу;

– *розуміння завдань*: використання ігрового імерсивного середовища надає учням можливість проводити дослідження явищ в дії, що робить завдання більш зрозумілими та наочними;

– *наочність результатів*: візуалізація результатів навчання в імерсивному середовищі допомагає учням краще усвідомити свої досягнення та побачити практичне застосування отриманих знань;

– *розвиток інтелекту*: ігрове імерсивне навчання стимулює розумову діяльність учнів, сприяючи розвитку їхнього критичного мислення, уміння аналізувати та розв'язувати проблеми.

Ігрові технології зазначеної моделі можна розподілити на (Groff, 2018): 1) цільові ігри, які є окремими програмами, націленими на формування конкретних умінь в одному предметі з однієї теми; 2) лінійні ігри, які включають сюжетну лінію та серію головоломок, що надають можливість сформувати поняття з розділу предмета; 3) відкрита гра, яка пропонує учням інструменти та матеріали для створення нових знань з предмета через дослідження в грі; 4) віртуальні світи, які залучають учнів до розв'язання проблем та квестів, які часто об'єднують низку тем.

Попри суттєві переваги ігрового імерсивного середовища вважаємо, що для навчання учнів старших класів дана модель вже є неприйнятною, оскільки випускники академічних ліцеїв більш орієнтовані на отримання фундаментальних знань. Сформувати цілісну систему таких знань випускникам можливо за умови їх системної роботи. Не можливо повністю відкинути ігрові технології у старшій школі, але їх використання повинно бути дозованим та сприяти розвантаженню учнів під час навчання.

Розглянуті моделі імерсивних середовищ навчання, на нашу думку, є неповними. Кожна із них описує імерсивне середовище через деякі компоненти, але не формує цілісної картини якісного середовища навчання сучасного учня. Аналіз наукових досліджень показав, що в системі загальної середньої освіти бракує моделі, яка включає значну кількість факторів та впливає на мотивацію учнів, результативність навчання й показує їх взаємодію та вплив на навчання (Fokides & Antonopoulos, 2024).

Узагальнимо переваги та недоліки кожної моделі в таблиці 1.

Таблиця 1. Переваги та недоліки моделей імерсивних середовищ навчання

Модель	Переваги	Недоліки
Когнітивно-афективна модель імерсивного середовища навчання	Перевагою є важливість емоційної залученості та когнітивного розвитку учнів.	Недостатньо уваги приділяється практичному застосуванню знань та дослідницькій діяльності.
Дослідницька модель імерсивного середовища навчання	Акцент на дослідницькому підході та концепції втіленого пізнання.	Може призвести до когнітивного перевантаження учнів.
Імерсивна модель навчання з використанням еволюційного навчання	Адаптація до потреб учнів та індивідуалізація навчання.	Недостатньо уваги приділяється емоційній залученості та соціальній взаємодії.
Модель потокового стану навчання	Створення умов для глибокого занурення в навчання та відчуття контролю.	Недостатньо уваги приділяється практичному застосуванню знань та дослідницькій діяльності.
Модель ігрового навчання на основі штучного інтелекту	Підвищення мотивації та інтересу учнів за допомогою ігрових елементів та штучного інтелекту.	Може бути неприйнятною для учнів старших класів, які орієнтовані на отримання фундаментальних знань.

Розглянуті вище моделі надали можливість сформувати основні фактори побудови моделі імерсивного середовища навчання учнів академічних ліцеїв:

Педагогічні: 1) формування чітких цілей та результатів навчання, орієнтованих на формування практичних навичок; 2) зміст навчання повинен бути інтерактивним, тобто містити завдання, що спонукають до досліджень; творчим з елементами проблемного та ігрового навчання; активним, тобто зміст навчання повинен бути персоналізованим для учнів з різним рівнем початкової підготовки на момент вступу до академічного ліцею; 3) оцінювання результатів навчальних досягнень учнів повинно чітко відображатися в створеній системі оцінювання та сприяти позитивній динаміці навчання учня.

Технологічні: 1) імерсивні технології повинні бути для учнів зручними та зрозумілими, а також сприяти реалістичності навчання; 2) відображати стан потоку та присутності, робити процес навчання інтегрованим та поступовим; 3) надавати якісний зворотний зв'язок;

Психологічні: 1) сприяти когнітивному навчанню, при цьому не переобтяжувати процес навчання, а створювати умови для розуміння та запам'ятовування; 2) сприяти соціальній взаємодії та співпраці; 3) залучати учнів у процес навчання та мотивувати їх, пропонуючи більш захопливий та інтерактивний досвід, який сприяє активному навчанню; 4) містити навчальні матеріали, що будуть викликати позитивне емоційне залучення.

Розвивальні: 1) сприяти розвитку критичного та аналітичного мислення через можливості робити власні висновки з процесу навчання; 2) сприяти розвитку творчості та інновацій через задоволення власних інтересів та вподобань; 3) стимулювати розвиток комунікативних навичок через уміння доводити переконання та вести дискусії; 4) імерсивні технології сприяють розвитку емоційного інтелекту через здатність викликати емоційний відгук від свого використання; 5) розвиток самостійності та саморегуляції через підтримку автономії у навчанні.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведене аналітичне дослідження дозволило здійснити систематизацію моделей організації навчання в імерсивному середовищі, що надають методичну основу для використання імерсивних технологій у сучасний процес навчання. Установлено, що більшість наявних моделей мають фрагментарний характер, орієнтуючись переважно на технологічний або когнітивно-процесуальний складники, і не враховують у повному обсязі специфіку загальної середньої освіти, зокрема природничо-математичних дисциплін в академічних ліцеях. Системний аналіз їхніх переваг і обмежень створює підґрунтя для проєктування нових педагогічних рішень та вибудови цілісної методичної системи на основі імерсивного навчання.

У подальших дослідженнях передбачається: 1) розроблення інтегративної моделі організації навчання в імерсивному середовищі для умов академічного ліцею; 2) визначення принципів, структурних компонентів та функціональних характеристик такої моделі; 3) адаптація імерсивного середовища навчання до потреб навчання природничо-математичних предметів в академічних ліцеях.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Bhattacharjee, D., Paul, A., Kim, J. H., & Kumar, K. (2018). An immersive learning model using evolutionary learning. *Computers & Electrical Engineering, 65*, 236–249. https://doi.org/10.1016/j.compeleceng.2017.08.023
2. Capecchi, I., Borghini, T., Bellotti, M., & Bernetti, I. (2025). Enhancing education outcomes integrating augmented reality and artificial intelligence for education in nutrition and food sustainability. *Sustainability, 17*(5), 2113. https://doi.org/10.3390/su17052113
3. Conrad, M., Kablitz, D., & Schumann, S. (2024). Learning effectiveness of immersive virtual reality in education and training: A systematic review of findings. *Computers & Education: X Reality, 4*, 100053. https://doi.org/10.1016/j.cexr.2024.100053
4. Fokides, E., & Antonopoulos, P. (2024). Development and testing of a model for explaining learning and learning-related factors in immersive virtual reality. *Computers & Education: X Reality, 4*, 100048. https://doi.org/10.1016/j.cexr.2023.100048
5. Goldin-Meadow, S. (2011). Learning through gesture. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Cognitive Science, 2*(6), 595–607. https://doi.org/10.1002/wcs.132
6. Groff, J. S. (2018). The potentials of game-based environments for integrated, immersive learning data. *European Journal of Education, 53*(2). https://doi.org/10.1111/ejed.12270
7. Li, K.-C., Chen, C.-T., Cheng, S.-Y., & Tsai, C.-W. (2016). The design of immersive English learning environment using augmented reality. *Universal Journal of Educational Research, 4*(9), 2076–2083. https://doi.org/10.13189/ujer.2016.040919
8. Makransky, G., & Petersen, G. B. (2021). The Cognitive Affective Model of Immersive Learning (CAMIL): A theoretical research-based model of learning in immersive virtual reality. *Educational Psychology Review, 33*, 937–958. https://doi.org/10.1007/s10648-020-09586-2
9. McGowin, G., Fiore, S. M., & Oden, K. (2023). Towards a theory of learning in immersive virtual reality: Designing learning affordances with embodied, enactive, embedded, and extended cognition. In *Bridging the XR Technology-to-Practice-Gap: Methods and Strategies for Blending Extended Realities into Classroom Instruction* (Vol. I, pp. 35–54). Association for the Advancement of Computing in Education (AACE).
10. Merchant, Z., Goetz, E. T., Cifuentes, L., Keeney-Kennicutt, W., & Davis, T. J. (2014). Effectiveness of virtual reality-based instruction on students' learning outcomes in K-12 and higher education: A meta-analysis. *Computers & Education, 70*, 29–40. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.07.033
11. Oyelere, S., Bouali, N., Kaliisa, R., Obaido, G., Yunusa, A., & Jimoh, E. (2020). Exploring the trends of educational virtual reality games: A systematic review of empirical studies. *Smart Learning Environments, 7*(1), 1–22. https://doi.org/10.1186/s40561-020-00142-7
12. Peña-Acuña, B., & Rubio-Alcalá, F. D. (2024). Ethical approach to the use of immersive technologies. Advance about digitalisation of multilingual programs in the EHEA. *Frontiers in Virtual Reality, 5*, 1357595. https://doi.org/10.3389/frvir.2024.1357595
13. Pinchuk, O. P., Tkachenko, V. A., & Burov, O. Yu. (2019). AV and VR as gamification of cognitive tasks. In *Proceedings of the 15th International Conference ICTERI* (Vol. 2387, pp. 437–442). http://ceur-ws.org/Vol-2387/20190437.pdf
14. Pitsikalis, S., Lasica, I.-E., Kostas, A., & Vitsilaki, Ch. (2024). Educational design guidelines for teaching with immersive technologies – Updating learning outcomes of the European qualification framework. *Trends in Higher Education, 3*(4), 1091–1108. https://doi.org/10.3390/higheredu3040064
15. Song, Y., Wu, K., & Ding, J. (2024). Developing an immersive game-based learning platform with generative artificial intelligence and virtual reality technologies – "Learningverse VR". *Computers & Education: X Reality, 4*, 100069. https://doi.org/10.1016/j.cexr.2024.100069

| *Матеріал надійшов до редакції: 11.08.2025 р.* | *Прийнято до друку: 25.10.2025 р.* | *Опубліковано: 02.03.2026 р.* |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2026, 41(1), https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-05
UDC: 373.5.016:004:004.738.5:004.8

OFFLINE-FIRST PWA З КОНТРОЛЬОВАНОЮ ПІДТРИМКОЮ ГЕНЕРАТИВНОГО ШІ ДЛЯ НАВЧАННЯ ІНФОРМАТИКИ У ПРИФРОНТОВІЙ ШКОЛІ

Дмитро ТУРЧИН ✉
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
d.turchyn@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0009-0006-1570-3253

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Освітній процес у прифронтових територіях має не лише організаційний, а й методичний виклик: нестабільні електропостачання та інтернет руйнують безперервність навчальних дій і спотворюють справедливість оцінювання, тоді як генеративний ШІ додатково знижує валідність перевірки, що спирається лише на кінцевий результат програмування. У статті перевіряється, чи здатний offline-first підхід зберегти навчальну дію та забезпечити доказовість виконання завдань за умов перебоїв без переходу до неконтрольованого використання ШІ.*

Матеріали і методи. *Запроваджено offline-first PWA «Edu Survival Kit» з локальним збереженням і відкладеною синхронізацією, модулем контрольованих підказок на основі GenAI та процесно орієнтованим оцінюванням через артефакти діяльності (версії, короткі пояснення, тести для перевірки). Пілотне дослідження охопило три групи стейкхолдерів (7, 10, 11 класи; доступ отримали 84 здобувачі освіти). Використано описові індикатори платформи, анонімне опитування (n = 33), відгуки вчителів (n = 2) та експертну оцінку (n = 1). Дані узагальнено описово та тематично.*

Результати. *Offline-first рішення забезпечило продовження роботи під час уроку за планового відключення та суттєво скоротило час доступу до завдань у мікропорівнянні з LMS-маршрутом (менше секунди проти десятків секунд). Здобувачі освіти високо оцінили зручність і підтримку за нестабільного зв'язку та стресу; найвищі оцінки отримали багаторівневі підказки і GenAI-помічник. Вчителі й експерт підтвердили придатність для прифронтових умов, але вказали на головний ризик – надмірну довіру до GenAI, що може приховувати поверхове розуміння.*

Висновки. *Offline-first архітектура працює як базова інфраструктура навчання у прифронтовій школі, якщо оцінювання фіксує процес і перевірку, а не лише продукт. Використання GenAI є прийнятним за наявності правил прозорості, обов'язкової верифікації та мінімізації даних.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *offline-first; прогресивний вебзастосунок; інформатика; освіта в умовах надзвичайних ситуацій; формувальне оцінювання; валідність оцінювання; генеративний ШІ; прифронтова школа.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Turchyn D. Offline-First PWA with controlled generative AI support for teaching informatics in a near-frontline school. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 1. С. 32-36. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-05.

OFFLINE-FIRST PWA WITH CONTROLLED GENERATIVE AI SUPPORT FOR TEACHING INFORMATICS IN A NEAR-FRONTLINE SCHOOL

Dmytro TURCHYN ✉
Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, Ukraine
d.turchyn@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0009-0006-1570-3253

ABSTRACT

Formulation of the problem. *Near-frontline schooling faces a practical barrier that becomes methodological: learning continuity and assessment fairness are undermined when electricity and internet access are unstable, while generative AI can further weaken the validity of product-only grading in programming tasks. This study examines whether an offline-first learning design can preserve core learning actions and provide assessable evidence of work under disruption without normalizing unverified reliance on GenAI.*

Materials and methods. *The intervention was an offline-first Progressive Web App ("Edu Survival Kit") with local persistence and deferred synchronization, complemented by controlled GenAI tutoring and a process-oriented assessment approach based on artifact traces (versions, short reflections, and verification tests). The pilot involved three school cohorts (Grades 7, 10, and 11; 84 learners received access). Evidence included descriptive platform indicators, an anonymous learner survey (n = 33), teacher feedback (n = 2), and external expert appraisal (n = 1). Data were summarized descriptively and thematically.*

Results. *The offline-first design sustained learning during planned outage conditions and markedly reduced task access time compared to an LMS route in a micro-comparison (sub-second versus tens of seconds). Learners reported high perceived usability and strong perceived support under unstable connectivity and stress; the GenAI hint layer received the highest usefulness ratings. Teachers and the expert confirmed crisis-fit and innovativeness but emphasized the main risk: over-trust in GenAI, which can mask shallow understanding.*

Conclusion. *Offline-first architecture can function as instructional infrastructure in near-frontline settings when paired with an assessment that foregrounds process evidence rather than final products. GenAI support is pedagogically acceptable only under explicit transparency and verification rules and with data minimization.*

KEYWORDS: *offline-first; Progressive Web App; informatics education; education in emergencies; formative assessment; assessment validity; generative AI; near-frontline schooling.*

FOR CITATION: Turchyn, D. (2026). Offline-First PWA with controlled generative AI support for teaching informatics in a near-frontline school. *Physical and Mathematical Education*, *41*(1), 32-36. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-05.

INTRODUCTION

Educational systems operating under crisis conditions face a shift from "access problems" to "continuity problems." Even when learning remains formally available, unstable electricity and intermittent internet fragment participation, disrupt pacing, and make uniform assessment procedures inequitable. Equity concerns during remote learning were documented during the COVID-19 period, when the feasibility of continued learning depended on household resources and connectivity, rather than solely on policy intent (Avanesian et al., 2021; The World Bank et al., 2021). In near-frontline settings, these constraints recur and intensify: connectivity is not merely low-quality but structurally unpredictable.

Informatics education is disproportionately affected. Learning tasks often require repeated micro-cycles (attempt, run, debug, revise). If learners cannot reliably open materials, access tasks, or submit evidence of their work, instructional time is lost before the content becomes relevant. Assessment is also destabilized: under intermittent connectivity, the "time of submission" can measure infrastructure rather than competence, and a single outage can erase evidence of progress. Emergency assessment guidance has therefore emphasized fairness, flexibility, and the careful use of evidence rather than rigid event-based testing (Allehaiby, 2021; Bawane & Sharma, 2020).

A second disruption is unfolding in parallel. Generative AI systems can now generate code, explanations, tests, and alternative solutions. In informatics, this can widen access to help and reduce "stuckness," but it can also conceal shallow understanding and undermine the interpretability of product-only grading. Policy and governance documents increasingly stress that education must redesign tasks and assessment so that human reasoning, responsibility, and verification remain visible (Miao & Holmes, 2023; OECD, 2023, 2026; National Institute of Standards and Technology [NIST], 2023). In other words, the challenge is not simply whether GenAI is permitted, but whether assessment still measures what it claims to measure.

This paper presents a pilot study that integrates these two problem lines. We introduce an offline-first PWA for informatics learning ("Edu Survival Kit") coupled with a process-oriented assessment framework and a controlled GenAI support module. The aim is not to "solve connectivity" but to remove connectivity as a hidden prerequisite for basic learning actions, and to shift assessment from single-point product checks toward accumulated evidence of process and verification.

CONCEPTUAL AND RESEARCH BACKGROUND

Educational resilience under infrastructure instability

Education in emergencies frameworks treat resilience as more than reopening access. The INEE Minimum Standards emphasize safe learning environments, community engagement, adaptation of curricula and assessment, and accountability mechanisms that remain workable under disruption (Inter-Agency Network for Education in Emergencies, 2024). The empirical lesson from global disruptions is that "remote learning availability" does not guarantee participation; reachability depends on devices, connectivity, and household conditions (Avanesian et al., 2021). This creates a methodological implication: measurement and grading must avoid conflating competence with infrastructure.

System-level perspectives on digital transformation also warn that connectivity is only one component of a broader cost structure: energy, maintenance, security, support, and user training shape whether digital schooling remains usable (Sepúlveda, 2020). For near-frontline regions, the operational conclusion is pragmatic. Instructional design needs fallback modes that preserve the core learning action when the network disappears.

Offline-first as an instructional design principle

Offline-first originated in software engineering as a design priority: the application should remain functional without a network connection, with online features treated as enhancements rather than prerequisites (Kleppmann et al., 2019). In education, offline-first can be treated as a didactic principle: learning tasks should remain executable, progress should be locally preserved, and synchronization should be deferred until connectivity returns.

In web-based delivery, offline-first is implemented through PWA practices such as caching, service workers, and offline data management. Developer guidance describes the difference between a superficial offline mode (error messages) and a functional offline experience that preserves state and supports recovery after reconnecting (Google, 2014, 2021a, 2021b, 2022, 2024; Mozilla, 2024, 2025). From a pedagogical standpoint, the most relevant feature is not technical elegance but continuity: micro-cycles of learning can continue without being reset by network loss.

Assessment validity when the network and GenAI are unstable variables

The classic argument for formative assessment is that learning improves when teachers and learners use evidence to adjust instruction and strategies (Black & Wiliam, 1998). In emergency contexts, formative cycles also buffer disruption: smaller, frequent evidence points reduce the impact of any single failed assessment event (Bawane & Sharma, 2020). Long-term learning perspectives further underscore the need for assessment aligned with durable competence rather than short-lived performance (Boud & Falchikov, 2006).

In higher-stakes remote assessment, OECD highlighted those technical conditions can directly threaten fairness and validity, and that assessment design must anticipate these risks rather than treat them as noise (OECD, 2020). In informatics, GenAI expands this validity problem: if a correct solution can be cheaply produced, the evidential value of the product decreases. Current governance discussions, therefore, stress transparency of AI use, the ability to verify outputs, and institutional rules that manage risk without forcing unrealistic bans (Miao & Holmes, 2023; OECD, 2023, 2026; NIST, 2023). Professional ethics norms are consistent with this direction: the ACM Code of Ethics emphasizes honesty, avoidance of harm, fairness, and responsible design (Association for Computing Machinery, 2018).

GenAI in programming education: promise and risk

Recent empirical work suggests that learners' interaction with GenAI in programming can shape behavior patterns, including debugging strategies and reliance on generated solutions (Stoyanova, 2025; Sun, 2024). These findings do not imply that GenAI is pedagogically harmful by default, but they reinforce the need for design constraints: scaffolding should support reasoning and verification, and assessment should demand evidence that is difficult to outsource fully.

PURPOSE AND RESEARCH QUESTIONS

The purpose of the study was to theoretically justify and empirically pilot an integrated offline-first learning environment for informatics that includes controlled GenAI support and a process-oriented assessment framework, suitable for near-frontline infrastructure instability.

The study addressed three research questions:

(1) Does an offline-first PWA preserve continuity of learning actions under outages and unstable connectivity in a near-frontline school setting?

(2) How do learners, teachers, and an external expert appraise the usability, perceived learning support, and crisis-fit of the environment?

(3) What assessment and governance risks emerge when GenAI support is embedded, and what design constraints appear necessary?

RESEARCH METHODS

Design and setting

The pilot was conducted at a near-frontline Ukrainian secondary school (in the Shostka area), where outages and unstable internet repeatedly disrupt schooling. The study used a pragmatic, quasi-experimental, and descriptive mixed-evidence design, appropriate when randomization is not feasible, and the primary goal is to establish feasibility and stakeholder acceptability (Campbell & Stanley, 1963; Creswell & Creswell, 2018).

Participants

Three cohorts participated: Grade 7 (n = 30), Grade 10 (n = 28), and Grade 11 (n = 26), totaling 84 learners granted access. The broader teaching and evaluation group included two teachers and one external expert. An anonymous end-of-pilot learner survey was completed by 33 respondents (39.3% of those with access). The Grade 10 cohort comprised the majority of survey respondents, with smaller shares from Grades 7 and 11.

Intervention: "Edu Survival Kit" (offline-first PWA with controlled GenAI support)

The intervention was implemented as a PWA to prioritize local functionality. The offline core included access to tasks and materials, local persistence of progress and artifacts, and a learning flow structured into short cycles, each ending with a saved artifact. Online features were treated as add-ons: synchronization, teacher-facing monitoring, content updates, and AI services. This architecture follows standard PWA guidance emphasizing caching, service workers, offline data handling, and recovery after reconnecting (Google, 2014, 2021a, 2021b, 2022, 2024; Mozilla, 2024, 2025).

Deferred synchronization was used to separate "performed" from "uploaded." This distinction is essential for fairness: a learner who completes work offline should not be penalized for late synchronization due to connectivity issues (OECD, 2020). At the same time, data minimization principles were applied as a design requirement aligned with AI risk governance (NIST, 2023) and broader guidance on responsible GenAI use (Miao & Holmes, 2023).

The GenAI component was positioned as a tutor for explanation, diagnostic hints, test generation for self-checking, and brief reflection prompts. It was constrained by rules intended to preserve academic integrity: transparency of AI use, default verification via tests and artifact history, and avoidance of personal data sharing (Association for Computing Machinery, 2018; Miao & Holmes, 2023; NIST, 2023).

Process-oriented assessment framework

Assessment was designed around accumulated evidence rather than a single product. For each task, learners were expected to produce a minimal evidence package: a final artifact, at least one intermediate version or a short change history, small test cases demonstrating verification, and a concise explanation of decisions or error correction steps. The logic is consistent with formative assessment theory (Black & Wiliam, 1998), crisis assessment guidance (Allehaiby, 2021; Bawane & Sharma, 2020), and alignment with long-term learning (Boud & Falchikov, 2006). The framework also responds to GenAI-related validity threats by making process evidence central rather than optional (OECD, 2023, 2026; Miao & Holmes, 2023).

Data sources and analysis

Four evidence sources were used. First, descriptive platform indicators documented offline scenario functionality and access latency during a micro-comparison. Second, a learner survey used a five-point scale to capture perceived usability and support. Third, teacher feedback captured operational and pedagogical concerns. Fourth, an expert appraisal provided an external perspective on quality. Quantitative data were summarized descriptively. Qualitative open responses were thematically condensed with attention to credibility and consistency, following established principles for qualitative rigor (Patton, 1999).

RESEARCH RESULTS

Continuity and latency under unstable connectivity

Two objective observations were emphasized in the pilot. In a micro-comparison of task access, the conventional LMS-based route required approximately 40–60 seconds to reach tasks, whereas the offline-first solution provided access in under 1 second. In a near-frontline setting, this difference is pedagogically significant: it supports instructional pacing and reduces frustration before learners even engage with the content.

A second observation came from a planned outage lesson (a graded lesson on CSS Flexbox). The class continued work without connectivity, and progress was synchronized after the connection returned. This served as a functional test of offline-first continuity: learning actions did not collapse into "waiting for the internet," and assessment evidence persisted.

Learner perceptions

Learner survey responses indicated generally positive perceptions across usability, motivation, and crisis-fit. Interface clarity showed a mean of 3.94, with 72.7% selecting the top two categories (4–5). Perceived usefulness of multi-level hints and the AI assistant was particularly high, with a mean of 4.70, and all respondents selected 4 or 5. Gamification showed a mean of 4.00, again with 72.7% selecting 4–5. Reported comfort under unstable internet or stress conditions reached a mean of 4.73, with all respondents selecting 4 or 5. These results suggest that the intervention was not merely tolerable but experienced as supportive under conditions of disruption.

Open comments converged on three motifs. Learners valued the ability to work offline, described the environment as fast and practical, and occasionally noted instability or uneven quality in AI hints. The last motif is analytically important: it indicates that learners noticed non-determinism and that AI help is not automatically trusted as correct, which aligns with the need to institutionalize verification rather than assume it (Miao & Holmes, 2023; OECD, 2026).

Teacher feedback and expert appraisal

Teachers highlighted structured materials, monitoring of learning activity beyond mere logins, and the promise of GenAI for differentiated help. However, teachers also articulated a core pedagogical risk: AI hints may “switch off” independent reasoning if not constrained. They requested practical integration features, particularly a straightforward export of grades into spreadsheet formats, and tools to distinguish independent work from AI-generated text or solutions.

The external expert appraisal reported an overall average of around 4.15 (median 4, range 3–5). The highest ratings were assigned to near-frontline adaptability and innovativeness, while lower ratings were associated with technical aspects and scalability within routine school procedures. The central risk identified by the expert was over-trust in GenAI. The recommended condition for scaling was the presence of explicit transparency and verification rules, which aligns with governance guidance on GenAI in education and AI risk management (Miao & Holmes, 2023; NIST, 2023; OECD, 2026).

DISCUSSION OF THE RESULTS

The pilot supports a pragmatic claim: offline-first architecture can protect the integrity of the learning action itself. When tasks open immediately, and progress persists offline, the instructional unit shifts from “connected session” to “learning cycle,” which is more robust under outages. This is consistent with PWA design guidance that treats offline capability and state persistence as core quality criteria rather than optional enhancements (Google, 2024; Mozilla, 2025). In near-frontline conditions, offline-first becomes a didactic principle because it directly shapes what counts as feasible pedagogy: shorter cycles, persistent artifacts, and deferred synchronization.

This also ties to equity. When connectivity is uneven, online-first systems implicitly reward households and time windows with stable connectivity. By separating performance time from upload time, deferred synchronization reduces one pathway through which infrastructure becomes an unacknowledged grading factor. Such design choices address fairness concerns raised in emergency assessment guidance and in discussions of remote exam policy (Allehaiby, 2021; OECD, 2020).

The pilot underscores the declining evidential value of the final product alone. Both teachers and the expert treated “AI replacing thinking” as the primary risk. This risk is not mitigated by prohibition alone in settings where learners can access GenAI on personal devices and where teachers cannot continuously supervise all interactions. A more defensible strategy is to redesign assessment so that evidence of reasoning, testing, debugging, and revision is required.

Formative assessment theory provides a robust rationale for this shift: frequent evidence and feedback cycles strengthen learning and make competence more observable (Black & Wiliam, 1998). Long-term learning alignment further supports assessments that value transferable practices, such as testing and explanation, rather than short-term output production (Boud & Falchikov, 2006). GenAI governance guidance strengthens the argument in a new way: when AI can generate outputs, assessment must foreground human verification and responsibility (Miao & Holmes, 2023; OECD, 2026). The “minimal evidence package” used in this pilot offers a concrete operationalization that can be scaled and standardized.

Learners perceived AI-supported hints as highly helpful, especially under stress and when limited to synchronous teacher assistance. This finding aligns with the broader premise that GenAI can support learning when positioned as scaffolding rather than outsourcing. Yet the stakeholder warnings indicate that the tutor role requires guardrails: transparency, verification, and data minimization. These principles align with AI risk management frameworks (NIST, 2023), education-sector guidance (Miao & Holmes, 2023; OECD, 2023), and professional ethics commitments to honesty and avoidance of harm (Association for Computing Machinery, 2018). In informatics, verification is especially tractable because tests can be demanded as routine evidence, turning “trust” into “check.”

Teachers’ requests for grade export and differentiation between “real activity” and superficial engagement show that adoption depends on operational compatibility. UNESCO’s framing of digital learning as a public good emphasizes systems thinking: tools must integrate into everyday governance and accountability, not remain isolated pilots (UNESCO, 2023). The expert’s lower ratings for scalability suggest that the next iteration should strengthen teacher-facing workflows, reporting, and standard operating procedures for the review of assessment evidence.

LIMITATIONS

Three limitations shape interpretation. First, the learner survey covered 39.3% of those granted access, so perceptions may be biased toward more active or more satisfied participants. Second, the design included a micro-comparison and an offline control event but did not implement random assignment or a full controlled experimental structure; causal claims about learning gains cannot be made (Campbell & Stanley, 1963). Third, GenAI effects may vary by prior competence and by how learners use hints. Without fine-grained analysis of usage patterns and error profiles, the study can only describe feasibility and acceptability rather than differential effectiveness.

CONCLUSION

This pilot study examined an integrated response to two simultaneous disruptions in informatics education: infrastructure instability and the availability of generative AI. The offline-first PWA “Edu Survival Kit,” combined with a process-oriented assessment framework and controlled GenAI tutoring, demonstrated feasibility in a near-frontline school setting. Objective observations indicated that an offline-first design preserved continuity during outages and reduced access latency compared to an LMS-based route. Learners reported high comfort and high perceived usefulness of hints and GenAI support, while teachers and an external expert emphasized both the promise of differentiated assistance and the central risk of over-reliance on AI. The findings support a practical conclusion: resilience and assessment validity improve when an offline-first design is paired with evidence-based formative cycles, explicit verification artifacts, and governance rules that make GenAI use transparent and accountable. Future work should extend beyond feasibility to a stronger evaluation of learning outcomes and a systematic analysis of learner-AI interaction patterns.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no financial, personal, or other interests that could be considered a potential conflict of interest regarding the publication of this article.

FUNDING SOURCES

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

DATA AVAILABILITY

This is a theoretical study and does not involve the use of any additional datasets.

USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE (AI) TOOLS

AI tools were not used in the writing of this work.

REFERENCES

1. Allehaiby, W. H. (2021). Applying assessment principles during emergency remote teaching: Challenges and considerations. *Arab World English Journal, 12*(3), 447–461. https://doi.org/10.24093/awej/vol12no4.1
2. Association for Computing Machinery. (2018). *ACM Code of Ethics and Professional Conduct*.
3. Avanesian, G., Mizunoya, S., & Amaro, D. (2021). How many students could continue learning during COVID-19-caused school closures? Introducing a new reachability indicator for measuring equity of remote learning. *International Journal of Educational Development, 84*, 102421. https://doi.org/10.1016/j.ijedudev.2021.102421
4. Bawane, J., & Sharma, R. (2020). *Formative assessments and the continuity of learning during emergencies and crises: NEQMAP 2020 thematic review*. UNESCO Office Bangkok & Regional Bureau for Education in Asia and the Pacific; NEQMAP. URL: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000375239
5. Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5*(1), 7–74. https://doi.org/10.1080/0969595980050102
6. Boud, D., & Falchikov, N. (2006). Aligning assessment with long-term learning. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 31*(4), 399–413. https://doi.org/10.1080/02602930600679050
7. Campbell, D. T., & Stanley, J. C. (1963). *Experimental and quasi-experimental designs for research*. Houghton Mifflin.
8. Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (5th ed.). SAGE.
9. Google. (2014). Common techniques to build offline applications. *web.dev*. URL: https://web.dev/articles/offline-cookbook
10. Google. (2021a, December 3). Caching. *web.dev*. URL: https://web.dev/learn/pwa/caching
11. Google. (2021b, December 3). Service workers. *web.dev*. URL: https://web.dev/learn/pwa/service-workers
12. Google. (2022, January 10). Offline data. *web.dev*. URL: https://web.dev/learn/pwa/offline-data
13. Google. (2024). What makes a good Progressive Web App? (PWA checklist). *web.dev*. URL: https://web.dev/articles/pwa-checklist
14. Inter-Agency Network for Education in Emergencies. (2024). *INEE Minimum Standards (2024 ed.)*. INEE.
15. Kleppmann, M., Wiggins, A., van Hardenberg, P., & McGranaghan, M. (2019). Local-first software: You own your data, in spite of the cloud. *Proceedings of the ACM on Human-Computer Interaction, 3*(CSCW), Article 154. https://doi.org/10.1145/3359591.3359737
16. Miao, F., & Holmes, W. (2023). *Guidance for generative AI in education and research*. UNESCO. https://doi.org/10.54675/EWZM9535
17. Moodle. (2023, February 21). UNESCO and Moodle create mobile and offline course. *Moodle News*.
18. Mozilla. (2024, April 22). Background Synchronization API. *MDN Web Docs*. URL: https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Background_Synchronization_API
19. Mozilla. (2025, June 23). Offline and background operation. *MDN Web Docs*. URL: https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/Progressive_web_apps/Guides/Offline_and_background_operation
20. National Institute of Standards and Technology. (2023). *Artificial Intelligence Risk Management Framework (AI RMF 1.0) (NIST AI 100-1)*. U.S. Department of Commerce.
21. OECD. (2020). *Remote online exams in higher education during the COVID-19 crisis* (OECD Education Policy Perspectives, No. 6). OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/f53e2177-en
22. OECD. (2023). Emerging governance of generative AI in education. In *OECD Digital Education Outlook 2023: Towards an effective digital education ecosystem*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/c74f03de-en
23. OECD. (2026). *OECD Digital Education Outlook 2026: Exploring effective uses of generative AI in education*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/062a7394-en
24. Patton, M. Q. (1999). Enhancing the quality and credibility of qualitative analysis. *Health Services Research, 34*(5 Pt 2), 1189–1208.
25. Sepúlveda, A. (2020). *The digital transformation of education: Connecting schools, empowering learners*. Broadband Commission for Sustainable Development; ITU; UNESCO; UNICEF. URL: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000374309
26. Stoyanova, D. (2025). ChatGPT in programming education: An empirical study. *Education Sciences, 16*(1), 19. https://doi.org/10.3390/educsci16010019
27. Sun, D. (2024). Investigating students' programming behaviors and interaction with ChatGPT. *Humanities and Social Sciences Communications*. https://doi.org/10.1057/s41599-024-03991-6
28. The World Bank, UNESCO, & UNICEF. (2021). *The State of the Global Education Crisis: A Path to Recovery*. The World Bank; UNESCO; UNICEF.
29. UNESCO. (2023). *Gateways to Public Digital Learning: Making digital education a public good*. UNESCO.

| *Received: 29.11.2025* | *Accepted: 15.01.2026* | *Published: 02.03.2026* |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2026, 41(1), https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-06
УДК: 373.5.091.3:512

СИСТЕМА ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ: КРИТЕРІЇ СТВОРЕННЯ, ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Василь ШВЕЦЬ
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
kmmvm@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-2084-1336

Алла ПРУС ✉
Житомирський державний університет імені Івана Франка, Україна
pruswork@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8869-2544

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *У Державних стандартах базової середньої (Міністерство освіти та науки України [МОН], 2020) та профільної середньої освіти (МОН, 2024) до обов'язкових результатів навчання здобувачів освіти названо вимоги, що визначені на основі компетентнісного підходу. Це так звані ключові компетентності. Їх одинадцять. Однією з них є математична компетентність. Вимоги, як результат навчальної діяльності, мають виконуватись, досягатися під час навчання учнів кожній навчальній дисципліні, зокрема і математики також. Одним з ефективних засобів формування ключових компетентностей під час навчання учнів математики є прикладні задачі – задачі, які існують поза межами математики, але розв'язуються за допомогою математичних знань. Їх часто поділяють на реальні, ті, що існують в дійсності, і уявні (квазі прикладні,) ті, що можуть виникати, існують в уяві людей і які їм ймовірно згодом доведеться розв'язувати. Тому вони і включаються в шкільні підручники з математики, в навчальні посібники, збірники задач, дидактичні матеріали. Це особливі задачі, які відрізняються від суто математичних своїм цільовим призначенням, методами розв'язування, культурою математичного мовлення тощо. За допомогою них в учнів формуються уміння і навички математичного моделювання, обізнаність і здатність застосовувати отримані математичні знання в побуті, під час вивчення суміжних навчальних дисциплін, в оволодінні професійними знаннями, в продовження освіти. Кількома такими задачами сформувати задекларовані компетентності неможливо. Тому мають бути створені добірки систем прикладних задач, які б відповідали як змісту математичної підготовки, так і віковим можливостям та інтересам здобувачів освіти. Для створення системи прикладних задач необхідно мати критерії відбору кожної з них у систему (добірку). Саме цій проблемі і присвячена дана стаття. В ній запропоновано розроблені авторами систему критеріїв для створення добірок прикладних задач з математики як засобу формування ключових компетентностей учнів.*

Матеріали і методи. *Для створення критеріїв відбору прикладних задач з математики було використано теоретичні (аналіз нормативних документів, науковий статей, довідкової та навчальної літератури з теорії та методики навчання математики, синтез отриманих результатів, їх узагальнення) та емпіричні (опитування вчителів, ознайомлення з передовим досвідом навчання учнів математики, вивчення і аналіз учнівських контрольних робіт, виконання тестових завдань) методи дослідження.*

SYSTEM OF APPLIED MATHEMATICAL PROBLEMS: CRITERIA FOR DEVELOPMENT AND FEATURES OF SOLUTION

Vasyl SHVETS
Dragomanov Ukranian State University, Ukraine
kmmvm@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-2084-1336

Alla PRUS ✉
Zhytomyr Ivan Franko State University, Ukraine
pruswork@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8869-2544

ABSTRACT

Formulation of the problem. *The State Standards of Basic Secondary Education (Ministry of Education and Science of Ukraine [MES], 2020) and Specialized Secondary Education (MES, 2024) define mandatory learning outcomes for students based on a competence-based approach, namely, the key competences (eleven in total). One of them is mathematical competence. These requirements as learning outcomes must be achieved during the study of every school subject, including mathematics. One of the most effective means of forming key competences in mathematics lessons is applied problems—problems that exist beyond mathematics but are solved using mathematical knowledge. They are commonly classified into real problems, which exist in practice, and imaginary (quasi-applied) problems, which arise in people's imagination and may need to be solved in the future. Therefore, such problems are included in school mathematics textbooks, teaching aids, problem books, and didactic materials. These are special problems that differ from purely mathematical ones in their purpose, methods of solution, and the culture of mathematical communication. They help students develop skills in mathematical modelling, awareness, and the ability to apply mathematical knowledge in everyday life, in studying related subjects, and in acquiring professional knowledge in further education. A few isolated tasks cannot ensure the formation of the declared competences; therefore, systems of applied problems must be developed that correspond both to the content of mathematical training and to students' age-related abilities and interests. To design such systems, clear selection criteria are required. This article addresses this issue and proposes a set of criteria for developing sets of applied mathematical problems to foster students' key competences.*

Materials and methods. *To develop the criteria for selecting applied mathematical problems, theoretical methods (analysis of regulatory documents, scientific papers, reference and teaching literature on mathematics education; synthesis and generalization of results), and empirical methods (teacher surveys, study of best teaching practices, analysis of students' written work and test performance) were used.*

Results. *The outcome is a system of criteria for constructing sets of applied mathematical problems, along with methodological recommendations for their solution.*

Conclusions. *A system of applied mathematical problems is an effective means of forming key competencies among school students. Such problem sets should be an integral component of the task material in every topic of the school mathematics curriculum. Their solution makes a significant contribution to the development of students' key competences.*

Результати. *Результатом стала система критеріїв створення добірок прикладних задач з математики і методичні рекомендації щодо їх розв'язування.*

Висновки. *Одним з ефективних засобів формування у здобувачів шкільної освіти ключових компетентностей під час навчання математики є система прикладних задач. Добірки таких задач мають бути невід'ємною складовою частиною задачного матеріалу підручників з кожної навчальної програмної теми шкільного курсу математики. Їх розв'язування робить помітний внесок у формування в учнів ключових компетентностей.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стандарт освіти; ключові компетентності; прикладні задачі з математики; критерії створення системи задач, математичне моделювання; особливості розв'язування прикладних задач.

KEYWORDS: education standard; key competences; applied mathematical problems; criteria for designing problem systems; mathematical modelling; features of solving applied problems.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Швець В., Прус А. Система прикладних задач з математики: критерії створення, особливості розв'язування. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 1. С. 37-47. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-06.

FOR CITATION: Shvets, V., & Prus, A. (2026). System of applied mathematical problems: criteria for development and features of solution. *Physical and Mathematical Education*, *41*(1), 37-47. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-06.

ВСТУП

Постановка проблеми. Вимоги обох стандартів освіти (МОН, 2020) і (МОН, 2024) щодо *формування у школярів ключових компетентностей* під час навчання математики спонукають і науковців, і вчителів-практиків до пошуку ефективних засобів, методів, форм, технологій навчання для успішного формування визначених компетентностей. З такими вимогами українська шкільна освіта зіткнулася вперше, вони нові, а значного досвіду виконання ще не напрацьовано. Це вказує на *актуальність проблеми дослідження* та на *розробку методичного забезпечення* її вирішення. Названі вимоги стосуються всіх навчальних предметів, що вивчаються школярами, зокрема і математики також. Виникає цілком слушне запитання: «А що може привнести шкільний курс математики у виконання названого державного замовлення?». На наше глибоке переконання, математика володіє досить потужним потенціалом; як *засоби* – прикладні (доцільні і на застосування) задачі, навчальні проєкти, лабораторні та практичні роботи; як *методи навчання* – метод проєктів, метод навчання через розв'язування задач, евристичні бесіди, метод математичного моделювання; як *форми навчання* – бінарні чи інтегровані уроки, екскурсії тощо. Це далеко не весь перелік, ми його продовжувати не будемо.

Зосередимось детально на прикладних задачах з математики. Вони – особливі засоби. До них відносять задачі, які виникають за межами математики, але розв'язуються за допомогою знань з математики. Їх іноді поділяють на реальні (ті, що затребувані життям) і на уявні (квазіприкладні, ті, що ймовірно можуть виникати і до яких слід бути готовим розв'язувати). Не вдаючись в деталізацію, будемо всіх їх називати надалі прикладними. Сформувати ключові компетентності шляхом розв'язання кількох прикладних задач неможливо. Їх має бути не одна добірка, кожна з яких утворює *систему засобів*. Щоб створювати таку систему прикладних задач мають бути чітко визначені системоутворюючі критерії. Їх поки що немає. Саме цій проблемі – критерії створення системи прикладних задач з шкільного курсу математики і присвячене наше дослідження.

Аналіз актуальних досліджень. Слід зазначити, що глибокого і розлогого дослідження проблеми створення системи сучасних прикладних задач шкільного курсу математики ми в Україні не виявили. Але це не означає, що проблема прикладних задач не перебуває в полі зору дослідників з дидактики математики. В Україні, наприклад, окремі аспекти цієї проблематики активно розробляються в контексті оновлення змісту математичної освіти та впровадження компетентнісного підходу. Дослідники аналізують особливості навчання математики за новими програмами, акцентуючи увагу на практичній спрямованості та прикладному характері навчального матеріалу (Бурда & Васильєва, 2017). Значна увага приділяється формуванню в учнів умінь математичного моделювання як ключового механізму роботи з прикладними задачами (Катеринюк, 2020; Матяш, 2019; Прус 2023, 2024). У працях останніх років математичне моделювання розглядається як «лінза» пізнання реального світу та як перспективний напрям розвитку математичної освіти. Також досліджується методична діяльність із компетентнісними задачами у підготовці майбутніх учителів математики (Тарасенкова & Акуленко, 2025). Окремі напрацювання присвячені прикладним задачам природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу (Соколенко та ін., 2010). Водночас ці дослідження мають фрагментарний характер і не утворюють цілісної, системно обґрунтованої моделі сучасної системи прикладних задач шкільного курсу математики. У зарубіжних працях проблематика прикладних задач та математичного моделювання має значно довшу історію системних досліджень. Ретроспективний огляд розвитку цього напряму (Houston et al., 2009; Frejd & Vos, 2023) засвідчує, що вже понад п'ятдесят років світова спільнота дослідників активно працює над теоретичним обґрунтуванням та практичною реалізацією математичного моделювання в освіті. Зокрема, діяльність міжнародної групи ICTMA (International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications) протягом останніх 25 п'яти років суттєво вплинула на формування сучасних підходів до навчання через прикладні задачі. Теоретичні основи використання прикладних задач у навчанні математики закладені в класичних працях Вернера Блума (Blum, 1993), який обґрунтував необхідність математичного моделювання як невід'ємної складової математичної освіти. Подальший розвиток цих ідей знаходимо в роботах, що досліджують можливості навчання моделюванню (Blum & Borromeo Ferri, 2009) та його впровадження в шкільну практику (Borromeo Ferri, 2020). Важливим є висновок дослідників про те, що вміння математичного моделювання не лише може, але й повинно цілеспрямовано формуватися в учнів. Аналіз зарубіжної літератури виявляє множинність перспектив дослідження математичного моделювання та прикладних задач. Систематизація підходів (Abassian et al., 2020; Galbraith, 2012; Blomhøj, 2009; Kaiser et al., 2007) дозволяє виокремити кілька ключових напрямів: реалістичний (орієнтований на автентичні проблеми реального світу), освітній (зосереджений на навчальних цілях), контекстуальний (що враховує соціокультурні особливості) та когнітивний (спрямований на розвиток мисленнєвих процесів). Ця багатоперспективність свідчить про складність та багатогранність проблеми створення системи прикладних задач. Особлива увага в зарубіжних дослідженнях приділяється питанню автентичності прикладних задач. Кайзер та Шварц (Kaiser & Schwarz, 2010) наголошують на необхідності використання справжніх модельних проблем, які відображають реальні ситуації та потребують справжнього математичного аналізу. Водночас критичний аналіз текстових задач у шкільних підручниках (Depaere et al., 2009) демонструє, що значна частина так званих "прикладних" задач має штучний, псевдореалістичний характер і не забезпечує справжнього зв'язку математики з реальністю. Концептуальне значення для розуміння сутності роботи з прикладними задачами має дослідження модельної перспективи навчання математики (Lesh & Doerr, 2003), яка розглядає моделювання не просто як застосування математики, а як фундаментальний спосіб математичного мислення. У цьому контексті важливим є визначення компетентностей математичного моделювання (Maaβ, 2006), що включають здатність розуміти реальні проблеми, структурувати їх, математизувати, працювати з математичними моделями, інтерпретувати результати. Соціокультурний вимір проблеми прикладних задач розкривається в дослідженнях, що розглядають математичне моделювання як інструмент критичного осмислення соціальних питань (Barbosa, 2006; Julie & Mudaly, 2007). Особливо важливим є досвід використання прикладних задач для аналізу соціальних проблем у південноафриканській освіті, що демонструє потенціал математики як засобу формування громадянської позиції учнів. Дидактичний аспект впровадження прикладних задач у навчальний процес ґрунтовно досліджено в контексті підготовки вчителів (Borromeo Ferri, 2018). Підкреслюється, що ефективне використання системи прикладних задач вимагає від учителів не лише глибоких математичних знань, але й розуміння процесів моделювання, здатності керувати навчальною діяльністю учнів у відкритих проблемних ситуаціях. Також наголошується на необхідності зв'язку шкільної математики з позашкільною реальністю через математичне моделювання (García et al., 2006). Ретроспективний огляд досліджень (Kutluca & Kaya, 2023; Burkhardt & Pollak, 2006) свідчить про еволюцію підходів до математичного моделювання в освіті: від епізодичного використання окремих прикладних задач до системного впровадження моделювання як наскрізної лінії курсу математики. Аналіз результатів досліджень у середній школі (Stillman, 2012) демонструє позитивний вплив систематичної роботи з прикладними задачами на розвиток математичного мислення учнів та їхню мотивацію до вивчення предмета.

Таким чином, зарубіжні дослідження формують потужну теоретичну та методичну базу для розробки системи прикладних задач. Кожен дослідник обрав для себе певний предмет дослідження, ми ж зосередили свою увагу на розробці критеріїв створення саме системи прикладних задач як засобу формування ключових компетентностей під час навчання учнів шкільного курсу математики. Цим і визначається новизна та актуальність нашого дослідження.

Мета статті. Запропонувати критерії створення системи сучасних прикладних задач з шкільного курсу математики для формування в учнів ключових компетентностей, що визначені в стандартах базової середньої та профільної середньої освіти.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У дослідженні використано низку методів наукового пізнання: – *теоретичні* – аналіз нормативних документів, довідкової, навчальної та наукової літератури з теорії та методики навчання математики, синтез отриманих відомостей, їх узагальнення; – *емпіричні* – опитування вчителів, ознайомлення з передовим досвідом навчання учнів математики, анкетування учнів.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Насамперед визначимось із змістом окремих термінів, які будемо вживати надалі. Найперший з них – *критерій*. Під терміном критерій ми розуміємо підставу для оцінки, для визначення або для класифікації певних об’єктів (у даному випадку прикладних задач). Таким чином критерій – це мірило, мірка якою визначається можливість включення прикладної задачі до системи (до добірки). Добираючи прикладні задачі до системи (добірки) важливо враховувати їх можливості, їх відповідність завданням формування ключових компетентностей. Таку відповідність ми назвали *валідністю*, виходячи з того, що під цим терміном розуміють міру того, наскільки дослідницький інструмент або висновок (в даному випадку прикладна задача) є необхідною та відповідає реальному явищу чи поставленій меті. Існують різні види валідності: статистична, змістовна, змістова, критеріальна, конструктивна та інші. У нашому випадку мова йде про *змістовну валідність* – відповідність змісту завдань (прикладних задач) поставленим цілям (вимогам) навчання математики. Виходячи з таких посилань, нами були розроблені наступні системоутворюючі критерії добірки прикладних задач з математики (дивись таблицю 1).

Таблиця 1. Критерії створення добірок прикладних задач до навчальної теми з математики

№	*Зміст критерію відбору прикладної задачі в систему (добірку)*	*Вид валідності*	*Ваговий коефіцієнт*	*Обґрунтування*
1	Задача має відповідати віковим потребам та інтересам учнів (молодший підліток, старший підліток чи юнацький вік)	потребнісна	0,06	Важливий — забезпечує психологічну готовність до навчання та формування стійкої внутрішньої мотивації.
2	Задача має відповідати віковим можливостям учнів, розвитку їх уяви, інтелектуальним можливостям, рівню мислення (наочно-предметне, наочно-образне чи теоретичне)	інтелектуальна	0,1	Значущий — забезпечує доступність матеріалу та когнітивний розвиток відповідно до зони найближчого розвитку учня.

№	*Зміст критерію відбору прикладної задачі в систему (добірку)*	*Вид валідності*	*Ваговий коефіцієнт*	*Обґрунтування*
3	Сюжет задачі має бути життєво важливим для учня, сприяти його загальному розвитку, відображати реалії життя в яких він перебуває	соціальна	0,2	Пріоритетний — без прямого зв'язку з досвідом учня задача втрачає свій прикладний сенс та виховний потенціал.
4	Задача має формулюватись діловою мовою, лаконічно, містити зрозумілі терміни, які легко пояснити чи знайти в довіднику	змістова	0,03	Технічний — визначає якість сприйняття умови та мінімізує сторонні перешкоди при побудові математичної моделі.
5	Задача має відповідати змісту навчальної теми з математики що вивчається, щоб отримані учнями знання використовувались під час розв'язування, під час застосування методу математичного моделювання чи виконання практико-орієнтованих завдань	освітня	0,15	Важливий — демонструє практичну цінність теоретичних знань та забезпечує цілісність процесу навчання.
6	Система задач має бути диференційовно реалізовною, різного рівня складності і разом з тим показувати важливість математичних знань для здобування знань з інших навчальних предметів	міжпредметна	0,08	Системний — підкреслює універсальність математичного апарату як інструменту для вивчення інших наук.
7	Задачі, що включені до добірки, мають служити і тренажером вироблення вмінь та навичок, і засобом контролю результатів навчання математики. Передбачати індивідуальну, групову чи колективну форму роботи щодо їх розв'язування	дидактична	0,12	Методичний — дозволяє ефективно інтегрувати задачі в структуру уроку та здійснювати моніторинг досягнень.
8	Задачі мають описувати реальні ситуації (дійсні чи ймовірно віртуальні), містити реальні числові показники, числові значення величин	реалістична	0,2	Пріоритетний — верифіковані дані формують довіру до предмета та запобігають відірваності математики від життя.
9	У добірку слід включати задачі пов'язані з історією математики, з діяльності її творців. Їх розв'язування має показувати учням що математика це пласт загально-людської культури, з яким має бути ознайомлена освітня людина	культурна	0,02	Допоміжний — сприяє гуманітаризації освіти та формуванню загальнокультурної компетентності особистості.
10	Кожна тематична добірка задач має забезпечувати наступність у формуванні ключових компетентностей, методу математичного моделювання, розвивати змістові лінії курсу математики	конструктивна	0,04	Фундаментальний — забезпечує цілісну логіку розвитку мислення та системність математичної підготовки

Джерело: авторська розробка.

Ми назвали найважливіші, на наш погляд, критерії, щоб створені на їх основі прикладні задачі давали змогу виконувати вимоги державного освітнього стандарту. У шкільних програмах з математики виокремлено багато навчальних тем. Саме для створення системи (добірок) прикладних задач до них і рекомендовані розроблені критерії. Зауважимо, що виходячи з навчального матеріалу теми відповідна добірка може бути створена із урахуванням лише окремих критеріїв. Важливо, щоб вони враховувались, по можливості, всі, а така добірка була *кульмінаційним засобом* застосування отриманих знань на практиці. Проілюструємо застосування критеріїв на прикладі вивчення окремих тем курсу стереометрії.

Добірка задач математичного моделювання (прикладних задач) до теми «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» старшої профільної школи

<u>Задача 1</u> (про сховище під час повітряної тривоги).

Під час повітряної тривоги Ви з однокласниками перебуваєте в підвальному сховищі розміром 8 м × 6 м × 3 м. У сховищі є вентиляційна труба круглого перерізу діаметром 15 см, через яку повітря надходить зі швидкістю 0,1 м/с.

Завдання.

1. За який час через вентиляційну трубу повністю оновиться все повітря в сховищі?
2. Чи достатня така вентиляція для комфортного перебування у такому сховищі 30 осіб?

Практична інформація. Якість вентиляції критично важлива для безпеки людей у сховищі. Недостатня вентиляція може призвести до накопичення вуглекислого газу та зниження вмісту кисню, що небезпечно для здоров'я. На практиці можна наближено визначити швидкість руху повітря через вентилятор таким чином. Підносять до отвору вентилятора запалену свічку: якщо полум'я ледве відхиляється, то швидкість буде приблизно $20\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$; якщо відхиляється від вертикального напряму на $45°$, то швидкість дорівнює $45\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$; якщо лягає горизонтально, то швидкість буде $80\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$; якщо сильно тріщить – $130\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$; якщо гасне, то швидкість $180\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$ і більше.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу соціальну валідність (критерій 3) – відображає реалії життя в умовах війни, є життєво важливою для учнів. Реалістична валідність (критерій 8) забезпечена реальними числовими показниками та практичними методами вимірювання. Задача формує потребнісну валідність (критерій 1), оскільки безпосередньо пов'язана з досвідом підлітків під час повітряних тривог. Освітня валідність (критерій 5) реалізується через застосування формул об'єму прямокутного паралелепіпеда, площі круга та роботу з одиницями вимірювання.

<u>Задача 2</u> (про розрахунок площі поверхні тіла для медичних потреб).

У медицині для правильного дозування ліків (особливо під час хіміотерапії або інтенсивної терапії) лікарям потрібно знати площу поверхні тіла пацієнта. Відомо, що для дорослої людини масою 65 кг площа поверхні тіла становить у середньому 2 м².

Завдання.

Яка площа поверхні тіла у вашого однокласника, якщо його маса становить 50 кг?

Підказка. Маса тіла людини приблизно пропорційна об'єму тіла (тобто кубу лінійних розмірів), а площа поверхні – квадрату лінійних розмірів.

***Практична інформація*.** Цей розрахунок важливий не лише в медицині. Спортивні тренери використовують співвідношення маси до площі поверхні тіла для складання індивідуальних програм тренувань та харчування.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача демонструє міжпредметну валідність (критерій 6) – зв'язок математики з біологією та медициною. Інтелектуальна валідність (критерій 2) виявляється у необхідності встановити пропорційні залежності між площею, об'ємом та лінійними розмірами. Задача має практичну значущість і показує застосування математичного моделювання у медичній практиці.

<u>Задача 3</u> (про розпалювання вогнища).

Ви з друзями вирішили влаштувати пікнік на природі та розпалити багаття. У вас є поліно діаметром 15 см та довжиною 40 см, а також кілька тонких скіпок, відколотих від цього самого поліна.

Завдання.

1. Чому тонкі скіпки загоряються набагато швидше, ніж ціле поліно, від якого вони відколоті?
2. Обчисліть приблизну площу поверхні цілого поліна та порівняйте, як зміниться загальна площа поверхні, якщо поліно розколоти на 8 однакових скіпок?
3. Чому збільшення площі поверхні прискорює горіння?

Підказка. Так як нагрівання відбувається з поверхні і поширюється на весь об'єм тіла, то потрібно порівняти поверхню та об'єм скіпи, наприклад, квадратного перерізу, з поверхнею та об'ємом поліна тієї ж довжини і теж квадратного перерізу, щоб визначити, якої величини поверхня приходиться на кожен кубічний сантиметр деревини в обох випадках. Якщо товщина поліна в 10 разів більша товщини скипи, то бічна поверхня поліна більша поверхні скипи теж в 10 разів, а об'єм його більший об'єму скипи в 100 разів. Отже, на кожну одиницю поверхні в скипи приходиться вдесятеро менший об'єм, чим у поліні: однакова кількість тепла нагріває у скипи в десятеро менше речовини, - звідси і більш швидке запалення скипи, ніж поліна від одного й того ж джерела тепла. (Внаслідок поганої теплопровідності дерева, вказані відношення слід розглядати лише як приблизні, що характеризують загальний хід процесу. А не кількісну сторону).

***Практична інформація*.** Це знання допомагає не лише в розпалюванні багаття, а й у розумінні правил пожежної безпеки (чому тирса або стружка загоряються миттєво), у кулінарії (чому дрібно нарізані продукти готуються швидше) та в промисловості (подрібнення матеріалів для прискорення хімічних реакцій).

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу потребнісну валідність (критерій 1) – пов'язана з активним дозвіллям підлітків. Соціальна валідність (критерій 3) виявляється у практичному застосуванні знань у повсякденному житті. Задача формує розуміння співвідношення між площею поверхні та об'ємом, демонструє міжпредметні зв'язки (критерій 6) з фізикою (теплопередача), хімією (швидкість реакції горіння) та основами безпеки життєдіяльності.

<u>Задача 4</u> (про стійкість стебел папірусу).

Під час уроку біології ви вивчали рослини Стародавнього Єгипту. Папірус, з якого єгиптяни виготовляли папір для письма, має тригранне стебло висотою до 4,5 м.

Завдання.

1. Чому природа "обрала" саме тригранну форму для такого високого стебла?
2. Обчисліть площу поперечного перерізу тригранного стебла папірусу, якщо сторона трикутника дорівнює 3 см.
3. Обчисліть площу поперечного перерізу круглого стебла того ж периметру.
4. Порівняйте, яка форма забезпечує більшу площу перерізу (а отже, міцність) при однаковій кількості матеріалу.
5. Поясніть, чому тригранна форма вигідніша для високої рослини з точки зору стійкості до вітру.

***Історична довідка*.** Папірус використовувався в Єгипті понад 3000 років. Стебла розрізали на смужки, викладали перпендикулярно один до одного та пресували – так виходив аркуш для письма.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має культурну валідність (критерій 9) – пов'язує математику з історією та біологією. Міжпредметна валідність (критерій 6) виражена у зв'язку з біологією, історією та фізикою (механіка, оптимізація конструкцій). Задача демонструє, що математика – це інструмент для розуміння законів природи та їх застосування людиною.

<u>Задача 5</u> (про «геометрію кропиви» у вашому дворі).

Ви помітили, що на городі біля вашого будинку росте кропива дводомна з чотиригранним стеблом висотою 120 см. Ваша бабуся розповіла, що з кропиви можна зробити міцну тканину, а чотиригранна форма стебла не випадкова. Виміряйте (або уявіть) стебло кропиви з довжиною сторони квадрата в перерізі 0,8 см.

***Завдання*.**

1. Обчисліть площу його поперечного перерізу.
2. Обчисліть площу поперечного перерізу круглого стебла з таким самим периметром.
3. Визначте, на скільки відсотків чотиригранне стебло міцніше круглого при однаковій витраті матеріалу.
4. Дослідіть, чому чотиригранна форма краще протистоїть вигинанню, ніж кругла?

***Практична інформація*.** У будівництві та інженерії часто використовують балки квадратного або прямокутного перерізу замість круглих – це забезпечує кращу жорсткість конструкції. Природа "винайшла" це на мільйони років раніше за людину!

Екологічна довідка. Кропива – цінна рослина. Вона збагачує ґрунт азотом, її листя використовують як добриво, а молоді пагони їстівні та багаті на вітаміни.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу соціальну валідність (критерій 3) – використовує об'єкт з безпосереднього оточення учня (город біля будинку, бабусині розповіді). Міжпредметна валідність (критерій 6) виявляється у зв'язку з біологією, екологією та інженерією. Задача формує дослідницькі компетентності та демонструє біонічний підхід – вивчення природних рішень для технічних застосувань.

<u>Задача 6</u> (про оптимізацію виробництва ефірної олії з м'яти).

Уявіть, що Ваша родина вирішила створити невелике фермерське господарство з вирощування м'яти холодної для виробництва ефірної олії. М'ята холодна – багаторічна рослина з чотиригранним стеблом висотою 25-80 см. Для бізнес-плану потрібно розрахувати оптимальні параметри.

***Завдання*.**

1. Стебло м'яти має форму правильної чотиригранної призми. Обчисліть при висоті 60 см та довжині сторони основи 0,6 см: об'єм одного стебла; площу бічної поверхні стебла (з якої виділяється ефірна олія).

2. Зазвичай на 1 $м^2$ висаджують 16 рослин м'яти, кожна з яких дає в середньому 8 стебел. Обчисліть загальну площу бічної поверхні всіх стебел з 1 $м^2$ плантації.

3. Відомо, що з 1 $см^2$ поверхні стебла можна отримати 0,002 мл ефірної олії. Скільки літрів олії можна отримати з плантації площею 1 гектар?

4. Ринкова ціна ефірної олії м'яти становить близько 800 грн за 100 мл. Розрахуйте потенційний дохід з 1 гектара.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу соціальну валідність (критерій 3) – пов'язана з актуальною темою розвитку власного бізнесу та підприємництва. Реалістична валідність (критерій 8) забезпечена реальними економічними показниками та технологічними параметрами. Задача формує фінансову грамотність та демонструє практичне застосування математики у сільському господарстві й економіці. Конструктивна валідність (критерій 10) виявляється у поетапному ускладненні розрахунків – від одиничного об'єкта до масштабування на площу плантації та економічного аналізу.

<u>Задача 7</u> (про «карпатську аптеку»).

Уявіть, що Ви берете участь у шкільній еко-експедиції в Карпати та досліджуєте лікарські рослини. Пухівка широколиста – цінна лікарська рослина з тригранним стеблом довжиною до 17 см, яку місцеві жителі використовують для лікування простуди та загоєння ран.

***Завдання*.**

1. Стебло пухівки має форму правильної тригранної призми. При довжині 15 см та довжині сторони основи (правильного трикутника) 0,4 см визначте: об'єм стебла; повну поверхню стебла; радіус описаного кола навколо основи

2. Для приготування лікувального настою потрібно 50 г подрібненої пухівки. Густина сухої рослини становить 0,3 $г/см^3$. Скільки стебел потрібно зібрати для одного курсу лікування (10 порцій настою)?

3. Дослідіть: чому тригранна форма стебла оптимальна для невисокої рослини з точки зору механічної міцності?

***Екологічна довідка*.** Пухівка занесена до списку рослин, що потребують раціонального використання. При зборі можна зривати не більше 30% рослин на ділянці.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача поєднує соціальну валідність (критерій 3) – екологічне виховання та збереження природи – з культурною валідністю через традиційні знання про лікарські рослини. Міжпредметна валідність (критерій 6) виражена у зв'язку з біологією, екологією, хімією та народознавством. Задача формує екологічну свідомість та відповідальне ставлення до використання природних ресурсів.

<u>Задача 8</u> (інженерія природи – конструкція стебла хмелю).

Уявіть, що Ви працюєте над проєктом з біоніки (використання природних принципів у техніці) та досліджуєте хміль звичайний. Ця рослина має унікальні шестигранні порожнисті стебла довжиною до 18 м, здатні витримувати власну вагу та вагу шишок.

Завдання.

1. Стебло хмелю – порожниста шестигранна призма. Зовнішня сторона правильного шестикутника основи становить 1,2 см, товщина стінки – 0,15 см. При довжині стебла 12 м обчисліть: об'єм матеріалу стінок стебла; об'єм порожнини всередині; масу стебла, якщо густина матеріалу 0,4 $г/см^3$.

2. Порівняйте міцність конструкції: яка форма (шестигранна порожниста чи кругла суцільна) при однаковій масі матеріалу витримає більше навантаження на вигин?

3. Стебло хмелю росте вертикально, обвиваючи опору. Якщо воно робить один повний оберт навколо опори діаметром 5 см на кожні 30 см висоти, яка реальна довжина стебла, що досягло висоти 10 м?

4. На одному стеблі розвивається до 500 шишок масою по 0,8 г кожна. Розрахуйте, чи витримає стебло таке навантаження, якщо максимально допустиме напруження на розтяг становить 2 МПа?

***Практична інформація*.** У будівництві використовують порожнисті шестигранні металеві профілі – вони на 40% легші за суцільні при збереженні міцності. Природа винайшла цей принцип мільйони років тому!

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має найвищу складність у добірці і демонструє дидактичну валідність (критерій 7) – може використовуватись для диференціації за рівнями. Міжпредметна валідність (критерій 6) виявляється у зв'язку з фізикою (механіка, міцність матеріалів), біологією та інженерією. Задача формує біонічне мислення – розуміння того, як природні рішення можна застосовувати у техніці. Інтелектуальна валідність** (критерій 2) вимагає просторової уяви та комплексних обчислень.

<u>Задача 9</u> (про цистерну з пальним).

На автозаправній станції встановлено горизонтальну підземну цистерну для зберігання пального. З міркувань безпеки її майже повністю закопали в землю, залишивши лише верхню частину над поверхнею. Поверхня ґрунту навколо цистерни — горизонтальна. Екологічна інспекція проводить перевірку. За нормами безпеки не менше 85 % об’єму цистерни повинно бути під землею (щоб зменшити ризик вибуху, перегріву та витоку пального). Якщо виявиться, що під землею менше 85 % об’єму, власнику загрожує штраф від 120 000 до 300 000 грн, або він повинен буде перемістити цистерну, що коштуватиме 450 000 грн. Відомо, що цистерна має форму прямого кругового циліндра радіусом 1,2 м і довжиною 6 м. Над поверхнею землі виступає 0,4 м від найвищої точки циліндра.

Завдання.

1. Обчисліть об’єм частини цистерни, що знаходиться під землею., та визначте, який це відсоток від повного об’єму.
2. З’ясуйте, чи загрожують власнику штрафні санкції.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу реалістичну валідність (критерій 8) – описує реальну ситуацію з конкретними нормативами та економічними наслідками. Соціальна валідність (критерій 3) виявляється у темі екологічної безпеки та відповідальності бізнесу. Задача формує розуміння практичного застосування математики у контролюючих органах та знайомить з професією інспектора. Змістова валідність (критерій 4) забезпечена чіткою діловою мовою та зрозумілими термінами.

<u>Задача 10</u> (моделювання автоматизованої вертикальної ферми).

Стартап з вирощування мікрозелені в урбаністичних умовах розробляє модульну систему для вертикального фермерства. Кожен модуль має форму зрізаного конуса для оптимального розподілу поживних речовин та води. Технічні характеристики модуля: 1) площа основи: 113 см²; 2) висота модуля: 20 см; 3) довжина по твірній: 20,5 см. Компанія планує запустити пілотну лінію з 10 модулів. За даними агрономічних досліджень, коренева система мікрозелені займає 40% об'єму контейнера, решта — субстрат (кокосове волокно з вермікулітом).

Завдання.

1. Розрахуйте масу субстрату, необхідного для заповнення всіх модулів, якщо густина субстрату становить 1,5 г/см³.
2. Оцініть собівартість субстрату, якщо 1 кг коштує 45 грн.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу соціальну валідність (критерій 3) – пов'язана з актуальними темами урбанізації, продовольчої безпеки та стартап-культури. Реалістична валідність (критерій 8) забезпечена реальними технічними параметрами інноваційних агротехнологій. Задача знайомить учнів з сучасними професіями у сфері агротехнологій та формує підприємницьке мислення.

<u>Задача 11</u> (як клітини нашого тіла можуть дихати).

Червоні кров'яні тільця (еритроцити) переносять кисень по всьому організму. Цікаво, що вони поглинають кисень лише через свою поверхню. Тому природа "спроектувала" їх особливим чином. Фізіологи стверджують, що загальна поверхня всіх еритроцитів у крові дорослої людини становить 3200 м² (це майже половина футбольного поля!)

Завдання.

1. Перевірте твердження фізіологів.
2. Поясніть, чому еритроцити мають саме таку форму. Порівняйте площу поверхні диска з площею кулі того ж об'єму. Яка форма ефективніша для транспортування кисню?
3. При анемії кількість еритроцитів може знижуватися до 3 000 000 (на1 мм³). На скільки відсотків зменшується загальна поверхня для поглинання кисню?

Медико-біологічна довідка. У 1 мм³ крові людини міститься приблизно 5 000 000 еритроцитів. Загальний об'єм крові людини ≈ 5 л. Кожен еритроцит має форму диска (як гральна шашка) з діаметром 0,007 мм та висотою 0,002 мм.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу міжпредметну валідність (критерій 6) – інтегрує математику з біологією та медициною. Інтелектуальна валідність (критерій 2) виявляється у необхідності працювати з надзвичайно малими величинами та великими числами одночасно. Задача демонструє оптимізаційний підхід природи – як форма об'єкта визначає його функціональність. Потребнісна валідність (критерій 1) пов'язана з інтересом підлітків до власного організму та здоров'я.

<u>Задача 12</u> (про Архімеда та золоту корону).

Царю Гієрону II Сіракузькому ювелір виготовив золоту корону вагою 1000 г. Цар запідозрив майстра в обмані – що той додав до золота срібло. Він звернувся до Архімеда з проханням перевірити, чи справді корона зроблена з чистого золота, але при цьому не пошкодити корону. Архімед знайшов геніальне рішення! Він занурив корону у посудину, повністю наповнену водою, і виміряв об'єм витісненої води – вийшло 52 см³. Потім він провів той самий експеримент зі зливком чистого золота масою 1000 г і отримав 51,8 см³ витісненої води.

Завдання.

1. Обчисліть густину матеріалу корони та порівняйте її з густиною чистого золота (19,3 г/см³).
2. Визначте, чи обманув ювелір царя.
3. Якщо в короні є домішка срібла (густина 10,5 г/см³), обчисліть приблизно, скільки грамів золота та срібла у короні.
4. Поясніть, чому метод Архімеда був геніальним для свого часу.

Історична довідка. За легендою, Архімед (287–212 до н.е.) відкрив свій закон про виштовхувальну силу під час купання у ванні. Усвідомивши принцип виміру об'єму через витіснення води, він вискочив на вулицю з криком "Еврика!" ("Знайшов!"). Архімед був одним з найвидатніших математиків і механіків античності. Його праці заклали основи гідростатики, а винаходи (гвинт Архімеда, системи важелів, метальні машини) використовувались століттями. Під час облоги Сіракуз римлянами Архімед сконструював катапульти та систему дзеркал для спалення ворожих кораблів. Він загинув у 212 році до н.е., коли римський солдат убив його, незважаючи на наказ полководця Марцелла зберегти життя вченому.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має культурну валідність (критерій 9) – розповідає про історію математики та її творців, показує математику як частину загальнолюдської культури. Міжпредметна валідність (критерій 6) виявляється у зв'язку з фізикою (закон Архімеда, густина), хімією (властивості металів).

<u>Задача 13</u> (про екологічну упаковку та економію матеріалів).

Ваша родина вирішила відкрити невелике виробництво домашнього меду. Для продажу меду потрібно обрати оптимальну форму скляної банки місткістю 500 мл (500 см³). Виробники пропонують три варіанти банок циліндричної форми з однаковим об'ємом, але різними пропорціями. Варіант А: висока і вузька (висота 15 см, радіус основи 3,26 см). Варіант Б: середня (висота 10 см, радіус основи 3,99 см). Варіант В: низька і широка (висота 6 см, радіус основи 5,15 см). Вартість виготовлення банки залежить від площі скла, необхідного для її виробництва. Ціна 1см² скла становить 0,08 грн. Ви плануєте продавати 1000 банок меду на рік.

***Завдання*.**

1. Обчисліть площу поверхні кожного варіанта банки.
2. Визначте, який варіант найекономічніший з точки зору витрат матеріалу.
3. Розрахуйте, скільки грошей можна зекономити за рік, обравши найоптимальнішу форму замість найменш вигідної.
4. Поясніть, чому при однаковому об'ємі різні пропорції циліндра мають різну площу поверхні. Яке співвідношення висоти до діаметра дає мінімальну площу поверхні?
5. Дослідіть: чи є банка у формі куба з таким самим об'ємом більш економічною за циліндричну? Обчисліть площу поверхні куба об'ємом 500 см³ та порівняйте з циліндрами.

Практична інформація. У промисловості задачі мінімізації витрат матеріалу при заданому об'ємі є надзвичайно важливими. Наприклад, виробники напоїв постійно оптимізують форму пляшок та банок – економія навіть 1% матеріалу на мільйонах одиниць продукції дає величезний ефект. Це не лише зменшує собівартість, а й знижує екологічне навантаження – менше скла чи пластику потрібно виробити та утилізувати.

***Екологічна довідка*.** Виробництво 1 кг скла вимагає 1,8 кг піску, 0,27 кг соди та 0,36 кг вапняка, а також великої кількості енергії (температура плавлення скла – 1400-1600°C). Оптимізація форми упаковки допомагає зменшити споживання ресурсів та викиди CO_2. Саме тому математики працюють разом з дизайнерами упаковки в усіх великих компаніях.

КОМЕНТАР ЩОДО КРИТЕРІЇВ. Задача має високу соціальну валідність (критерій 3) – пов'язана з актуальною темою підприємництва та сімейного бізнесу, що є важливим у сучасних українських реаліях. Реалістична валідність (критерій 8) забезпечена реальними економічними показниками та технічними параметрами виробництва. Задача формує економічне мислення та демонструє практичне застосування оптимізаційних задач. Екологічна складова показує відповідальне ставлення до ресурсів. Міжпредметна валідність (критерій 6) виявляється у зв'язку з економікою, екологією, хімією (виробництво скла) та підприємництвом. Конструктивна валідність (критерій 10) реалізується через підведення учнів до розуміння задач математичної оптимізації, що будуть вивчатися у старших класах (похідна, екстремуми функцій).

Зауважимо, що створена добірка прикладних задач з теми «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» демонструє підхід до навчання математики через життєву актуалізацію змісту. Вона органічно поєднує український контекст з глобальними викликами сучасності: від реалій воєнного часу (задача про сховище) до інноваційних агротехнологій (вертикальні ферми), від традиційних знань про лікарські рослини Карпат до біонічних принципів інженерії. Така контекстуалізація робить математику не абстрактною наукою, а практичним інструментом розуміння світу та вирішення реальних проблем. Цінним є збалансоване представлення різних рівнів складності – від базових задач (розрахунок площі та об'єму) до комплексних міжпредметних завдань, що вимагають інтеграції знань з математики, фізики, біології, хімії та економіки. Це забезпечує можливість диференціації навчання та формування ключових компетентностей на різних рівнях засвоєння матеріалу. Створена система задач має виховний потенціал: формує екологічну свідомість (збереження лікарських рослин), підприємницьке мислення (бізнес-плани виробництва), патріотизм через звернення до українських реалій, а також демонструє математику як невід'ємну частину світової культури через історичні екскурси. Це цілком відповідає сучасним вимогам компетентнісно орієнтованої освіти, де предметні знання є засобом формування цілісної особистості учня. Слід також зазначити, що запропонована вище система прикладних задач укладена на основі матеріалів нашого попереднього збірника Швець В., Прус А. (2007). При цьому задачі були оновлені, модернізовані та доповнені актуальною інформацією з урахуванням сучасних тенденцій і потреб практики.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

На нашу думку, впровадження запропонованої системи критеріїв та системи вагових коефіцієнтів дозволяє об'єктивізувати процес відбору та оцінювання задач, що особливо важливо при створенні навчально-методичних комплексів, підручників та дидактичних матеріалів. Гнучкість системи (можливість адаптації залежно від профілю навчання) робить її універсальним інструментом для різних освітніх контекстів – від базової основної школи до профільної старшої школи та позашкільної роботи з обдарованими учнями. Система вагових коефіцієнтів надає можливість не лише якісно, а й кількісно оцінити відповідність задачі встановленим критеріям, що робить процес відбору задач більш об'єктивним та обґрунтованим.

Рекомендації щодо використання системи для вчителів: використовуйте систему вагових коефіцієнтів при відборі задач для уроків; залучайте учнів до експертного оцінювання – це формує критичне мислення; створюйте власні задачі та перевіряйте їх якість за системою критеріїв. Рекомендації щодо використання системи для методистів та авторів підручників: система може стати основою для експертної оцінки якості навчальних матеріалів; рекомендується створити банк задач з оцінками за всіма критеріями; можна розробити цифровий інструмент (калькулятор) для автоматичного підрахунку балів. Рекомендації щодо використання системи для дослідників: система потребує емпіричної валідації на великій вибірці задач; доцільно провести експертне опитування для уточнення вагових коефіцієнтів; цікаво дослідити кореляцію між оцінкою задачі та навчальними результатами учнів.

Зі змісту системи задач видно, що їх використання потребує від вчителя знань і вмінь не тільки математичних із відповідної теми, а й з багатьох суміжних галузей знань, додаткової підготовки щодо розв’язування. Зрозуміло, що такі задачі доцільно розв’язувати з учнями на завершенні вивчення великої теми і не одну, а кілька. В цілому, від теми до теми, вони вводять учнів у світ цікавих, актуальних реальних процесів і явищ, тим самим, роблять їх обізнаними і здатними реагувати на різні проблеми реального життя, пізнавати навколишній світ крізь «математичні окуляри».

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це дослідження не передбачало використання окремих наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ (REFERENCES)

1. Бурда, М., & Васильєва, Д. (2017). Особливості навчання математики за новими програмами. *Математика в рідній школі*, №7-8, 2-9.
2. Катеринюк, Г. Д. (2020). Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи. [Неопубл. дис. канд. пед. наук]. Вінницький державний педагогічний університет Михайла Коцюбинського.
3. Матяш, О. І., & Катеринюк, Г. Д. (2019). *Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання*. ТОВ «Твори».
4. Постанова Кабінету міністрів України «Про деякі питання державних стандартів базової середньої освіти» №989 (2020). https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898
5. Постанова Кабінету міністрів України «Про затвердження Державного стандарту профільної середньої освіти» №851 (2024). https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennia-derzhavnoho-standartu-profilnoi-serednoi-osvity-851-250724
6. Тарасенкова, Н., & Акуленко, І. (2025). Методична діяльність із компетентнісними задачами (К-задачами) у системі методичної підготовки майбутнього вчителя математики. *Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького*, 2, 205-212. https://doi.org/10.31651/2524-2660-2025-2-205-212
7. Прус, А. (2023) Математичне моделювання як лінза реального світу. *Фізико-математична освіта,* 38(4), 56–61. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-008
8. Прус, А. В. (2024). Підходи, перспективи та траєкторії математичного моделювання в освіті. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, 71, 216-225. https://doi.org/10.31652/2412-1142-2024-71-216-225 (in Ukrainian)
9. Соколенко, Л.О., Філон, Н.Г., & Швець, В.О. (2010). *Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу*. НПУ імені М.П.Драгоманова.
10. Швець, В.О., & Прус, А.В. (2007). *Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії*. ЖДУ ім. І. Франка.
11. Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2020) Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education, *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.159536
12. Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM Mathematics Education*, *38*(3), 293–301. https://doi.org/10.1007/BF02652812
13. Berry, J., & Houston, K. (1995). *Mathematical modelling*. Elsevier.
14. Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. In Blomhøj, M. and Carreira, S. (Eds*.), Proceedings from topic study group 21 at the 11th Iinternational congress on mathematical education* (pp. 1-17). Monterrey, Mexico.
15. Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. *Teaching and learning mathematics in context,* 3-14.
16. Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1*, 45–58.
17. Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.
18. Borromeo Ferri, R. (2020). Make mathematical modeling marvelous! Follow teacher Mr. K. for your lesson tomorrow. *The New Jersey Mathematics Teacher*, *78*(1), 44-53.
19. Burkhardt, H., & Pollak, H.O. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zeitschrift fur Didaktik der Mathematik*, *38* (2), 178-195. https://doi.org/10.1007/BF02655888

20. Depaepe, F., De Corte, E., & Verschafel, L. (2009). Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education in Flanders. In Verschafel, L., Greer, B., Van Dooren, W., Mukhopadhyay, S. (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 245– 263). Sense Publishers
21. Frejd, P., & Vos, P. (2023). The spirit of mathematical modeling – a philosophical study on the occasion of 50 years of mathematical modeling education, *The Mathematics Enthusiast*, *21*(1), 269-300. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1626
22. Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(5), 3–16.
23. García, F.J., Gascón, J., Ruiz, Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(3), 226-246. https://doi.org/10.1007/BF02652807
24. Houston, K., Galbraith, P., & Kaiser, G. (2009). *ICTMA: The first twenty-five years*. *History of ICMI.* https://www.icmihistory.unito.it/ictma.php#up
25. Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In Blum, W., Galbraith, P., Niss, M., Henn, H.-W. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 503-510). New York: Springer.
26. Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal fu¨r Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 51–76. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0001-3
27. Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., & Garcia, F. J. (2007). Report from the working group modelling and applications-differentiating perspectives and delineating commonalties. *Paper presented at the Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 2035-2041) Larnaca, Cyprus.
28. Kutluca, T., & Kaya, D. (2023). Mathematical modelling: A retrospective overview. *Journal of Computer and Education Research*, *11* (21), 240-274. https://doi.org/10.18009/jcer.1242785
29. Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In Lesh, R., Doerr, H. M. (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum
30. Maaβ, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38* (2), 113-142. https://doi.org/10.1007/BF02655885
31. Stillman, G. (2012). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? *In Preproceedings of ICME12.* Korea, Seoul.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Burda, M., & Vasylieva, D. (2017). Osoblyvosti navchannia matematyky za novymy prohramamy [Features of teaching mathematics according to new programs]. *Matematyka v ridnii shkoli – Mathematics in your home school, 7-8*, 2-9.(in Ukrainian)
2. Kateryniuk, H. D. (2020). Formuvannia umin matematychnoho modeliuvannia v uchniv profilnoi shkoly [Formation of mathematical modeling skills in students of specialized schools]. Neopubl. dys. kand. ped. nauk. Vinnytskyi derzhavnyi pedahohichnyi universytet Mykhaila Kotsiubynskoho. (in Ukrainian)
3. Matiash O. I., Kateryniuk H. D. (2019). Metodychnyi instrumentarii formuvannia zdatnosti uchniv do matematychnoho modeliuvannia [Methodological tools for developing students' ability to mathematical modeling]. TOV «Tvory». (in Ukrainian)
4. Postanova Kabinetu ministriv Ukrainy «Pro deiaki pytannia derzhavnykh standartiv bazovoi serednoi osvity» №989 [Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine "On Some Issues of State Standards of Basic Secondary Education" No. 989] (2020). https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898 (in Ukrainian)
5. Postanova Kabinetu ministriv Ukrainy «Pro zatverdzhennia Derzhavnoho standartu profilnoi serednoi osvity» №851 [Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine "On Approval of the State Standard of Specialized Secondary Education" No. 851]. (2024). https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennia-derzhavnoho-standartu-profilnoi-serednoi-osvity-851-250724 (in Ukrainian)
6. Tarasenkova N., & Akulenko I. (2025). Metodychna diialnist iz kompetentnisnymy zadachamy (K-zadachamy) u systemi metodychnoi pidhotovky maibutnoho vchytelia matematyky [Methodical activities with competency-based tasks (K-tasks) in the system of methodological training of future mathematics teachers]. *Visnyk Cherkaskoho natsionalnoho universytetu imeni Bohdana Khmelnytskoho – Bulletin of the Bohdan Khmelnytskyi Cherkasy National University, 2*, 205-212. https://doi.org/10.31651/2524-2660-2025-2-205-212 (in Ukrainian)
7. Prus, A. (2023). Matematychne modeliuvannia yak linza realnoho svitu [Mathematical modeling as a lens of the real world]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education, 38*(4), 56-61. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-008 (in Ukrainian)
8. Prus A. V. (2024) Pidkhody, perspektyvy ta traiektorii matematychnoho modeliuvannia v osviti [Approaches, prospects and trajectories of mathematical modeling in education]. *Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metodyky navchannia u pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy – Modern information technologies and innovative teaching methods in the training of specialists: methodology, theory, experience, problems, 71*, 216-225. https://doi.org/10.31652/2412-1142-2024-71-216-225 (in Ukrainian)
9. Sokolenko L.O., Filon N.H., Shvets V.O. (2010). *Prykladni zadachi pryrodnychoho kharakteru v kursi alhebry i pochatkiv analizu [Applied problems of a natural science nature in the course of algebra and the beginnings of analysis].* NPU imeni M.P.Drahomanova. (in Ukrainian)
10. Shvets V.O., Prus A.V. (2007). *Teoriia ta praktyka prykladnoi spriamovanosti shkilnoho kursu stereometrii [Theory and practice of the applied orientation of the school course in stereometry].* ZhDU im. I. Franka. (in Ukrainian)
11. Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2020) Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education, *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.159536
12. Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM Mathematics Education*, *38*(3), 293–301. https://doi.org/10.1007/BF02652812
13. Berry, J., & Houston, K. (1995). *Mathematical modelling*. Elsevier.
14. Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. In Blomhøj, M. and Carreira, S. (Eds*.), Proceedings from topic study group 21 at the 11th Iinternational congress on mathematical education* (pp. 1-17). Monterrey, Mexico.
15. Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. *Teaching and learning mathematics in context,* 3-14.
16. Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1*, 45–58.
17. Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.
18. Borromeo Ferri, R. (2020). Make mathematical modeling marvelous! Follow teacher Mr. K. for your lesson tomorrow. *The New Jersey Mathematics Teacher*, *78*(1), 44-53.
19. Burkhardt, H., & Pollak, H.O. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zeitschrift fur Didaktik der Mathematik*, *38* (2), 178-195. https://doi.org/10.1007/BF02655888

20. Depaepe, F., De Corte, E., & Verschafel, L. (2009). Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education in Flanders. In Verschafel, L., Greer, B., Van Dooren, W., Mukhopadhyay, S. (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 245– 263). Sense Publishers
21. Frejd, P., & Vos, P. (2023). The spirit of mathematical modeling – a philosophical study on the occasion of 50 years of mathematical modeling education, *The Mathematics Enthusiast*, *21*(1), 269-300. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1626
22. Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(5), 3–16.
23. García, F.J., Gascón, J., Ruiz, Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(3), 226-246. https://doi.org/10.1007/BF02652807
24. Houston, K., Galbraith, P., & Kaiser, G. (2009). *ICTMA: The first twenty-five years*. *History of ICMI.* https://www.icmihistory.unito.it/ictma.php#up
25. Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In Blum, W., Galbraith, P., Niss, M., Henn, H.-W. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 503-510). New York: Springer.
26. Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal fu¨r Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 51–76. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0001-3
27. Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., & Garcia, F. J. (2007). Report from the working group modelling and applications-differentiating perspectives and delineating commonalties. *Paper presented at the Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 2035-2041) Larnaca, Cyprus.
28. Kutluca, T., & Kaya, D. (2023). Mathematical modelling: A retrospective overview. *Journal of Computer and Education Research*, *11* (21), 240-274. https://doi.org/10.18009/jcer.1242785
29. Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In Lesh, R., Doerr, H. M. (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum
30. Maaβ, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38* (2), 113-142. https://doi.org/10.1007/BF02655885
31. Stillman, G. (2012). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? *In Preproceedings of ICME12.* Korea, Seoul.

| *Матеріал надійшов до редакції: 02.12.2025 р.* | *Прийнято до друку: 25.01.2026 р.* | *Опубліковано: 02.03.2026 р.* |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X **2026, 41(1)**, https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-07
UDC: 372.851

ВИВЧЕННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ У 8 КЛАСІ НУШ ЗА АВТОРСЬКИМ ПІДРУЧНИКОМ ІНТЕГРОВАНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Олександр ШКОЛЬНИЙ
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
o.v.shkolnyi@udu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-3131-1915

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Реформа «Нова українська школа» (НУШ) спрямована на формування в учнів ключових компетентностей, які сприятимуть їх подальшому навчанню у вищій школі та самореалізації в майбутній професійній діяльності. Згідно з цією реформою за процес навчання в українських школах організовано наступним чином: за затвердженими Державними стандартами освіти і базовим навчальним планом, розроблено модельні навчальні програми з усіх освітніх галузей, зокрема, з математики, а вже за цими модельним програмами створюються підручники та інші засоби навчання. Метою статті є висвітлення методичних особливостей вивчення координат і векторів у 8 класі Нової української школи за підручником авторського колективу Олександр Школьний, Євген Нелін, Андрій Миляник, Юлія Простакова, створеного за модельною навчальною програмою авторського колективу на чолі з Марією Василишин. За цією програмою і підручником вектори і координати вивчаються саме у 8 класі. Це дасть можливість вивчати тему «Геометричні перетворення площини» на початку 9 класу, а вивчення цієї теми в подальшому сприятиме більш коректному викладу матеріалу, що стосується побудови графіка квадратичної функції методом геометричних перетворень. Крім того, координати і вектори потрібні у 8 класі, зокрема, вчителям фізики для розв'язування багатьох задач цієї освітньої галузі.*

Методи та матеріали. *Було використано теоретичний аналіз методичної літератури, порівняльний аналіз, систематизацію та узагальнення наявних теоретичних досліджень з тематики статті, а також педагогічне спостереження та узагальнення власного педагогічного досвіду щодо навчання математики у 8 класі НУШ.*

Результати. *У роботі ми детально описуємо методику вивчення координат і векторів, яке передбачає вивчення наступних підрозділів: «Система координат на площині. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками з даними координатами. Рівняння кола.», «Вектор. Модуль вектора. Колінеарні та рівні вектори. Дії над векторами.», «Координати вектора. Дії над векторами в координатні формі.», «Рівняння прямої. Взаємне розташування кола і прямої та двох кіл.», «Скалярний добуток векторів та його застосування.» Зокрема, важливим для вивчення координат вектора є введення поняття базису, який відповідає заданій системі координат на площині. Це дає можливість досить просто і традиційно для курсу математики ввести поняття координат вектора як коефіцієнтів його розкладу через вектори базису.*

Висновки. *Апробація підручника згаданого авторського колективу протягом 2024-2025 навчального року в навчальних закладах України показує, що учні цілком позитивно сприймають місце і спосіб вивчення координат і векторів на*

STUDYING COORDINATES AND VECTORS IN 8TH GRADE OF NUS ACCORDING TO THE AUTHOR'S TEXTBOOK OF THE INTEGRATED COURSE OF MATHEMATICS

Oleksandr SHKOLNYI
Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
o.v.shkolnyi@udu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-3131-1915

ABSTRACT

Formulation of the problem. *The New Ukrainian School (NUS) reform is aimed at developing key competencies in students that will facilitate their further education in higher education and self-realization in future professional activities. According to this reform, the learning process in Ukrainian schools is organized as follows: according to the approved State Education Standards and the basic educational plan, model educational programs have been developed in all educational fields, in particular, in mathematics, and textbooks and other teaching aids are created based on these model programs. The goal of the article is to highlight the methodological features of studying coordinates and vectors in the 8th grade of the New Ukrainian School according to the textbook of the author team, Oleksandr Shkolnyi, Yevhen Nelin, Andrii Mylianyk, and Yulia Prostakova, created according to the model program of the author team led by Maria Vasylyshyn. According to this program and textbook, vectors and coordinates are studied in the 8th grade. This will make it possible to study the topic "Geometric transformations of the plane" at the beginning of the 9th grade, and future study of this topic will contribute to a more accurate presentation of the material on constructing a graph of a quadratic function using geometric transformations. In addition, coordinates and vectors are needed in the 8th grade, particularly for physics teachers to solve many problems in this field.*

Materials and methods. *Theoretical analysis of methodological literature, comparative analysis, systematization, and generalization of existing theoretical research on the topic of the article were used, as well as pedagogical observation and generalization of one's own pedagogical experience in teaching mathematics in the 8th grade of the New Ukrainian School.*

Results. *In the work, we describe in detail the methodology for studying coordinates and vectors, which involves studying the following subsections: "Coordinate system on the plane. Coordinates of the midpoint of a segment. Distance between two points with given coordinates. Equation of a circle", "Vector. Absolute value of a vector. Collinear and equal vectors. Operations on vectors", "Vector coordinates. Operation on vectors in coordinate form", "Equation of a line. Mutual location of a circle and a line and two circles", "Dot product of vectors and its application." In particular, it is important for studying vector coordinates to introduce the concept of a basis, which corresponds to a given coordinate system on the plane. This makes it possible to introduce the concept of vector coordinates as coefficients in an expansion using basis vectors in a fairly simple, traditional way for a mathematics course.*

Conclusions. *Testing of the textbook of the aforementioned author team during the 2024-2025 academic year in Ukrainian schools shows that students quite positively perceive the place and method of studying coordinates and vectors on the plane and properly use them in their educational activities. However,* *площині та належним чином їх використовують у своїй навчальній діяльності. Однак, пропонований спосіб опанування даного матеріалу учнями 8 класу НУШ потребує подальших досліджень. Проте ми переконані в доцільності та перспективності описаного підходу і будемо й надалі користуватися ним для формування ключових компетентностей учнів.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *Нова українська школа; компетентнісний підхід до навчання; інтегрований курс математики; вектори і координати; методичні особливості; інноваційні методи навчання.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Shkolnyi O. Studying coordinates and vectors in 8th grade of nus according to the author's textbook of the integrated course of mathematics. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 1. С. 48-54. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-07.

the proposed method for students in 8th grade at NUS to master this material requires further research. However, we are convinced of the feasibility and prospects of the described approach and will continue to use it to develop students' key competencies.

KEYWORDS: *New Ukrainian School; competency-based approach to learning; integrated course of mathematics; vectors and coordinates; methodological features; innovative teaching methods.*

FOR CITATION: Shkolnyi, O. (2026). Studying coordinates and vectors in 8th grade of nus according to the author's textbook of the integrated course of mathematics. *Physical and Mathematical Education*, *41*(1), 48-54. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-07.

INTRODUCTION

Problem statement. Analysis of current research. Currently, the education reform “New Ukrainian School” (NUS) is underway in Ukraine. It arose as a result of the discrepancy between the demands of Ukrainian society regarding the Ukrainian education system and the results of its functioning, which were finally formed by the mid-2010s. This discrepancy was manifested in the results of the state final attestation (SFA) of graduates of grades 9 and 11, the external independent assessment of the quality of knowledge (EIA) of applicants to higher education institutions (HEI), as well as in the results of international comparative studies PISA (see, for example, NUS 2024, Bakhrushyn 2019; Mazorchuk et al. 2019, Vakulenko et al. 2021, UCEQA, 2021 and others).

As we have already noted in the article (Shkolnyi 2024), the main idea of the NUS reform is the orientation of students, first of all, to successful integration into society after graduation, professional fulfillment and personal satisfaction from their own activities in the adult world. Therefore, it is natural that the theoretical basis of the NUS reform is a competency-based approach, which orients the entire process of education at school not on the formal acquisition of knowledge, skills and abilities by students in a particular subject area, but on the formation of appropriate personality characteristics in them that will allow them to ensure successful self-realization in the future. In order to implement this concept, State Education Standards were created (CMU 2018, CMU 2020, CMU 2024, MES of Ukraine 2024), as well as model educational program for each of the 9 educational branches defined in the NUS concept. For example, for the mathematical educational field, more than ten model educational programs by different authors have been approved for primary and basic secondary schools only (MES of Ukraine 2024).

Within the framework of their academic freedom, teachers, based on model programs, must develop and implement appropriate their own educational program, create calendar-thematic planning and other didactic materials for carrying out educational activities. However, it is clear that textbooks remain the main means of teaching. Currently, there are more than 10 mathematics textbooks for primary school and for basic secondary school (IMCE 2024). The team of authors led by Maria Vasylyshyn (Mariia Vasylyshyn, Andrii Mylianyk, Mykola Pratsiovytyi, Yulia Prostakova and Oleksandr Shkolnyi) proposed a model mathematics program for grades 5-6 and 7-9 (Vasylyshyn et al. 2021, Vasylyshyn et al. 2023), which is distinguished by innovative approaches to the formation of the content of educational material and methods of its study. This program is focused on European and world educational trends of recent decades. In particular, it strengthens the probabilistic-statistical line, suggests studying spatial geometric shapes in grades 7-9 in parallel with flat ones, examines the basics of financial literacy, etc. You can learn more about the features of this program by reading the article (Shkolnyi 2023).

One of the important features of the program (Vasylyshyn et al. 2023) is the transfer of the study of vectors and coordinates from grade 9 to grade 8, and the corresponding material concerning the areas of geometric figures – on the contrary, from grade 8 to grade 9. The authors saw a need for this for several reasons. First, the vector-coordinate method is significantly used not only for solving mathematical problems, but also for problems in many natural sciences, in particular, in physics. The need for appropriate educational material in grade 8 has been repeatedly expressed by physics teachers. Secondly, the study of vectors and coordinates in grade 8 makes it possible to begin studying the 9th grade mathematics course with geometric transformations of the plane, which, in turn, will make it possible to more correctly explain the construction of the graph of the quadratic function $y = ax^2 + bx + c$ by geometric transformations of the graph of the function $y = x^2$ already known to students. Indeed, for a mathematically correct explanation of constructing a graph of a quadratic function, students must already be familiar with the analytical task of parallel translation to a given vector, symmetry with respect to the abscissa axis, and deformation to the abscissa axis, which are impossible without prior experience working with vectors and coordinates on the plane. In the textbook of the integrated mathematics course for grade 8 (Shkolnyi et al. 2025) by the author team consisting of Oleksandr Shkolnyi, Yevhen Nelin, Andrii Mylianyk, and Yulia Prostakova, created according to the model program (Vasylyshyn et al. 2023), the section “Coordinates and Vectors on the Plane” is studied, which ensures the implementation of the above ideological scheme.

We should also note that there are many foreign publications on this topic (see, for example, Demetriadou & Gagatsis 2001, Gueudet-Chartier 2004, Jensen et. al. 2017, Wutchana et. al. 2015 and others), but they are of little application to Ukrainian realities, since they do not take into account the peculiarities of the educational process in our country, especially during the implementation of the NUS reform. In addition, currently Ukrainian teenagers, due to martial law, are in special conditions and require a different approach to learning from the traditional ones (more details about teaching mathematics under martial law in Ukraine are described in the article Matiash & Shkolnyi 2025).

The purpose of this article is to highlight the features of studying coordinates and vectors in the 8th grade mathematics course of the New Ukrainian School. We will focus on what teachers should pay attention to when seeking to consciously develop in students of the New Ukrainian School knowledge, skills and abilities (competences) related to their mastery of the relevant educational material.

METHODS OF THE RESEARCH

To achieve the goal of the study, we use a theoretical analysis of methodological literature related to the chosen topic. Also, as an empirical method, we use surveys of teachers and students, as well as observation of the educational process in secondary schools during the testing of teaching materials in mathematics for grade 8 of the New Ukrainian School. In this article, we also operate with various methods of scientific knowledge: comparative analysis to clarify different points of view on the problem; systematization and generalization to formulate conclusions and recommendations on the formation of the competences connected to study coordinates and vectors for students of grades 7-9; we also summarize our own pedagogical experience and observations of the authors on the process of teaching mathematics in Ukrainian schools.

RESULTS OF RESEARCH

According to the educational program (Vasylyshyn et al. 2023), the study of coordinates and vectors is provided at the end of grade 8. The corresponding section of the textbook is called "Coordinates and Vectors on the Plane" and consists of the following paragraphs:

- Coordinate system on the plane. Coordinates of the midpoint of a segment. Distance between two points with given coordinates. Equation of a circle.
- Vector. Vector absolute value. Collinear and equal vectors. Operations on vectors.
- Vector coordinates. Operations on vectors in coordinate form.
- Equation of a line. Mutual position of a circle and a line and two circles.
- Scalar product of vectors and its application.

The last paragraph is studied optionally, since the relevant material is not provided for in the mentioned program, but it is traditional for other programs and textbooks for grades 7-9, both for the National Secondary School and previous years.

The paragraph "Coordinate system on the plane. Coordinates of the midpoint of a segment. Distance between two points with given coordinates. Equation of a circle." contains information about the Rectangular Cartesian Coordinate System (RCCS) on the plane and its simplest problems. In the 7th grade, students have already become familiar with the RCCS, in particular, they are already able to solve the following simplest problems:

- determining the coordinates of a given point;
- constructing a point with given coordinates.
- Further, this paragraph studies two more simplest RCCS problems:
- finding the distance between points with known coordinates (length of the segment);
- finding the coordinates of the midpoint of the segment from the known coordinates of its ends.

The motivation for studying these problems is a practical problem about the arrangement of children in a cinema hall (the dialogue between Petryk and Tetianka at the beginning of the paragraph). It is known that historically it was the idea of seating people in a theatre that led Rene Descartes to invent this coordinate system. For a convenient justification of the formula for the distance between two points in the PDSK and the formula for the coordinates of the midpoint of a segment in the RCCS, two auxiliary lemmas are proved.

<u>Lemma 1</u> (on the distance between points on a coordinate line). If two different points $A(a)$ and $B(b)$ are given on some coordinate line, then $AB = |b - a|$.

<u>Lemma 2</u> (on the coordinates of the midpoint of a segment on a coordinate line). If two different points $A(a)$ and $B(b)$ are given on some coordinate line and point $C(c)$ is the midpoint of the segment AB, then $c = \frac{a+b}{2}$.

Next, using these two lemmas, the following theorem is proved.

<u>Theorem</u> (on the simplest problems of RCCS). Let in a RCCS the points $K(x_1; y_1)$ and $M(x_2; y_2)$ are given. Let also the point $L(x_0; y_0)$ is the midpoint of the segment KM. Then 1) $KM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; 2) $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$.

In proving this theorem, in addition to the mentioned lemmas, the Pythagorean theorem (to prove formula 1) and the Thales theorem (to prove formula 2) are used, which were recently studied in grade 8. This additionally emphasizes the naturalness of studying this topic in grade 8, and not in grade 9. The application of the simplest RCCS problems is demonstrated immediately after proving the theorem – the educational video suggests using them to solve problems.

Another application of the simplest problem about the formula for the distance between points in the RCCS is to derive the equation of a circle. Students have already studied the equation of a line in grade 7. Therefore, after updating the concept of the graph of an equation with two variables, we can explain what it means to compose the equation of a line on a plane: composing the equation of a certain line on a plane (the GPT of the plane) means to relate the known parameters of this line to the coordinates of its arbitrary point. For instance, the equation $2x - 7y + 3 = 0$ define in a RCCS a line, where $M(x; y)$ is an arbitrary point of this line and numbers $2, -7$ and 3 are their known parameters that allow to draw this line in the RCCS.

It is advisable to remind students that from the 7th grade textbook they know that to name a certain set of points of the set of the GMT plane, which is given by some characteristic property, it is necessary to prove the following two statements:

- each point of the given set has this characteristic property;
- all points that have this characteristic property belong to the given set.

Therefore, to assert that an equation with two variables x and y is an equation of a certain line on the coordinate plane xOy (GPT of plane), it is necessary to make sure:

• if the point belongs to the given line, then its coordinates are a solution of the considered equation;

• any solution $(x;\ y)$ of the considered equation are the coordinates of a point that belongs to the given line.

Next, the canonical equation of a circle centered at the point $M_0(x_0; y_0)$ and radius R is derived. It has the following form $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. When considering the relevant justification, students should be aware that the textbook shows: if the point $M(x; y)$ is an arbitrary point on a given circle, then $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$ (*). But if the coordinates of the point $M(x; y)$ satisfy this equation, then we can conclude that $M_0M=R$, and this means that $(x; y)$ are the coordinates of the point M, which belongs to the circle. So, equation (*) is indeed the equation of a circle, which is further transformed (by equivalent transformations) into the canonical equation $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. After that, the textbook examines examples of constructing the canonical equation of a circle and determining the coordinates of the center and radius of a circle given its canonical equation.

A separate interesting problem is to determine the coordinates of the center and radius of a circle given by an equation of the form $x^2+y^2+ax+by+c=0$. It is worth emphasizing that such an equation can either define a circle or not, giving appropriate examples. We suggest considering the analytical conditions under which an equation of this type will define a circle in the classes of the mathematics club for inquisitive students. For such students, the material from section "Grandpa Taras's curiosities" for this paragraph, which concerns polar coordinate systems on the plane and in space and their use in geography and astronomy, will also be useful.

In the paragraph "Vector. Vector modulus. Collinear and equal vectors. Actions on vectors." the concept of a vector, vector modulus, and also actions on vectors (addition, subtraction, and multiplication by a number) are considered. After the motivational block, where Petryk and Tetianka discuss the use of directed segments (arrows) to indicate movement, the traditional definition of a vector is given: "A segment, which indicates which of the points is the initial and which is the final, is called a directed segment or vector." Next, the definitions of the vector modulus, collinear vectors (in particular, co-directed and multi-directed) and equal vectors are introduced. After this, the property of vector offset is formulated and proved: "Whatever the vector $\vec{a}$ is, it can always be offset in a unique way from any point in the plane."

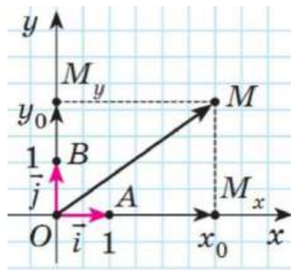
Further in the paragraph the definitions of the sum of vectors according to the triangle rule and the parallelogram rule are introduced. Both of these rules are equal, the justification for this is also given in the textbook. The rule for adding two vectors is further generalized to the case of adding several vectors, in particular, to the case when vectors, postponed "one by one" form a closed polyline. In the latter case, it is natural to consider the sum of these vectors as a vector whose beginning coincides with its end, that is, the zero vector. The definition of the difference of vectors is given by analogy with the definition of the difference of numbers. After this, the rule for subtracting two vectors is given and justified: to subtract two vectors, you need to postpone them from one point, then connect the ends of the postponed vectors and point the arrow to the vector from which you are subtracting. For a better understanding of the subtleties of performing addition and subtraction of vectors, an educational video is provided, which considers specific examples of performing these two operations on vectors.

At the end of the paragraph, the definition of the product of a vector by a number is introduced and the execution of this action is illustrated in combination with the actions of adding and subtracting vectors in another educational video. It is important for further applications to substantiate the fact that of two collinear vectors, one can always be expressed in terms of the other. The textbook provides an algorithm for determining the coefficient λ, for which $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$, if it's known that $\vec{a}||\vec{b}$. Next, an example is considered of how, under certain conditions, one given vector can be expressed in terms of two other given vectors, where the algorithm just mentioned is applied. The paragraph concludes with a theorem on the properties of vectors, the proof of which is given in a separate video. We recommend requiring the assimilation of the material of the last video with the proof of the properties of vectors only for students who are studying at a sufficient and high level of educational achievements; for the rest of the students, it is enough to simply know the properties of actions on vectors and be able to use them.

Inquisitive students are advised to pay attention to the interesting facts from the section "Grandpa Taras's curiosities" for this paragraph, which emphasizes that vectors in physics and mathematics are, generally speaking, different objects: mathematical vectors are "free" due to the property of postponement, while for vectors in physics, not only the magnitude of the vector and its direction are important, but also the point of postponement, that is, they are "tied".

The paragraph "Vector coordinates. Actions on vectors in coordinate form." is devoted to the study of vector coordinates and actions on vectors in coordinate form. Here we introduce the concept of a basis associated with a given RCCS, the radius vector of a given point and relate the coordinates of a point to the expansion of the radius vector of this point in terms of the basis vectors. We present the corresponding fragment of the theoretical material of the textbook (Shkolnyi et al. 2025), because it is not traditional and is not found in other Ukrainian textbooks.

«Let's consider in a RCCS the points $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ and $B(0; 1)$. Let's denote $\overrightarrow{OA}=\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\jmath}$ (see the picture). Ordered set of vectors $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ is called the basis that correspond given RCCS. Let's consider also in the same RCCS an arbitrary point $M(x_0; y_0)$, which does not belong to any of the coordinate axes, and the points $M_x(x_0; 0)$, $M_y(0; y_0)$. The vector $\overrightarrow{OM}$ is called radius-vector of the point M. According to the parallelogram rule $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_x}+\overrightarrow{OM_y}$. Because $\overrightarrow{OM_x}||\vec{\imath}$ and $\overrightarrow{OM_y}||\vec{\jmath}$, then $\overrightarrow{OM_x}=x_0\cdot\vec{\imath}$ and $\overrightarrow{OM_y}=y_0\cdot\vec{\jmath}$. Therefore, $\overrightarrow{OM}=x_0\cdot\vec{\imath}+y_0\cdot\vec{\jmath}$. If the point $M(x_0; y_0)$ belongs to one of coordinate axes, then $x_0=0$ or $y_0=0$. If $x_0=0$, then $\overrightarrow{OM}=0\cdot\vec{\imath}+y_0\cdot\vec{\jmath}$. If $y_0=0$, then $\overrightarrow{OM}=x_0\cdot\vec{\imath}+0\cdot\vec{\jmath}$. So, anyway the radius-vector $\overline{OM}$ of a point $M(x_0; y_0)$ can be expand through the vectors of the basis $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$, where coordinates of this point are the coefficient of this expansion.»



This interpretation of the coordinates of a point makes it possible to give a completely correct definition of the coordinates of a vector (the coordinates of a vector in a certain RCCS on a plane are the coefficients of the expansion of this vector through the basis vectors $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$, which corresponds to this RCCS), and also to prove the rule for finding the coordinates of a vector from the known coordinates of its beginning and end: to find the coordinates of a vector, it is necessary to subtract the corresponding coordinates of its beginning from the coordinates of its end. It is also advisable to draw the attention of students to the fact that the definition of the coordinates of a vector implies: if the beginning of a vector is the origin of coordinates, then the coordinates of the vector coincide with the coordinates of its end.

An example of the use of coordinates in everyday life problems is the use of these coordinates to determine the location of children in the cinema hall during a movie screening (see the dialogue between Petryk and Tetianka at the beginning of the paragraph). To solve this problem, it is fundamental that equal vectors have the same coordinates and vice versa - if vectors have equal coordinates, then they are equal. This fact is also substantiated in the textbook. It is also convenient to use vector coordinates in mathematical problems, in particular, to determine the coordinates of vectors that are formed as a result of actions on given vectors. For this purpose, the educational video, which is mandatory for all students to study, proves the rules for actions on vectors in coordinate form. The use of these rules is illustrated by a corresponding example at the end of the paragraph.

It is also important to emphasize that if two vectors are collinear, then their coordinates are proportional. This rule will be often used in the future when solving many problems. The textbook also suggests that students independently verify that the correct and converse statement is: if the coordinates of two vectors are proportional, then the vectors are collinear. This is really easy to do independently, using the formula for calculating the product of a vector by a number in coordinate form and the fact that the result of multiplying any vector by a number is a vector collinear to it. The paragraph concludes with a proof of the formula for the length of a vector by its known coordinates. In this case, the formula for the distance between two points and the formula for finding the coordinates of a vector by the known coordinates of its beginning and end are used. Curious students can also learn more from the section “Grandpa Taras's curiosities” about the affine coordinate system and its main problems.

In the paragraph "Equation of a straight line. Mutual location of a circle and a straight line and two circles" the equation of a straight line, as well as the mutual location of a straight line and two circles, is studied. In the motivational block to the paragraph, a specific example shows that a straight line (the trajectory of an airplane) can be defined by a point and a vector that is collinear to this straight line (i.e., is parallel to it or belongs to it). In general, there are three main ways to specify a straight line on a plane:

- through a given point on a line and a vector parallel to this line;
- through two given points on this line;
- through a given point on a line and a vector perpendicular to this line.

In the paragraph, the corresponding equation of the line is compiled for the first two methods:

- $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}$ - equation of a line passing through a point $M_0(x_0;y_0)$ and has a direction vector $\vec{s}(m;p)$;
- $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - equation of a line passing through two points $M_1(x_1;y_1)$ i $M_2(x_2;y_2)$ of this line.

The equation of the line for the last method of assignment is given in the last paragraph of the section, which is studied optionally, that is, if there is a reserve of study time (there is no corresponding material in the model program Vasylyshyn et al. 2023).

The following example shows how to reduce each of the given equations to the form $ax+by+c=0$ and states without proof that any equation of a line can be reduced to this form. An equation of this form is called a general equation of a line. Curious students can get acquainted with the proof of this fact in the lessons of the mathematics club.

The second part of the paragraph is devoted to methods for establishing the relative position of a circle and a line and two circles on a plane using the equations of a circle and a line. Students already know from the 7th grade mathematics course that there are 3 types of relative positions of a circle and a line on a plane:

- a line is a secant of a circle;
- a line is tangent to a circle;
- a line has no points in common with a circle.

Since both a circle and a line can be given by equations, it is natural to determine their mutual location analytically, using these equations. The mutual location of a circle and a line can be determined by the number of solutions of the system consisting of the equation of a circle and the equation of a line. This system is reduced by substitution to a quadratic equation, which students already know how to solve. Note that to establish the mutual location of a circle and a line, it is not necessary to find the solutions themselves; it is enough to find the discriminant of the quadratic equation obtained after substitution and compare it with zero. However, for curious students, you can also find the points of intersection of the circle and the line (if they exist).

Note that the method just described is somewhat cumbersome, so Grandpa Taras below also offers an alternative method of determining the relative position of a circle and a line. He says that in high school they prove the formula for the distance from a point $M_0(x_0;y_0)$ to the line $ax+by+c=0$: $h=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Using this formula, we can find the corresponding distance, then compare it to the radius of the circle and draw a conclusion. Both methods of establishing the relative position of a circle and a line are illustrated with examples.

Also from the 7th grade mathematics course, students know that there are 5 types of mutual arrangement of two circles:

- circles have external contact;
- circles have internal contact;
- circles have two common points;
- circles have no common points and one of them is inside a flat circle bounded by another;
- circles have no common points and none of them is inside a flat bounded by another.

The analytical method of establishing their mutual location requires determining the coordinates of the centers and radii of both circles according to their equations, as well as calculating the distance between their centers according to the formula for the length of the segment in the PDSK. After that, this distance should be compared with the sum of the radii and the modulus of their difference and draw the appropriate conclusion. An example of establishing the mutual location of two circles using an analytical method is also given in the paragraph. The material of the paragraph is completed by an educational video on using a graphical calculator to establish the mutual location of a circle and a line and two circles. This video is mandatory for all students to study. Also, from the section "Grandpa Taras's curiosities" of the paragraph, interested students can learn about two more equations of a line - in segments on the axes and parametric.

The paragraph "Scalar product of vectors and its application" is studied optionally. The motivation for studying the scalar product is the determination of the work of a constant force (applied by Tetianka while transporting vegetables in the country) on moving a cart at an angle to the direction of movement of this cart. According to the formula from the physics course, the work A performed by a constant force $\vec{F}$ when moving a body from point A to point B, that is, by the vector $\overrightarrow{AB}$, calculate by the formula: $A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi$, where φ is the angle between the direction of the force and the direction of movement. Thus, the result of the action on two vectors $\vec{F}$ і $\overrightarrow{AB}$ is a *number* A. Such an action on vectors is atypical and requires separate study.

To correctly define the scalar product of vectors in paragraph 28, first introduce the definition of trigonometric functions of an angle whose degree measure is in the range from 0 to 180 degrees. The method of this introduction is traditional, using a single semicircle. After that, introduce the definition of the scalar product of vectors given by their coordinates in the RCCS (Shkolnyi et al. 2025): «The scalar product of the non-zero vectors $\vec{a}(a_1; a_2)$ and $\vec{b}(b_1; b_2)$ is called the number $a_1b_1 + a_2b_2$. The dot product of vectors is denoted by $\vec{a} \cdot \vec{b}$, that is $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.» Further, based on this definition, the properties of the scalar product of vectors are formulated and proven. It is also advisable to draw students' attention to the fact that the scalar product of a vector $\vec{a}$ on the vector $\vec{a}$ (that is, the product $\vec{a} \cdot \vec{a}$) is denoted by $\vec{a}^2$ and is called the scalar square of the vector $\vec{a}$. Then, by the definition of the dot product, it is easy to see that the scalar square of a vector is equal to the square of its length.

Finally, after all the preparatory work, we can proceed to the answer to the question of the motivational block regarding the application of the scalar product of vectors in practice. To do this, first the definition of the angle between two vectors is introduced, and then the following theorem is formulated and proved in the educational video: "The scalar product of non-zero vectors is equal to the product of their lengths by the cosine of the angle between them." From this it follows that the work *A* performed by a constant force $\vec{F}$ when moving a body from point *A* to point *B*, can be written as the scalar product of these vectors: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

At the end of the section, mathematical applications of the scalar product of vectors are considered for finding the angle between given vectors and deriving the equation of a line passing through a point $A(x_0; y_0)$ of the line perpendicular to a given vector (normal vector) $\vec{n}(a; b)$. This equation has the form $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ and it can also be reduced by simple transformations to the general equation of a straight line $ax + by + c = 0$. It is also worth noting to curious students that the coefficients of the general equation of any line have a geometric meaning - they are the coordinates of the normal vector of this line.

CONCLUSIONS AND PROSPECTS FOR FURTHER RESEARCH

In our opinion, the above-described study of coordinates and vectors on the plane will contribute to the achievement of both goals set by the authors of the program (Vasylyshyn et al. 2023) and the textbook (Shkolnyi et al. 2025):

1) teachers of physics and other natural sciences will have a tool for solving problems in their educational field using the vector-coordinate method;
2) mathematics teachers will have the opportunity in the 9th grade to mathematically correctly introduce the concept of geometric transformation of the plane and its analytical task and, based on the method of geometric transformations, also quite correctly give an algorithm for constructing a graph of a general quadratic function.

Piloting and testing of the model program (Vasylyshyn et al. 2023) and the textbook (Shkolnyi et al. 2025) during the 2024-2025 academic year in educational institutions of Ukraine shows that students quite positively perceive such a place and such a method of studying coordinates and vectors on the plane and use them appropriately both in mathematics and in other educational fields. However, we note that a thorough study of the effectiveness of such a method of mastering this material by students of the 8th grade of the National School is still ahead, since the aforementioned program and textbook are used in the educational process, in fact, for only one academic year. However, we are convinced of the feasibility and prospects of the described approach and will continue to use it to form key competencies of students in the context of the "New Ukrainian School" reform.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no financial, personal, or other interests that could be considered a potential conflict of interest regarding the publication of this article.

FUNDING SOURCES

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

DATA AVAILABILITY

This is a theoretical study and does not involve the use of any additional datasets.

USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE (AI) TOOLS

AI tools were not used in the writing of this work.

REFERENCES

1. Bakhrushyn, V. (2019). *Matematyja u PISA-2018: resultaty I vysnovky [Mathematics in PISA-2018: results and conclusions].* Retrieved from https://nus.org.ua/articles/matematyka-u-pisa-2018-rezultaty-i-vysnovky/ (in Ukrainian)
2. Cabinet of Minister of Ukraine (CMU) (2018). *Derzhavnyi standart pochatkovoyi osvity [State standard of primary education]*. Retrieved from https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-п#Text. (in Ukrainian)
3. Cabinet of Minister of Ukraine (CMU) (2020). *Derzhavnyi standart bazovoyi serednioyi osvity [State standard of basic secondary education].* Retrieved from https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898. (in Ukrainian)
4. Cabinet of Minister of Ukraine (CMU) (2024). *Derzhavnyi standart profilnoyi serednioyi osvity [State standard of profiled secondary education].* Retrieved from https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-п#Text (in Ukrainian)
5. Demetriadou, H., & Gagatsis, A. (2001). Classical versus vector geometry in problem solving. An empirical research among Greek secondary pupils. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *32*(1), 105-125. https://doi.org/10.1080/00207390120135
6. Gueudet-Chartier, C. (2004). Should we teach linear algebra through Geometry? *Linear Algebra and Its Applications*, *379*, 491-501. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00481-6
7. Institute of Modernizing of the Content of Education (IMCE) (2024). *Elektronni versiyi pidruchnykiv [Electronic versions of textbooks].* Retrieved from https://imzo.gov.ua/pidruchniki/elektronni-versiyi-pidruchnikiv/ (in Ukrainian)
8. Jensen, J.H., Niss, M, & Jankvist, U.T. (2017). Problem solving in the borderland between mathematics and physics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(1), 1-15. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1206979
9. Matiash, O., & Shkolnyi, O. (2025). Teaching mathematics under extreme condition: Ukrainian realities and experience. *Mathematics and Informatics, 68*(2), 204-221. https://doi.org/10.53656/math2025-2-6-tmu
10. Mazorchuk, M., Vakulenko, T., Tereshchenko, V., Bychko, G., Shumova, K., Rakov, S., & Gorokh, V. (2019). *Nacionalnyi zvit za rezultatamy PISA-2018 [National news on the results PISA-2018]*. Retrieved from https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf (in Ukrainian)
11. MES of Ukraine (2024). *Matematyka. Modelni program dlia 5-6 I 7-9 klasiv NUSh [Mathematics. Model programs for grades 5-6 and grades 7-9 of the NUS]*. Retrieved from https://osvita.ua/school/program/program-5-9/83194/ (in Ukrainian)
12. New Ukrainian School (NUS) (2024). *Offical site of the project "New Ukrainian School"*. Retrieved from https://nus.org.ua
13. Shkolnyi, O. (2023). New approach to studying mathematics in the 7th grade within the New Ukrainian School project. In "*Educația în contextul provocărilor societale: paradigme, inovații, transfer tehnologic*: Materialele Conferinței științifice naționale cu participare internațională, 17 noiembrie 2023, Chişinău". Chişinău. Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chişinău.
14. Shkolnyi, O. (2024). Metodychni osoblyvosti vyvchennia lohichnyh osnov matematyky v integrovanomu kursi "Matematyka" dlia ucniv 7 rlasu NUSh [Methodological features of studying the logical foundations of mathematics in the integrated course "Mathematics" for 7th grade students of the NUS]. *Didactics of Mathematics: theory experience, innovation*, *2*, 20-28. (in Ukrainian)
15. Shkolnyi, O., Nelin, Ye., Mylianyk, A., & Prostakova, Yu. (2025). *Matematyka: pidruchnyk integrovanoho kursu dlia 8 klasu (u 2 chastynah) [Mathematics: integrated course textbook for the 8th grade (in 2 parts)]*. Kharkiv. Ranok. (in Ukrainian)
16. Vakulenko, T., Gorokh, V., Rakov, S., & Tereshchenko, V. (2021). *PISA-2022: Ramkovyi document z matematyky [PISA-2022: Mathematics Framework Document].* Retrieved from http://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/12/pisa_2022_ramkovyj_dokument_matematyka.pdf (in Ukrainian)
17. Vasylyshyn, M., Mylianyk, A., Pratsiovytyi, M., Prostakova, Yu., & Shkolnyi, O. (2021) *Modelna navchalna programa "Matematyka. 5-6 klasiv" dlia zakladiv zahalnoi serednioyi osvity [Model educational program "Mathematics. Grades 7-9" for secondary education institutions].* Retrieved from https://osvita.ua/doc/files/news/831/83147/Matem_5-6-kl-Vasylyshyn_ta_in_14_07_1_1.pdf (in Ukrainian)
18. Vasylyshyn, M., Mylianyk, A., Pratsiovytyi, M., Prostakova, Yu., & Shkolnyi, O. (2023). *Modelna navchalna programa "Matematyka. 7-9 klasy" dlia zakladiv zahalnoi serednioyi osvity [Model educational program "Mathematics. Grades 7-9" for secondary education institutions].* Retrieved from https://osvita.ua/doc/files/news/896/89677/Matematyka_7-9_kl_Vasylyshyn_ta_in_26_07.pdf (in Ukrainian)
19. Ukrainian Center of Education Quality Assessment (UCEQA) (2021). *Oficiinyi zvit pro provedennia v 2021 roci ZNO rexultativ navchannia zdobutyh na osnovi povnoyi zahalnoyi osvity [Official report on the 2021 EIA of learning outcomes achieved on the basis of complete general secondary education].* Retrieved from https://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf (in Ukrainian)
20. Wutchana, U., Bunrangsri, K., & Emarat, N. (2015). Teaching basic vector concepts: A worksheet for the recovery of students' vector understanding. *Eurasian Journal of Physics and Chemistry Education, 7*(1), 18-28. https://doi.org/10.51724/ijpce.v7i1.43

| *Received: 25.09.2025* | *Accepted: 05.11.2025* | *Published: 02.03.2026* |

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Key title: Fìziko-matematična osvìta
Abbreviated key title: Fìz.-mat. osv.

Том 41, № 1
2026

Друкується в авторській редакції
Матеріали подані мовою оригіналу

Відповідальний за випуск
О.В. Семеніхіна

Комп’ютерна верстка
О.М. Удовиченко

Ідентифікатор медіа:
R30-02975

https://fmo-journal.org/

Підп. до друку 02.03.2026.
Формат 60x84/8. Гарнітура Calibri. Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 7.
Ум. фарб.-відб. 7. Обл.-вид. арк. 6,6. Тираж 50 пр. Вид. №8

Видавець:
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
40002, м.Суми, вул.Роменська, 87
Тел. (0542) 68-59-15, (0542) 68-59-72; rector@sspu.edu.ua
Свідоцтво ДК № 231 від 02.11.2000 р.

Виготовлювач:
ФОП Цьома С.П. 40002, м. Суми, вул. Роменська, 100.
Тел.: 066-293-34-29.
Зам. № 7

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
серія ДК, № 5050 від 23.02.2016.