ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2026, 41(2), https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-07
УДК: 372.851

ДИЛАТАЦІЇ ПЛОЩИНИ У ШКМ ТА ТЕОРІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПЛОЩИНИ ДЛЯ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Микола ПРАЦЬОВИТИЙ ✉
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
Інститут математики НАН України, Україна
prats4444@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6130-9413

Наталя ПРАВІЦКА
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна
n.pravitska@chnu.edu.ua
https://orcid.org/0009-0004-7651-9105

Софія РАТУШНЯК
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
Інститут математики НАН України, Україна
ratush404@gmail.com
https://orcid.org/0009-0005-2849-6233

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Геометричні перетворення є важливим компонентом шкільного курсу геометрії та підготовки майбутніх учителів математики. Разом із тим, аналіз змісту шкільних підручників і навчально-методичної літератури свідчить про наявність певних методологічних неточностей у трактуванні понять геометричних перетворень та їх властивостей, замість перетворень площини розглядаються перетворення фігур. Це обумовлює необхідність більш системного й науково обґрунтованого висвітлення теми перетворень подібності та їх окремих підгруп у курсі аналітичної геометрії для майбутніх учителів математики.*

Методи та матеріали. *У дослідженні використано теоретичні методи науково-педагогічного пошуку, зокрема аналіз та узагальнення наукової і навчально-методичної літератури, а також математичні методи доведення і обґрунтування геометричних тверджень.*

Результати. *У статті розглянуто дилатації площини як підгрупу групи перетворень подібності. Проаналізовано їх основні властивості та інваріанти — геометричні властивості фігур і відношення між ними, що зберігаються при відповідних перетвореннях. Доведено, що дилатації площини у групі перетворень вичерпуються гомотетіями, паралельними перенесеннями та їх композиціями. Показано, що дилатації утворюють групу геометричних перетворень, а також наведено теоретичні твердження та приклади задач, які ілюструють застосування цих перетворень у дослідженні геометричних об'єктів.*

Висновки. *Проведене дослідження дозволяє систематизувати уявлення про дилатації площини як підгрупу перетворень подібності та уточнити їх місце у структурі геометричних перетворень. Отримані*

PLANE DILATIONS IN THE SCHOOL MATHEMATICS COURSE AND THE THEORY OF GEOMETRIC TRANSFORMATIONS FOR FUTURE MATHEMATICS TEACHERS

Mykola PRATSIOVYTYI ✉
Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
Institute of Mathematics NAS Ukraine, Ukraine
prats4444@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6130-9413

Natalia PRAVITSKA
Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine
n.pravitska@chnu.edu.ua
https://orcid.org/0009-0004-7651-9105

Sofiia RATUSHNIAK
Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
Institute of Mathematics NAS Ukraine, Ukraine
ratush404@gmail.com
https://orcid.org/0009-0005-2849-6233

ABSTRACT

Formulation of the problem. *Geometric transformations constitute an important component of the school geometry curriculum and the professional training of future mathematics teachers. However, an analysis of school textbooks and educational literature reveals certain methodological inaccuracies in the interpretation of geometric transformations and their properties. This necessitates a more systematic, scientifically grounded presentation of similarity transformations and their particular subgroups in analytical geometry courses for pre-service mathematics teachers.*

Materials and methods. *The study employs theoretical methods of scientific and pedagogical research, including the analysis and synthesis of scientific and educational literature, as well as mathematical methods for proving and substantiating geometric statements.*

Results. *The article examines plane dilations as a subgroup of similarity transformations. Their fundamental properties and invariants — geometric properties of figures and relations between them that are preserved under the corresponding transformations — are analyzed. The connection between dilations, homotheties, and translations of the plane is established. It is shown that dilations form a group of geometric transformations. In addition, the paper presents theoretical statements and examples of problems illustrating the application of these transformations in the study of geometric objects.*

Conclusions. *The conducted research enables the systematization of the concept of plane dilations as a subgroup of similarity transformations and clarifies their place within the structure of geometric transformations. The results can be used in teaching analytical geometry at higher education institutions and in school geometry courses, particularly in elective classes,* *результати можуть бути використані під час викладання аналітичної геометрії у закладах вищої освіти, а також у шкільному курсі геометрії, зокрема на факультативних заняттях, у гуртковій та позакласній роботі. Перспективи подальших досліджень пов'язані з розширенням аналізу підгруп перетворень подібності та їх застосуванням у методиці навчання геометрії.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *геометричні перетворення; перетворення подібності; дилатація; гомотетія; аналітична геометрія; шкільний курс геометрії; гурткова робота в школі; майбутній вчитель математики.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Працьовитий М., Правіцка Н., Ратушняк С. Дилатації площини у ШКМ та теорії геометричних перетворень площини для майбутніх вчителів математики. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 2. С. 71-85. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-07.

mathematical circles, and extracurricular activities. Prospects for further research include expanding the analysis of subgroups of similarity transformations and their application in the methodology of teaching geometry.

KEYWORDS: *geometric transformations; similarity transformations; dilation; homothety; analytical geometry; school geometry curriculum; extracurricular activities in schools; future mathematics teacher.*

FOR CITATION: Pratsiovytyi, M., Pravitska, N., & Ratushniak, S. (2026). Plane dilations in the school mathematics course and the theory of geometric transformations for future mathematics teachers. *Physical and Mathematical Education*, *41*(2), 71-85. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i2-07.

ВСТУП

Постановка проблеми. Ідея перетворення є плідною в математиці і має різнопланові реалізації в різних галузях науки і шкільних навчальних дисциплінах (в алгебрі розглядаються перетворення виразів, рівнянь та нерівностей, в початках аналізу – перетворення графіків функцій). В геометрії вона реалізується через поняття геометричного перетворення площини та простору (бієктивного відображення простору на себе), перетворення фігур, а також в перетвореннях систем координат, які тісно пов'язані і з геометричними перетвореннями, і з перетвореннями графіків функцій.

"Гільберт порівнював геометрію з чудовим садом, в якому кожен може підібрати собі квітку за смаком. Нині сад геометрії розрісся настільки, що навіть фахівцям стало складно орієнтуватися в його заростях." Якщо під квіткою розуміти геометричний об'єкт (фігуру, відношення) або факт (твердження), то геометричний метод (метод геометрії) є букетом, і таких в геометрії чимало. Здатність їх гармонічно поєднувати є вершиною майстерності геометра і тонким інструментом в руках ювеліра-математика. На превеликий жаль, сьогодні геометрія як навчальна дисципліна вимагає захисту. Тоді як саме геометрія формує просторову уяву, просторове бачення, алгоритмічне мислення учня, формує раціональність і альтернативність, допомагає знайти незабутні візуальні інтерпретації співвідношень, нерівностей, залежностей, фактів, які не є суто геометричними. Вона є театром форм і мотиватором математичної творчості.

Серед різноманіття методів геометрії (синтетичний, арифметичний, алгебраїчний, векторний, координатний, геометричних місць точок, кінематичний, фазового укрупнення, додаткового елемента або фігури тощо) почесне місце займає метод геометричних перетворень. Рафінованого формулювання суті цього методу (та, власне, і деяких інших методів) ми не знаходимо у шкільних підручниках. Для розв'язування складних геометричних задач часто доводиться комбінувати різні прийоми та методи. Але коли в міркуваннях використовуються рівність та подібність фігур, рухи (симетрії, переміщення, повороти), гомотетія, перетворення подібності, інверсія, то, безсумнівно, тут задіяні геометричні перетворення, і участь методу ненульова.

Аналіз актуальних досліджень. Геометричні перетворення площини у класах з поглибленим вивченням математики вивчаються у 9 класі. У програмі зазначено тему "Геометричні перетворення", а в підручниках здебільшого реалізовується тема "Перетворення фігур" (Мерзляк та ін., 2017а, 2021). Вона включає пункти (питання): 1) Перетворення (відображення) фігур; 2) Рух. Паралельне перенесення; 3) Осьова симетрія; 4) Центральна симетрія; 5) Поворот; 6) Гомотетія. Подібність фігур. 7) Інверсія (для ознайомлення). Вивченню цієї теми передують пропедевтична робота і вивчення важливих тем "Рівність трикутників" та "Подібність трикутників" (8 клас), які суттєво розширюють арсенал засобів розв'язування геометричних задач, в першу чергу, на доведення та побудову.

Існує кілька педагогічних проблем, пов'язаних з вивченням геометричних перетворень площини. Перша з них стосується змісту програм і викладу теоретичного матеріалу в шкільних підручниках, друга пов'язана з готовністю вчителя до навчання учнів геометричним перетворенням площини, іноді просто з недостатньою підготовленістю до професійної діяльності випускника педагогічного університету (враховуючи існуючі сьогоднішні непрості умови підготовки педагогічних та науково-педагогічних кадрів), малочисельністю якісної україномовної навчальної літератури і для школярів, і для майбутніх та діючих вчителів математики, зокрема для самоосвіти вчителів. Проблеми загострюються через альтернативність програм та підручників. В контексті першої проблеми має існувати конструктивний діалог науковців, методистів, досвідчених педагогів і авторів шкільних підручників з метою вдосконалення навчальної літератури. Ґрунтовні обговорення, зважені альтернативи і виважені рішення могли б сприяти покращенню ситуації. А для цього має бути платформа для обговорення.

Стосовно другої проблеми, варто зауважити, що сьогодні майбутні вчителі математики готуються до професійної діяльності в складних освітніх реаліях (змішаний формат освітнього процесу, на заваді інтернет і штучний інтелект). Вихід один - має бути якісне дидактичне забезпечення освітнього процесу і в достатній кількості наявна навчальна література для самоосвіти. Зрозуміло, що вказані проблеми тісно пов'язані між собою, в першу чергу, коли це стосується змісту навчального матеріалу.

Зміст теми «Геометричні перетворення» (чи змістової лінії) у шкільних підручниках можна суттєво збагатити, додавши аналітичну складову (формули рухів, гомотетії, перетворення подібності), яка є засобом "найбільш точного висвітлення фактів" (Ф.Клейн). Це не вимагає додаткових часових ресурсів.

На наш погляд, дещо дивним є те, що в загальноосвітній школі (та власне і в усій літературі з елементарної геометрії) до цих пір основним методом викладу та вивчення геометричних перетворень є синтетичний метод (від означень, фактів та їх обґрунтувань до застосувань). Тоді як векторний і координатний є значно потужнішими і більш універсальними. Хоча формули для перетворень площини повільно почали пробивати собі дорогу до шкільних підручників (Мерзляк та ін., 2017b, 2017c; Школьний та ін., 2025). Взаємодоповнюваність та гармонізація підходів, прийомів та методів в геометрії завжди мали лише позитивний ефект.

Виклад матеріалу у шкільних підручниках вимагає дещо вищого рівня науковості, який полягає в несуперечливості з науковими фактами і загальноприйнятими науковими означеннями понять та відношень, і має відповідати загальноприйнятим в науці домовленостям та трактуванням фактів, що, на жаль, не спостерігається на практиці. В шкільних підручниках можна зустріти "означення – це твердження…", що "перетворення і відображення – це одне і те саме". Це грубі методологічні помилки.

Зміст шкільних підручників та посібників ми розглядаємо у взаємозв'язку з готовністю вчителя працювати за цим підручником (посібником), а це веде нас до процесу підготовки майбутнього вчителя математики в університеті, до змісту суто геометричних та методичних університетських курсів, в яких розглядаються (вивчаються) геометричні перетворення. У вітчизняній і зарубіжній математичній літературі геометричні перетворення посідають помітне місце як у власне теоретичному, так і в навчально-методичному вимірах. З одного боку, класичні праці з евклідової геометрії та геометричних задач демонструють високу продуктивність перетворень як інструмента доведення, побудови й оптимізаційних міркувань. Це простежується в роботах, присвячених поглибленій евклідовій геометрії та задачам на екстремуми, де перетворення фактично виступають мовою геометричного аналізу фігур і відношень між ними (Andreescu et al., 2006; Johnson, 2013). З іншого боку, у вітчизняній практиці метод перетворень тривалий час входив до змісту шкільної та позашкільної математичної освіти через підручники, факультативні курси й задачники, у яких учням пропонувалося працювати з переміщеннями, подібністю, симетріями та іншими видами відображень як із засобом розв'язування задач різного рівня складності (Колмогоров та ін., 1972; Понарин & Скопец, 1981; Бевз та ін., 1982; Готман & Скопец, 1988; Погорєлов, 1993; Вивальнюк та ін., 1998). Така лінія засвідчує, що тема геометричних перетворень має не епізодичний, а системний характер у математичній освіті, хоча способи її подання, рівень строгості й методичні акценти істотно різняться.

Водночас окремий напрям становлять праці, у яких геометричні перетворення осмислюються як самостійний об'єкт для вивчення та як основа підготовки майбутнього вчителя математики. Насамперед ідеться про видання, де послідовно розкрито рухи площини, перетворення подібності, ортогональні та афінні перетворення, а також окреслено теоретико-груповий підхід до геометрії, що дає змогу побачити за окремими видами перетворень цілісну систему інваріантів і структурних зв'язків (Боровик та ін., 2004; Працьовитий, 2007, 2013a, 2013b; Кравчук, 2018). Для методики навчання математики істотними є також дослідження, у яких розглянуто окремі перетворення як предмет спеціального аналізу, зокрема паралельне перенесення та поворот у геометричному середовищі (Ленчук, 2016; Ленчук & Працьовитий, 2019). У публікаціях зосереджено увагу не лише на змісті теми, а й на засобах її реалізації в освітньому процесі: використанні комп'ютерних інструментів для візуалізації перетворень (Семеніхіна & Друшляк, 2014) і на оновленні шкільного курсу математики в умовах НУШ, де геометричні перетворення знову набувають дидактичної ваги як засіб формування операційного бачення фігури та функціонального розуміння залежностей між її образами (Школьний та ін., 2025; Школьний, 2025). Отже, аналіз наявних джерел дає підстави стверджувати, що проблема вивчення дилатацій і перетворень подібності лежить на перетині фундаментальної геометрії, шкільної пропедевтики, університетської підготовки вчителя математики та сучасних цифрових практик навчання.

Розділ «Геометричні перетворення площини» є складовою програми з аналітичної геометрії (або геометрії) для майбутніх учителів математики, яка включає колінеації (афінні перетворення) площини та інверсію. Серед вагомих аргументів для відповіді на запитання: Чому майбутні вчителі математики мають ґрунтовно вивчати геометричні перетворення?-- є простий аргумент «тому, що геометричні перетворення вивчаються в школі і не лише в класах з поглибленим рівнем вивчення математики (мова йде про рухи і перетворення подібності, зокрема гомотетію)». Звичайно, це не єдиний аргумент серед найважливіших. Метод геометричних перетворень є одним з основних методів елементарної математики, методів вивчення геометричних об'єктів і методів розв'язування задач (в першу чергу на доведення та побудову). Геометричні перетворення – чудовий засіб для розвитку просторого бачення, конструктивного та аналітичного мислення.

Однією з тем цього розділу аналітичної геометрії є тема «Перетворення подібності». Практична реалізація (змістовне наповнення, висвітлення) цієї теми і всього розділу традиційно здійснюється на координатно-векторній (найбільш сучасній) основі з використанням прямокутної декартової системи координат, оскільки подібність є метричним поняттям. Найбільш яскраво це прослідковується у програмах факультету математики, інформатики та фізики УДУ імені Михайла Драгоманова. Концептуально весь розділ має оболонку групового погляду на геометрію і її різні теорії, з точки зору якого евклідова геометрія є теорією інваріантів групи перетворень подібності, що включає рухи, а афінна геометрія є теорією інваріантів групи афінних перетворень, підгрупу якої утворюють перетворення подібності. Кожна з цих груп має ряд підгруп, які цікаві з різних точок зору. Одній з підгруп групи перетворень подібності (а саме – групі дилатацій), її інваріантам – властивостям фігур та відношень, що зберігаються при будь-якому перетворенні з цієї групи, присвячена дана робота.

Мета статті. Метою статті є дослідження дилатацій площини як підгрупи перетворень подібності, а також аналіз їх інваріантів – властивостей фігур і відношень, що зберігаються при будь-якому перетворенні з цієї групи.

Дана робота адресована в першу чергу вчителям математики для самоосвіти і студентам спеціальності середня освіта (математика), викладачам аналітичної геометрії, методистам і авторам шкільних підручників.

Матеріал можна використати на факультативних заняттях і в системі гурткової та позакласної роботи в школі, а також в процесі виконання курсових робіт студентами спеціальності "Середня освіта (математика)".

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі використано теоретичні методи дослідження, зокрема аналіз наукової та навчально-методичної літератури з геометрії та методики її викладання, узагальнення та систематизацію наукових підходів до вивчення геометричних перетворень. Для дослідження властивостей дилатацій площини застосовано методи аналітичної геометрії, координатно-векторний підхід та елементи теорії груп геометричних перетворень.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Перетворення площини

Геометричним перетворенням площини називається взаємно однозначне, тобто бієктивне (одночасно ін’єктивне і сюр’єктивне), відображення площини на себе. Грубою методологічною помилкою є ототожнення перетворення і відображення. Якщо $f(M) = M'$, то M' називається образом точки M, а точка M – прообразом точки M'. Точки M і M' називаються відповідними при перетворенні f. *Інваріантною точкою* перетворення f називається точка M, для якої $f(M) = M$. Найпростішим прикладом перетворення площини є тотожне перетворення. Воно кожну точку площини переводить саму в себе і є важливим в сім'ї всіх перетворень площини.

Образом фігури Ф під дією перетворення φ називається фігура $\Phi' = \varphi(\Phi)$, кожна точка якої є образом деякої точки фігури Ф. Спільні властивості, включаючи числові характеристики, довільних двох фігур Ф і $\Phi' = \varphi(\Phi)$, називаються *інваріантами* перетворення φ.

При заданій прямокутній декартовій системі координат формули

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y), \end{cases}$$

які встановлюють зв’язок між координатами образу $M'(x'; y')$ і координатами прообразу $M(x; y)$ при перетворенні f, називають *аналітичним заданням перетворення* f або просто *формулами перетворення* f (тут під $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ розуміються математичні вирази, які містять змінні x та y). Наприклад, формули

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x + 2x_0, \\ y' = -y + 2y_0, \end{cases}$$

аналітично визначають тотожне перетворення і симетрію відносно точки $C(x_0; y_0)$ відповідно. Останнє перетворення ще називають *центральною симетрією* або *розворотом* (Коксетер & Грейтцер, 1978).

Зрозуміло, що не будь-яка пара виразів $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ визначають перетворення. Наприклад, формули $x' = |x| + 1$, $y' = x^2 - y$ не задають перетворення площини, оскільки дві різні точки $A(-1; 2)$ і $B(1; 2)$ відображаються в одну точку $A'(2; -1)$, тобто відображення, задане цими формулами, не має властивості ін'єктивності.

Не задають перетворення і формули $x' = x + 3y + 1$, $y' = 2x + 6y - 7$, оскільки всі точки площини під дією цього відображення переводяться в точки прямої $l: y = 2x - 9$. Тому відображення, задане вказаними формулами, не володіє властивістю сюр'єктивності. Скласти формули перетворення площини означає в одній і тій же системі координат пов’язати координати довільної точки площини з координатами її образу.

Два перетворення площини f_1 і f_2 називаються (вважаються) *рівними*, якщо $f_1(\mathrm{M}) = f_2(\mathrm{M})$ для будь-якої точки М.

Одним з центральних понять в теорії геометричних перетворень є поняття *композиції перетворень*. Це бінарна алгебраїчна операція над перетвореннями, яку іноді ще називають “суперпозицією перетворень”.

Композицією впорядкованої пари перетворень f_1 і f_2 називається перетворення $f = f_2 \circ f_1 = f_2(f_1)$, яке є послідовним виконанням перетворень f_1 і f_2:

$$f(M) = [f_2 \circ f_1](M) = f_2\big(f_1(M)\big) = f_2(M') = M''.$$

Ця операція, взагалі кажучи, не є комутативною, тобто $f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$, оскільки дві осьові симетрії, осі яких перетинаються не під прямим кутом, не комутують.

Композиція осьової симетрії і паралельного перенесення на вектор, який паралельний осі, називається *ковзною симетрією*. В шкільному курсі математики це перетворення як окремий вид руху не розглядається, але воно важливе у контексті класифікації рухів 2-го роду за кількості інваріантних точок (теорема Шаля).

Теорема 1. *Якщо G – множина всіх перетворень площини, то пара $(G, \circ)$ є некомутативною групою.*

Дві фігури Ф і Φ' називаються *G-еквівалентними* (або еквівалентними відносно групи перетворень G), якщо в групі G існує перетворення g, яке переводять фігуру Ф у фігуру Φ'.

Тотожне перетворення, центральна, осьова та ковзна симетрії, паралельне перенесення і поворот є прикладами перетворень площини, які зберігають відстані, тобто відстань між довільними двома точками рівна відстані між їх образами при цих перетвореннях. Такі перетворення називаються *рухами* (переміщеннями або ізометричними перетвореннями). Кожен рух є або осьовою симетрією або композицією не більше, ніж трьох осьових симетрій. Множина всіх рухів відносно операції композиції перетворень утворює групу. Дві фігури (зокрема два трикутники) називаються *рівними* (або *конгруентними*), якщо існує рух, який переводить одну фігуру в іншу.

Більш загальним перетворенням площини, ніж рух, є перетворення подібності. Воно зберігає відношення довжини образу відрізка до довжини його прообразу. Кожен рух є перетворенням подібності. Гомотетія з коефіцієнтом $m \neq \pm 1$ є одним з найпростіших перетворень подібності, відмінних від руху.

2. Група перетворень подібності

Перетворенням подібності з коефіцієнтом $k > 0$ називається перетворення площини f, яке довільним двом точкам A і B ставить у відповідність точки $A' = f(A)$ і $B' = f(B)$ такі, що виконується рівність $|A'B'| = k|AB|$.

Трикутник ABC вважається *додатно орієнтованим або правоорієнтованим*, якщо обхід його вершин в порядку A, B, C здійснюється проти годинникової стрілки, і *від'ємно (або ліво) орієнтованим* – в протилежному випадку. Зауважимо, що трикутники ABC і BAC протилежно орієнтовані, а трикутники ABC і BCA однаково орієнтовані.

Зауваження. Кожне перетворення подібності однорідно діє на всі трикутники, тобто або зберігає орієнтацію всіх трикутників, а саме всі трикутники переводить у трикутники тієї ж орієнтації, або змінює її на протилежну. Тому для перевірки, чи зберігає перетворення орієнтацію, досить розглянути один трикутник і його образ. Дане твердження є в повні самостійним фактом теорії, а його допоміжна роль полягає в обґрунтуванні коректності наступних означень перетворень першого та другого роду.

Перетворення подібності, яке кожен трикутник переводить в трикутник тієї ж орієнтації, називається *перетворенням 1-го (першого) роду*, а перетворення, яке кожен трикутник переводить в трикутник протилежної (іншої) орієнтації, називається *перетворенням 2-го (другого) роду* .

Кожне перетворення подібності згідно з теоремою про структуру перетворення подібності є композицією гомотетії і руху, а тому аналітично задається формулами:

$$f = g \circ h\colon \begin{cases} x' = kx\cos\alpha - \varepsilon ky\sin\alpha + x_0, \\ y' = kx\sin\alpha + \varepsilon ky\cos\alpha + y_0, \end{cases} \varepsilon = \pm 1, k > 0.$$

Для рухів 1-го роду $\varepsilon = 1$, а для рухів 2-го роду $\varepsilon = -1$.

Якщо ввести позначення $a_1 \equiv k\cos\alpha$, $k\sin\alpha \equiv a_2$, то формули перетворення подібності набудуть вигляду:

$$\begin{cases} x' = a_1x - \varepsilon a_2y + x_0, \\ y' = a_2x + \varepsilon a_1y + y_0. \end{cases} \text{ де } \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = k.$$

Зауважимо, що виведення перших формул грунтується на відомих формулах взаємозв'зку координат однієї і тієї ж точки у різних декартових системах координат і на теоремі про структуру перетворення подібності. Другі формули легко вивести вповні автономним шляхом, використовуючи означення перетворення подібності та формулу відстані між двома точками.

Форма геометричної фігури – це спільна властивість всіх подібних між собою геометричних фігур. Кажуть, що дві фігури мають однакову форму, якщо існує перетворення подібності, яке одну з фігур переводить в іншу.

Дилатацією площини називається перетворення подібності, яке кожну пряму переводить у паралельну їй пряму або саму в себе.

Іноді дві прямі площини, які збігаються, теж вважають паралельними. Це не приводить до протиріч, але для аналітичної геометрії це створює незручності.

Термін «дилатація» (від латинського dilatation – розширення) не набув широкого використання в математиці, можливо вперше він використаний в роботі (Коксетер & Грейтцер, 1978).

З означення зрозуміло, що дилатація зберігає напрям прямої (колінеарність векторів). Це є видове означення окремого класу перетворень площини через головний інваріант деякої підгрупи групи всіх перетворень подібності площини. З'ясуємо вміст цієї групи.

3. Паралельне перенесення площини – дилатація

Паралельним перенесенням площини на вектор $\vec{s}$ називається перетворення, яке точці M ставить у відповідність таку точку M', що виконується векторна рівність: $\overrightarrow{MM'} = \vec{s}$.

Паралельне перенесення площини f на вектор $\vec{s} = (a; b)$ в прямокутній декартовій системі координат задається формулами: $\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}$

Справді, якщо $M(x; y)$, $f(M) = M'(x'; y')$, то $\overrightarrow{MM'} = (x' - x; y' - y)$. Тому з рівності векторів $\overrightarrow{MM'}$ і $\vec{s} = (a; b)$ отримуємо формули паралельного перенесення. Маючи формули паралельного перенесення, легко дійти висновку, що паралельне перенесення однозначно визначається парою відповідних точок.

Лема 1. *Якщо дії двох паралельних перенесень p_1 і p_2 на деяку точку площини збігаються, то вони рівні.*

Доведення. Нехай паралельні перенесення p_1 і p_2 задані формулами:

$$p_1\colon \begin{cases} x' = x + a_1, \\ y' = y + b_1, \end{cases} \qquad p_2\colon \begin{cases} x' = x + a_2, \\ y' = y + b_2, \end{cases} \tag{1}$$

і $p_1(M_0) = p_2(M_0)$, де $M_0(x_0; y_0)$. Тоді

$$\begin{cases} x_0 + a_1 = x_0 + a_2, \\ y_0 + b_1 = y_0 + b_2' \end{cases}$$

звідки $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Отже, $p_1 = p_2$.

Лема 2. *Паралельне перенесення зберігає відстані, тобто є рухом*.

Доведення. Нехай $M'(x_1'; y_1')$ є образом точки $M_1(x_1; y_1)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{s} = (a; b)$. Тоді $M_1'(x_1 + a; y_1 + b)$. Якщо $M_2'(x_2'; y_2') = f(M_2)$, де $M_2(x_2; y_2)$. Тоді $M_2'(x_2 + a; y_2 + b)$ і

$$|M_1'M_2'| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |M_1M_2|,$$

що й вимагалось довести.

Лема 3. *Паралельне перенесення площини на ненульовий вектор $\vec{s}$ переводить пряму, яка не паралельна вектору $\vec{s}$, в паралельну пряму, а пряму паралельну вектору $\vec{s}$ – саму в себе*.

Доведення. Прообразом прямої $l': Ax' + By' + C = 0$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{s} = (a;b)$ є пряма $l: A(x+a) + B(y+b) + C = 0$, яка є паралельною прямій l' за умови, коли вектор напряму $\overrightarrow{s_{l'}} = (-B;A)$ прямої l' неколінеарний вектору $\vec{s} = (a;b)$.

Прямі l'і l збігаються тоді і лише тоді, коли

$$\frac{A}{A} = \frac{B}{B} = \frac{Aa + Bb + C}{C},$$

а ця умова рівносильна умові $Aa + Bb = 0$, тобто

$$-\frac{B}{a} = \frac{A}{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{s_l}||\vec{s}.$$

Умова $l'||l$ рівносильна $Aa + Bb \neq 0$, тобто $\overrightarrow{s_l} \neq \vec{s}$. Лему доведено.

Наслідок. *Паралельне перенесення площини має властивість: кожну пряму переводить у паралельну пряму або саму в себе, тобто є дилатацією.*

Лема 4. *Паралельне перенесення є рухом 1-го роду*.

Доведення. Нехай p – паралельне перенесення на вектор $\vec{s}$. Він у системі координат Oxy, напрям осі абсцис якої збігається з напрямом вектора $\vec{s}$, задається формулами:

$$\begin{cases} x' = x + s, \\ y = y, \end{cases} \text{ де } s = |\vec{s}|.$$

Розглянемо трикутник OAB, де $O(0;0)$, $A(s;0)$, $B(0;1)$ і його образ $O'A'B'$. Тоді $O'(s;0)$, $A'(2s;0)$, $B'(s;1)$. Очевидно, що трикутники OAB і $O'A'B'$ мають однакову праву (додатну) орієнтацію. Тому паралельне перенесення є рухом першого роду.

Теорема 2. *Множина P всіх паралельних перенесень, включаючи перенесення на нульовий вектор (тотожне перетворення), разом з операцією «композиція перетворень» утворює комутативну групу*.

Доведення. Справді, якщо маємо два паралельні перенесення (формула 1), то їх композиції задаються формулами:

$$p_1 \circ p_2: \begin{cases} x' = x + (a_1 + a_2), \\ y' = y + (b_1 + b_2), \end{cases} \quad p_2 \circ p_1: \begin{cases} x' = x + (a_2 + a_1), \\ y' = y + (b_2 + b_1), \end{cases}$$

з яких бачимо, що $p_2 \circ p_1 = p_1 \circ p_2$ і перетворення $p = p_2 \circ p_1 = p_1 \circ p_2$ є паралельним перенесенням площини на вектор $\vec{s} = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$. Те, що обернене перетворення до паралельного перенесення на вектор $\vec{s}$ є паралельним перенесенням на вектор $-\vec{s}$ очевидно. Тому згідно з критерієм підгрупи множина P є групою, причому комутативною. Теорему доведено.

Теорема 3. *Паралельне перенесення на вектор* $\vec{s} = (a;b)$ *можна подати у вигляді композиції двох осьових симетрій з паралельними осями, які перпендикулярні вектору* $\vec{s}$ *і віддалені одна від одної на відстань* $\frac{1}{2}|\vec{s}|$.

Доведення. Нехай l_1, l_2 – дві прямі перпендикулярні вектору $\vec{s}$, відстань між якими $\frac{1}{2}|\vec{s}|$. Розглянемо таку прямокутну декартову систему координат XOY, що $l_1 \subset Ox$, $\vec{s} \upuparrows \vec{j}$. Якщо $|\vec{s}| = s$, то $\vec{s} = (0;s)$, $l_2: y = \frac{1}{2}s$. Тоді осьові симетрії з осями l_1, l_2 аналітично задаються відповідними формулами

$$f_1: \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \end{cases} \quad f_2: \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y + s, \end{cases}$$

а їх композиція

$$f_2 \circ f_1: \begin{cases} x'' = x' = x, \\ y'' = -y' + s = -(-y) + s = y + s \end{cases}$$

є паралельним перенесенням на вектор $\vec{s}$. Теорему доведено.

Розглянемо задачі на застосування паралельного перенесення площини.

Задача 1. Два ізометричних кола радіуса r мають зовнішній дотик в точці K. Хорди KA і KB цих кіл перпендикулярні. Знайти відстань між точками A і B.

Розв'язання. Нехай $KC -$ діаметр кола, яке містить точку B, тоді кут $\angle CBK = \frac{\pi}{2}$, $BC||AK$, як два перпендикуляри до однієї прямої KB і $KA = CB$. Паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{KC}$ точку A переводить в точку B. Отже, $|AB| = |KC| = 2r$.

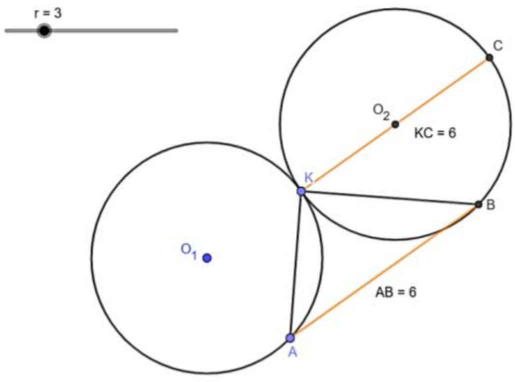

Рис. 1

Джерело: авторська розробка

Задача 2. Два рівних (конгруентних) кола радіуса R перетинаються в точках M і N. Точки P і Q цих кіл належать їх лінії центрів і знаходяться в одній півплощині з межею MN. Довести, що $|MN|^2 + |PQ|^2 = 4R^2$.

Розв'язання. Нехай O і O_1 – центри заданих кіл. Розглянемо паралельне перенесення на вектор $\vec{s} = \overrightarrow{OO_1}$. Воно перше коло ω переведе в друге коло ω_1, точку $M \in \omega$ в точку $M_1 \in \omega_1$, причому $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{MM_1} \perp \overrightarrow{MN}$. Тоді трикутник NMM_1 є прямокутним і вписаним в коло заданого радіуса R. За теоремою Піфагора $|MN|^2 + |PQ|^2 = 4R^2$.

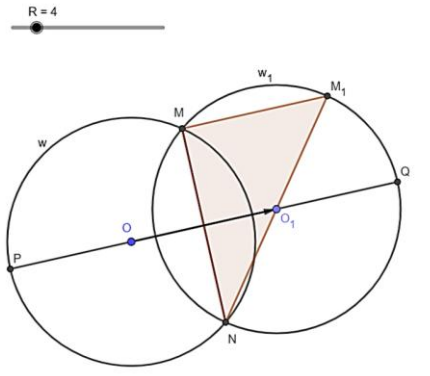

Рис. 2
Джерело: авторська розробка

Задача 3. Дано випуклий чотирикутник $ABCD$. Від точок A і C відкладено вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$, а від точок B і D відкладено вектор $\vec{b} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{DD_1}$. Довести, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ випуклий і рівновеликий з $ABCD$.

Розв'язання. Паралельне перенесення площини на вектор $\vec{a}$ діагональ AC чотирикутника $ABCD$ переводить у діагональ A_1C_1 чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$. Паралельне перенесення площини на вектор $\vec{b}$ діагональ BD чотирикутника $ABCD$ переводить у діагональ B_1D_1 чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$.

Оскільки чотирикутник $ABCD$ випуклий, то точка $O = AC \cap BD$ перетину його діагоналей є внутрішньою для чотирикутника $ABCD$. Паралельне перенесення зберігає відстані, тому відповідні діагоналі чотирикутників $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ рівні, точка $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$ перетину діагоналей A_1C_1 і B_1D_1 є образом точки $O = AC \cap BD$ при обох паралельних перенесеннях. Тому точка O_1є внутрішньою для чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, а отже, чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є випуклим.

Оскільки паралельне перенесення кожну пряму переводить у паралельну пряму або саму в себе і зберігає відстані, то діагоналі чотирикутників рівні і рівні кути між діагоналями. Враховуючи те, що площа випуклого чотирикутника може бути обчислена як півдобуток довжин діагоналей і синуса кута між ними, робимо висновок про рівновеликість чотирикутників.

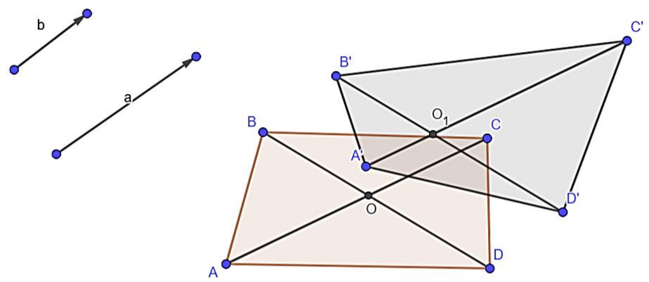

Рис. 3
Джерело: авторська розробка

4. Гомотетія – частковий випадок дилатації

Гомотетією площини з центром C і коефіцієнтом $m \neq 0$ називається перетворення площини, яке точці M ставить у відповідність точку M' таку, що виконується векторна рівність: $\overrightarrow{CM'} = m\overrightarrow{CM}$.

З означення бачимо, що при $m = 1$ гомотетія є тотожним перетворенням, а при $m = -1$ – центральною симетрією. В решті випадків гомотетія не є рухом.

Гомотетія з центром $C(c; d)$ і коефіцієнтом m в афінній і прямокутній декартовій системі координат задається формулами:

$$\begin{cases} x' = mx + (1-m)c, \\ y' = my + (1-m)d, \end{cases}$$

зокрема

$$\begin{cases} x' = mx, \\ y' = my, \end{cases}$$

якщо центр $\mathrm{C}(0; 0)$ є початком системи координат.

Справді, якщо $C(c;d)$, $M(x;y)$, $M'(x';y')$, то $\overrightarrow{CM'} = (x'-c; y'-d)$, $m\overrightarrow{CM} = (m(x-c); m(y-d))$ і з рівності $\overrightarrow{CM'} = m\overrightarrow{CM}$ отримуємо формули

$$\begin{cases} x'-c = m(x-c), \\ y'-d = m(y-d), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = mx + (1-m)c, \\ y' = my + (1-m)d. \end{cases}$$

Лема 5. *Гомотетія з коефіцієнтом $m \neq 1$ переводить пряму, яка не проходить через центр гомотетії, в паралельну їй пряму, а пряму, яка проходить через центр гомотетії – в себе*.

Доведення. Нехай $l: Ax + By + C = 0$ – задана пряма, l' – її образ. Тоді

$$l': A \cdot \frac{1}{m} x' + B \cdot \frac{1}{m} y' + C = 0 \Leftrightarrow Ax' + By' + mC = 0.$$

Звідки $l || l'$, якщо $C \neq 0$, тобто пряма не проходить через початок координат (центр гомотетії) і $l = l'$, якщо $C = 0$.

Наслідок. Гомотетія є дилатацією.

Гомотетія має властивості:

1) Гомотетія з коефіцієнтом m є перетворенням подібності з коефіцієнтом $k = |m|$;
2) Гомотетія є перетворенням подібності 1-го роду;
3) Гомотетія переводить кут в рівний йому кут, паралельні прямі – в паралельні, а перпендикулярні – у перпендикулярні;
4) Перетворення, обернене до гомотетії з коефіцієнтом m, є гомотетією з коефіцієнтом $\frac{1}{m}$ і тим же центром;
5) Гомотетія коло переводить у коло, причому образом кола, центр якого збігається з центром гомотетії, є коло, концентричне заданому.

Всі ці властивості гомотетії елементарно аналітично обґрунтовуються з використанням формул гомотетії з центром у початку координат.

Зауважимо, що ці властивості легко обгрунтовуються, використовуючи формули гомотетії з центром в початку координат.

Лема 6. *Композиція двох гомотетій, які відмінні від руху і мають різні центри, є паралельним перенесенням, якщо коефіцієнти гомотетій взаємообернені, і гомотетією -- в протилежному випадку*.

Доведення. Нехай задано дві гомотетії h_i з центрами O_i і коефіцієнтами $m_i \neq 1$, $i = 1,2$, причому центр однієї з них збігається з початком координат. Тоді вони задаються формулами:

$$h_1: \begin{cases} \tilde{x} = m_1 x, \\ \tilde{y} = m_1 y, \end{cases} \quad h_2: \begin{cases} x' = m_2 x + (1-m_2)a, \\ y' = m_2 y + (1-m_2)b, \end{cases} \quad O_2(a;b);$$

$$f = h_2 \circ h_1: \begin{cases} x' = m_1 m_2 x + (1-m_2)a, \\ y' = m_1 m_2 y + (1-m_2)b. \end{cases}$$

З останніх формул видно, що f при $m_1 m_2 = 1$ є паралельним перенесенням на вектор $\vec{s} = ((1-m_2)a; (1-m_2)b)$, а при $m_1 m_2 \neq 1$ гомотетією з центром $C(c_1; c_2)$, де

$$\begin{cases} (1-m_1 m_2)c_1 = (1-m_2)a, \\ (1-m_1 m_2)c_2 = (1-m_2)b, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1-m_2}{1-m_1 m_2} a, \\ c_2 = \dfrac{1-m_2}{1-m_1 m_2} b. \end{cases}$$

Лему доведено.

Теорема (ознака гомотетії). *Перетворення площини, задане формулами*:

$$\begin{cases} x' = mx + c_1, \\ y' = my + c_2, \end{cases} \text{де } m \neq 1,$$

є гомотетією з центром $C\left(\frac{c_1}{1-m}; \frac{c_2}{1-m}\right)$ і коефіцієнтом m.

Доведення. Справді, задані формули можна записати у вигляду

$$\begin{cases} x' = mx + (1-m)\dfrac{c_1}{1-m}, \\ y' = my + (1-m)\dfrac{c_2}{1-m}, \end{cases}$$

в яких ми впізнаємо гомотетію з центром $C\left(\frac{c_1}{1-m}; \frac{c_2}{1-m}\right)$ і коефіцієнтом m.

Теорема 3. *Множина H_C всіх гомотетій площини зі спільним центром C разом з операцією «композиція перетворень» утворюють комутативну групу*.

Доведення. Розглянемо множину всіх гомотетій з центром O, яку виберемо за початок координат ПДСК. Нехай f_1 – гомотетія з коефіцієнтом m_1, f_2 – гомотетія з коефіцієнтом m_2. Тоді мають місце формули:

$$f_1: \begin{cases} x' = m_1 x, \\ y' = m_1 y, \end{cases} \quad f_2: \begin{cases} x' = m_2 x, \\ y' = m_2 y. \end{cases}$$

Легко бачити, що згідно з ознакою гомотетії за аналітичним заданням композиція

$$f = f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1: \begin{cases} x' = m_1 m_2 x, \\ y' = m_1 m_2 y, \end{cases}$$

є гомотетією з коефіцієнтом $m = m_1 m_2$. Обернене перетворення до $h(O, m)$ є перетворення $h^{-1}\left(O, \frac{1}{m}\right)$. Справді,

$$h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h: \begin{cases} x' = m \cdot \dfrac{1}{m} x, \\ y' = m \cdot \dfrac{1}{m} y, \end{cases} \Leftrightarrow h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = e: \begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$$

Отже, множина усіх гомотетій зі спільним центром утворює комутативну групу.

Означення. Дві фігури, які переводяться одна в іншу деякою гомотетією, називаються *гомотетичними.*

Наприклад, ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$, де $A_1 -$ середина BC, $B_1 -$ середина AC, $C_1 -$ середина AB, гомотетичні. Перший переводиться в другий гомотетією з центром G, який є точкою перетину медіан ΔABC і коефіцієнтом $m = -\frac{1}{2}$. Гомотетія з коефіцієнтом $m = -2$ і тим же центром переводить $\Delta A_1B_1C_1$ в ΔABC.

Ефективність застосування гомотетії в задачах на доведення демонструють наступні приклади доведень класичних фактів (теорем).

Задача 4. Довести, що для довільного трикутника точка перетину медіан (центр мас, центроїд), точка перетину висот (ортоцентр) і центр описаного навколо трикутника кола лежать на одній прямій (пряма Ойлера). Центроїд ділить відрізок, що з'єднує ортоцентр і центр описаного кола у відношенні 2:1.

Доведення. Нехай ABC – довільний трикутник, G – його центр мас, H – ортоцентр, O – центр описаного кола. Якщо ABC – рівносторонній, то $G = H = O$. В цьому випадку коло Ойлера не визначене.

Нехай ABC – трикутник неправильний. Тоді точки G, H, O – різні. Гомотетія h з центром G і коефіцієнтом $m = -\frac{1}{2}$ трикутник ABC переводить у трикутник $A'B'C'$, вершинами якого є середини сторін даного трикутника. Оскільки гомотетія зберігає кути між прямими, то висоти трикутника ABC переходять у висоти трикутника $A'B'C'$, які є серединними перпендикулярами до сторін трикутника ABC. Отже, $h(H) = O, h(G) = G$. Оскільки H і O -- відповідні точки при гомотетії h з центром G, то $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{GH}$. Звідки слідує колінеарність (належність одній прямій) точок G, O і H, що й вимагалось довести.

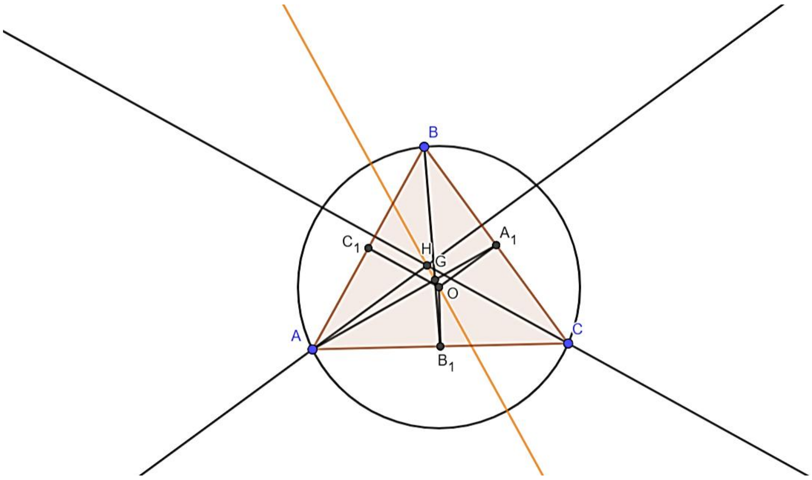

Рис. 4

Джерело: авторська розробка

Задача 5. Довести, що для довільного трикутника середини його сторін, основи висот і середини відрізків, які з'єднують ортоцентр H з вершинами, лежать на одному колі (коло Ойлера або коло дев'яти точок), центр якого є серединою відрізка з кінцями в ортоцентрі і центрі O описаного навколо трикутника кола, якщо $O = H$.

Доведення. Якщо трикутник правильний, то легко довести, що в цьому випадку колом Ойлера буде коло, вписане в цей трикутник.

Нехай ABC – трикутник неправильний, G – його центр мас, H – ортоцентр, O –центр, описаного навколо трикутника кола. Згідно з доведенням попереднього твердження при гомотетії h з центром G і коефіцієнтом $m = -\frac{1}{2}$ образом точки H є точка O, яка є ортоцентром трикутника $\Delta A'B'C' = h(\Delta ABC)$. Образом точки O є точка O' – центр кола ω', описаного навколо трикутника $A'B'C'$, причому $\overrightarrow{GO'} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{GO}$. Тоді $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'H}$, тобто $O' -$ середина відрізка OH. Коло ω' , описане навколо трикутника $A'B'C'$, є образом кола ω', описаного навколо трикутника ABC при гомотетії h , його радіус r' рівний половині радіуса r кола ω, описаного навколо трикутника ABC. Оскільки точка O'--середина відрізка OH, то вона рівновіддалена від ортогональних проєкцій A' і A_1 точок O і H на сторону BC. Тому $A_1 \in \omega'$.

Аналогічні міркування приводять до висновку, що $B_1 \in \omega'$ і $C_1 \in \omega'$. При гомотетії h_1 з центром H і коефіцієнтом $m = \frac{1}{2}$ точка O переходить в точку O', а коло ω в коло ω'. Тоді точки A, B, C, що належать ω переходять в точки, що є серединами відрізків HA, HB, HC відповідно. При цьому $OG\!:GO'\!:O'H = 2\!:1\!:3$. Твердження доведено.

Пропонуємо читачеві самостійно, використовуючи гомотетію, довести, що *центр кола дев'яти точок лежить на прямій Ойлера і є серединою відрізка, який з'єднує ортоцентр і центр описаного кола.*

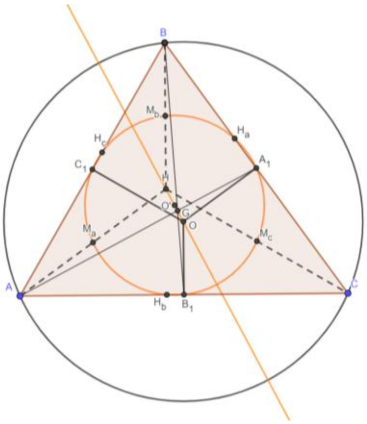

Рис. 5

Джерело: авторська розробка

Задача 6. Довести, що для довільного трикутника точки, симетричні його ортоцентру відносно сторін трикутника, лежать на колі описаному навколо трикутника.

Доведення. 1спосіб. Врахуємо міркування, які використовувались при доведенні двох попередніх тверджень, і використаємо ті самі позначення. Нехай ABC – довільний різносторонній трикутник, G – його центр мас, H – ортоцентр, O – центр, описаного навколо трикутника кола ω, H_1,H_2, H_3 – точки симетричні точці H відносно сторін трикутника.

Оскільки (OH, O′) =1=(HH_2, B_1), то $O'B_1$– середня лінія трикутника OHH_2, тобто $OH_2 \ = \ 2\ O'B_1 = 2r' = r$. А отже, H_2 належить колу ω . Аналогічно міркуючи, доводимо, що H_1 і H_2 належать ω. Твердження доведено.

Зауважимо, що коли трикутник правильний, то коло Ойлера є колом, вписаним в трикутник.

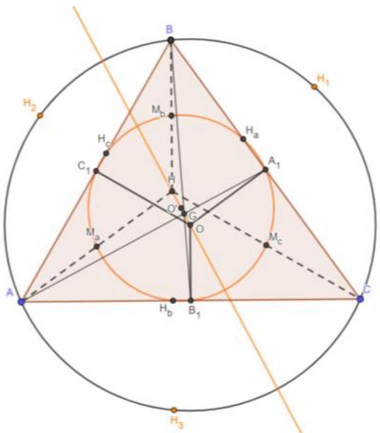

Рис. 6

Джерело: авторська розробка

5. Група дилатацій площини

Теорема 5. *Композиції гомотетії, відмінної від тотожного перетворення, і паралельного перенесення, а також паралельного перенесення і гомотетії, відмінної від тотожного перетворення, є гомотетією з тим же коефіцієнтом і новим центром. Пряма, визначена центрами цих гомотетій, паралельна вектору перенесення. Гомотетія і паралельне перенесення не комутують*.

Доведення. Нехай h — гомотетія з центром в початку координат O і коефіцієнтом m; p — паралельне перенесення на вектор $\vec{s} = (a; b)$. Тоді

$$h\colon \begin{cases} x' = mx, \\ y' = my, \end{cases} \quad p\colon \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b; \end{cases}$$

$$p \circ h\colon \begin{cases} x'' = mx + a = mx + (1 - m)\dfrac{a}{1 - m}, \\ y'' = my + b = my + (1 - m)\dfrac{b}{1 - m}, \end{cases} \quad C_1\left(\frac{a}{1 - m}; \frac{b}{1 - m}\right),$$

$$h \circ p\colon \begin{cases} x'' = mx + ma = mx + (1 - m)\dfrac{ma}{1 - m}, \\ y'' = my + mb = my + (1 - m)\dfrac{mb}{1 - m}, \end{cases} C_2\left(\frac{ma}{1 - m}; \frac{mb}{1 - m}\right).$$

Обидві композиції, як бачимо, є гомотетіями з центрами C_1 і C_2 відповідно. Оскільки $m \neq 1$, то $p \circ h \neq h \circ p$. Разом з цим $\overrightarrow{C_2C_1} = \vec{s}$, а отже, вектор $\vec{s} = (a; b)$ є вектором напряму прямої C_1C_2. Теорему доведено.

Теорема 6. *Множина D, яка містить всі гомотетії та паралельні перенесення площини, включаючи перенесення на нульовий вектор, разом з операцією «композиція перетворень» утворює некомутативну групу*.

Доведення. Покажемо, що операція «композиція перетворень» є бінарною алгебраїчною, тобто замкненою на множині D. Враховуючи теорему 1 і лему 6, досить розглянути композицію двох гомотетій з різними центрами.

Нехай h_1 і h_2 – гомотетії з коефіцієнтами m_1 та m_2 і центрами O та C відповідно. У прямокутній декартовій системі координат з початком O вони задаються формулами:

$$h_1\colon \begin{cases} x' = m_1 x, \\ y' = m_1 y, \end{cases} \quad h_2\colon \begin{cases} x' = m_2 x + (1 - m_2)a, \\ y' = m_2 y + (1 - m_2)b. \end{cases}$$

Тоді

$$h_2 \circ h_1\colon \begin{cases} x' = m_1 m_2 x + (1 - m_2)a = m_1 m_2 x + (1 - m_1 m_2)a_1, \\ y' = m_1 m_2 y + (1 - m_2)b = m_1 m_2 y + (1 - m_1 m_2)b_1. \end{cases}$$

Очевидно, що останні формули визначають гомотетію з коефіцієнтом $m = m_1 m_2$ *і центром* $C_1(a_1; b_1)$, *де*

$$a_1 = \frac{1 - m_2}{1 - m_1 m_2} a, \quad b_1 = \frac{1 - m_2}{1 - m_1 m_2} b.$$

Наслідок. *Множина* H_C *гомотетій зі спільним центром є підгрупою групи дилатацій*.

Лема 7. *Серед перетворень подібності 2-го роду не існує дилатацій*.

Доведення. Припустимо, що існує перетворення подібності 2-го роду, яке є дилатацією. Тоді його формули мають загальний вигляд:

$$\begin{cases} x' = kx \cos\alpha + ky \sin\alpha + x_0, \\ y' = kx \sin\alpha - ky \cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

Розглянемо прообраз $l'\colon Ax' + By' + C = 0$. Її рівняння має вигляд

$$l\colon A(kx \cos\alpha + ky \sin\alpha + x_0) + B(kx \sin\alpha - ky \cos\alpha + y_0) + C = 0,$$

$$l\colon k(A \cos\alpha + B \sin\alpha)x + k(A \sin\alpha - B \cos\alpha)y + (Ax_0 + By_0 + C) = 0.$$

Прямі l' і l паралельні або співпадають, якщо

$$\frac{k(A \cos\alpha + B \sin\alpha)}{A} = \frac{k(A \sin\alpha - B \sin\alpha)}{B},$$

тобто коли $AB \cos\alpha + B^2 \sin\alpha = A^2 \sin\alpha - AB \cos\alpha$,

$$2AB \cos\alpha = (A^2 - B^2) \sin\alpha$$

і це має виконуватись для довільної пари A, B такої, що $A^2 + B^2 \neq 0$. Але при $B = 0$ маємо $\sin\alpha = 0$, а при $A = B$ маємо $\cos\alpha = 0$, що одночасно неможливо. Таким чином, отримали суперечність, яка завершує доведення леми.

Теорема 7. *Якщо* f *– дилатація площини, то* f *або тотожне перетворення, або паралельне перенесення, або гомотетія*.

Доведення. Нехай f — дилатація площини. Згідно з попередньою лемою f є перетворенням подібності 1-го роду. Тоді воно задається формулами

$$f\colon \begin{cases} x' = kx \cos\alpha - yk \sin\alpha + x_0, \\ y' = kx \sin\alpha + yk \cos\alpha + y_0. \end{cases} \quad k > 0.$$

Розглянемо довільну пряму $l'\colon Ax' + By' + C = 0$ і її прообраз l при перетворенні f:

$$l\colon A(k \cos\alpha - ky \sin\alpha + x_0) + B(kx \sin\alpha + ky \cos\alpha + y_0) + C = 0,$$

$$k(A \cos\alpha + B \sin\alpha)x + k(B \cos\alpha - A \sin\alpha)y + (Ax_0 + By_0 + C) = 0.$$

Прямі l і l' є паралельними або $l = l'$, якщо

$$\frac{k(A \cos\alpha + B \sin\alpha)}{A} = \frac{k(B \cos\alpha - A \sin\alpha)}{B}.$$

Звідки

$$AB \cos\alpha + B^2 \sin\alpha = AB \cos\alpha - A^2 \sin\alpha,$$

$$(A^2 + B^2) \sin\alpha = 0,$$

$$\sin\alpha = 0.$$

Тоді $\cos\alpha = \pm 1$ і формули набувають вигляду

$$f_1\colon \begin{cases} x' = kx + x_0, \\ y' = ky + y_0, \end{cases} \quad \text{або} \quad f_2\colon \begin{cases} x' = -kx + x_0, \\ y' = -ky + y_0. \end{cases}$$

Якщо $k = 1$, то f_1 є паралельним перенесенням на вектор $\vec{s} = (x_0; y_0)$, а f_2 є центральною симетрією з центром $C\left(\frac{x_0}{2}; \frac{y_0}{2}\right)$.

Якщо $k \neq 1$, то маємо гомотетію з коефіцієнтом $m = \pm k$, оскільки

$$f_1\colon \begin{cases} x' = kx + (1 - k)a, \\ y' = ky + (1 - k)b, \end{cases} \quad a = \frac{x_0}{1 - k}, \qquad b = \frac{y_0}{1 - k};$$

$$f_2\colon \begin{cases} x' = -kx + (1 + k)a, \\ y' = -ky + (1 + k)b, \end{cases} \quad a = \frac{x_0}{1 + k}, \qquad b = \frac{y_0}{1 + k}.$$

Теорему доведено.

Наведемо приклади застосувань перетворень з групи дилатацій до розв'язування задач.

Задача 7. *Чим є ГМТ площини, які є серединами відрізків, у яких один кінець знаходиться у заданій точці, а інший – на заданому колі*.

Розв'язання. Шукане ГМТ є образом заданого кола при гомотетії з центром у заданій точці і коефіцієнтом 0,5.

Тому воно є колом, в двічі меншого радіуса, його центром є середина відрізка, який з'єднує задану точку і центр заданого кола.

Підтвердженням такого висновку є розв'язок цієї задачі методом координат.

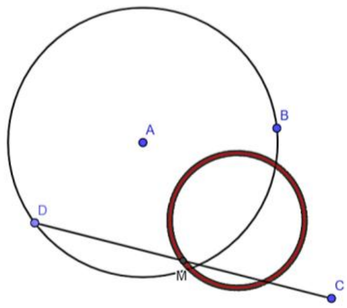

Рис. 7

Джерело: авторська розробка

Задача 8. *Нехай ABC – довільний трикутник, G – його центр мас (точка перетину медіан AM_1, AM_2, AM_3). Чим для трикутника ABC є образ прямої l, яка містить висоту AA_0, при гомотетії з центром G і коефіцієнтом $m = -\frac{1}{2}$?*

Розв'язання. При цій гомотетії $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{GA}$: $A \to M_1$ (за властивістю медіан), $AA_0 \to M_1A'$, де $M_1A' \perp BC$, оскільки при гомотетії образом прямої є пряма, паралельна даній, то з $AA_0 \perp BC$ випливає $M_1A' \perp BC$.

Пряма M_1A' проходить через середину $[BC]$ і йому перпендикулярна. Отже, M_1A' – серединний перпендикуляр.

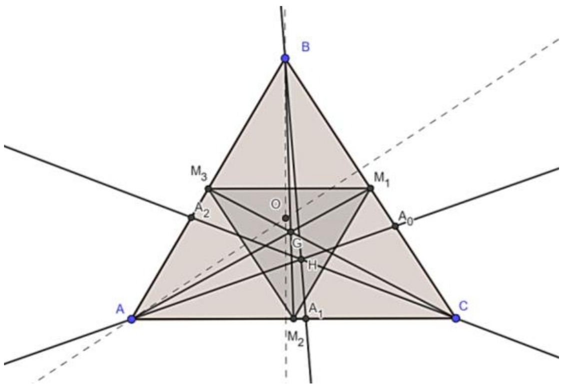

Рис. 8

Джерело: авторська розробка

Задача 9. Використовуючи гомотетію, довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Нехай ABC – довільний трикутник, AA_0, BB_0, CC_0 – його медіани, а AA_1, BB_1, CC_1 – висоти. Розглянемо гомотетію h з центром в точці перетину медіан G трикутника і коефіцієнтом $m = -\frac{1}{2}$. При цьому перетворенні:

$$\triangle ABC \to \triangle A_0B_0C_0,$$

висота AA_1 перейде в пряму $A_0A' || AA_1$. Оскільки $AA_1 \perp BC$, то $A_0A' \perp BC$. Отже, A_0A' – серединний перпендикуляр до сторони BC. Аналогічно можна показати, що висоти BB_1 і CC_1 при даній гомотетії перпендикулярні B_0B' і C_0C'. Оскільки серединні перпендикуляри перетинаються в одній точці O (центрі описаного кола), то й прообрази цих прямих перетинаються в точці H.

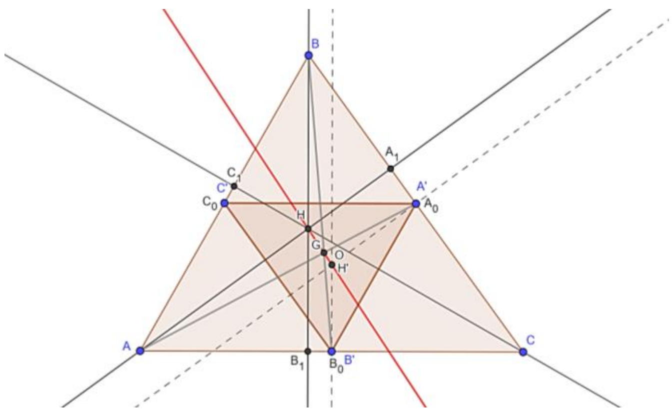

Рис. 9

Джерело: авторська розробка

Задача 10. *Через точку перетину діагоналей трапеції з основами a і b паралельно до основ проведено пряму, яка перетинає бічні сторони в точках M і N. Довести, що $MN = \frac{2ab}{a+b}$.*

Розв'язання. Нехай в прямокутній декартовій системі координат $R_0 = O_{\vec{i},\vec{j}}$ задано трапецію $OABC$, де $|AB| = a$, $|OC| = b$ (див. рис. 10).

Розглянемо гомотетію h з коефіцієнтом $m = \frac{b}{a+b}$ і центром O, тобто

$$h: \begin{cases} x' = \dfrac{b}{a+b}x, \\ y' = \dfrac{b}{a+b}y. \end{cases}$$

Оскільки $\triangle OMK$ гомотетичний $\triangle OAB$, то згідно з властивостей гомотетії

$$\overrightarrow{MK} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB},$$

звідки $\left|\overrightarrow{MK}\right| = \frac{b}{a+b}\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{ab}{a+b}$. Аналогічно $|KN| = \frac{ab}{a+b}$, таким чином, $|MN| = \frac{2ab}{a+b}$.

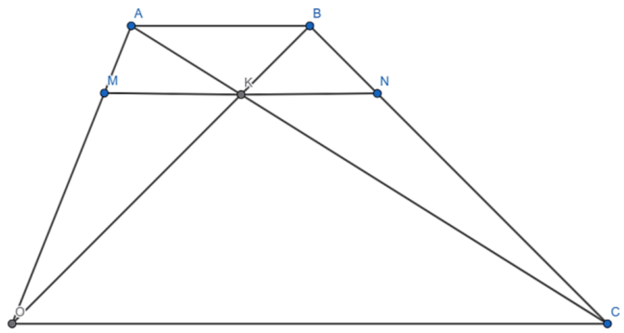

Рис. 10

Джерело: авторська розробка

Задача 11. *Якщо дві трапеції, що мають спільну основу, подібні, то їх спільна основа є середнім геометричним двох інших основ цих трапецій*.

Розв'язання. Нехай в прямокутній декартовій системі координат задана трапеція $OABC$, $O(0;0)$, $A(u;h)$, $B(u+a;h)$, $C(b;0)$. Проведемо пряму MN паралельно основам $OABC$ так, що $|MN| = \sqrt{ab}$. Оскільки $M \in OA$, $N \in BC$, то $M\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u; \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h\right)$, $N\left(\sqrt{ab} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u; \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h\right)$. Покажемо, що трапеції $OMNC$ і $MABN$ гомотетичні. Розглянемо гомотетію

$$h: \begin{cases} x' = \sqrt{\dfrac{a}{b}}x + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u, \\ y' = \sqrt{\dfrac{a}{b}}y + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h. \end{cases}$$

Тоді

$h(O) = O'\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u; \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h\right) = M$, $h(C) = C'\left(\sqrt{ab} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u; \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h\right) = N$,

$h(M) = M'\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}u; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}h\right) = A(u;h)$,

$h(N) = N'(a+u;h) = B$, тобто $h(OMNC) = MABN$.

Отже, ми довели таке твердження: *пряма, що паралельна основам трапеції і дорівнює середньому геометричному довжин основ цієї трапеції, розбиває трапецію на дві подібні трапеції.*

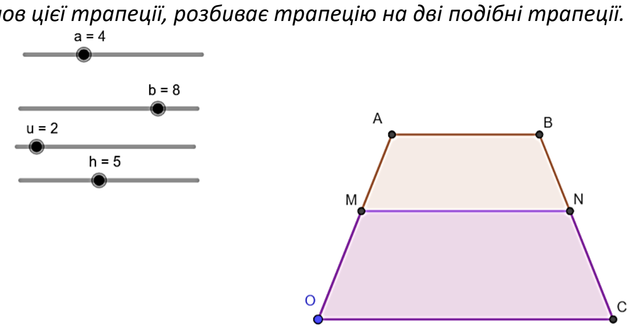

Рис. 11

Джерело: авторська розробка

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У статті розглянуто дилатації площини як підгрупу перетворень подібності. Проаналізовано їх основні властивості та інваріанти, а також встановлено взаємозв'язок між дилатаціями, гомотетіями та паралельними перенесеннями площини. Показано, що дилатації утворюють групу геометричних перетворень та можуть бути ефективно використані при дослідженні властивостей геометричних фігур і розв'язуванні задач.

Отримані результати можуть бути використані у викладанні аналітичної геометрії у закладах вищої освіти, а також у шкільному курсі геометрії, зокрема під час факультативних занять та гурткової роботи. Перспективою подальших досліджень є розширення розгляду підгруп перетворень подібності та їх застосування у методиці навчання геометрії.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ДЖЕРЕЛА ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Andreescu, T., Mushkarov, O., & Stoyanov, L. (2006). *Geometric problems on maxima and minima*. Birkhäuser Boston.
2. Johnson, R. A. (2013). *Advanced Euclidean geometry*. Courier Corporation.
3. Бевз, Г. П., Конфорович, А. Г., Резніченко, З. О., & Ченакал, Є. О. (1982). *Математика: Посібник для факультативних занять у 7 кл.* Радянська школа.
4. Боровик, В. Н., Зайченко, І. В., Мурач, М. М., & Яковець, В. П. (2004). *Геометричні перетворення площини*. Університетська книга.
5. Вивальнюк, Л. М., Соколенко, О. І., Мурач, М. М., Шидловська, Л. М., & Коваленко, І. П. (1998). *Математика, 10. Посібник для шкіл та класів з поглибленим вивченням математики*. Освіта.
6. Готман, Э. Г., & Скопец, З. А. (1988). *Задача одна – решения разные*. Радянська школа.
7. Істер, О. С. (2017). *Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів*. Генеза.
8. Істер, О. С. (2021). *Геометрія: підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти* (2-ге вид.). Генеза.
9. Коксетер, Г. С., & Грейтцер, С. Л. (1978). *Новые встречи с геометрией*. Наука.
10. Колмогоров, А. М., Семенович, О. Ф., Нагібін, Ф. Ф., & Черкасов, Р. С. (1972). *Геометрія. 6 клас*. Радянська школа.
11. Кравчук, О. М. (2018). *Геометричні перетворення. Частина І. Ортогональні перетворення: методичні рекомендації до вивчення вибіркової навчальної дисципліни «Геометричні перетворення»*.
12. Ленчук, І. (2016). Метод перетворень: паралельне перенесення. *Математика в рідній школі*, *3*, 37–42.
13. Ленчук, І. Г., & Працьовитий, М. В. (2019). Поворот навколо прямої в метричній стереометрії. *Математика. Інформаційні технології. Освіта*, 6, 57–65.
14. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2017a). *Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручник для 9 класу*. Гімназія.
15. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2017b). *Геометрія: підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів* (2-ге вид.). Гімназія.
16. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2017c). *Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів*. Гімназія.
17. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2021). *Геометрія: підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики закладів загальної середньої освіти* (2-ге вид.). Гімназія.
18. Погорєлов, О. В. (1993). *Геометрія: підручник для 7–11 класів середньої школи*. Освіта.
19. Понарин, Я. П., & Скопец, З. А. (1981). *Перемещения и подобия плоскости*. Радянська школа.
20. Працьовитий, М. В. (2007). *Геометричні перетворення. Теоретико-груповий погляд на геометрію*. Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова.
21. Працьовитий, М. В. (2013a). *Аналітична геометрія. Геометричні перетворення. Перетворення подібності з елементами теорії фракталів*. Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова.
22. Працьовитий, М. В. (2013b). *Геометричні перетворення. Рухи площини*. Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова.
23. Семеніхіна, О. В., & Друшляк, М. Г. (2014). Геометричні перетворення на площині і комп'ютерні інструментарії їх реалізації. *Комп'ютер у школі та сім'ї*, 7, 25–29. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/komp_2014_7_8
24. Школьний, О. В. (2025). Вивчення геометричних перетворень у 9 класі НУШ за авторським підручником інтегрованого курсу математики. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 4, 7–19. https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-4-7-19
25. Школьний, О., Нелін, Є., Миляник, А., & Простакова, Ю. (2025). *Математика. Посібник як частина підручника інтегрованого курсу для 9 класу закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах) (Частина 1)*. Ранок.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Andreescu, T., Mushkarov, O., & Stoyanov, L. (2006). *Geometric problems on maxima and minima*. Birkhäuser Boston.
2. Johnson, R. A. (2013). *Advanced Euclidean geometry*. Courier Corporation.

3. Bevz, H. P., Konforovych, A. H., Reznichenko, Z. O., & Chenakal, Ye. O. (1982). *Matematyka: Posibnyk dlia fakultatyvnykh zaniat u 7 kl [Mathematics: A Guide for Optional Classes in Grade 7]*. Radianska shkola.
4. Borovyk, V. N., Zaichenko, I. V., Murach, M. M., & Yakovets, V. P. (2004). *Heometrychni peretvorennia ploshchyny [Geometric Transformations of the Plane]*. Universytetska knyha.
5. Vyvalniuk, L. M., Sokolenko, O. I., Murach, M. M., Shydlovska, L. M., & Kovalenko, I. P. (1998). *Matematyka, 10. Posibnyk dlia shkil ta klasiv z pohlyblenym vyvchenniam matematyky [Mathematics, 10. A Guide for Schools and Classes with Advanced Study of Mathematics]*. Osvita.
6. Hotman, Э. H., & Skopets, Z. A. (1988). Zadacha odna – reshenyia raznye [One Problem – Different Solutions]. Radianska shkola.
7. Ister, O. S. (2017). *Heometriia: pidruchnyk dlia 9 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Geometry: a textbook for the 9th grade of secondary schools].* Heneza.
8. Ister, O. S. (2021). *Heometriia: pidruchnyk dlia 8 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Geometry: a textbook for the 8th grade of secondary schools].* (2-he vyd.). Heneza.
9. Kokseter, H. S., & Hreittser, S. L. (1978). *Novye vstrechy s heometryei [New encounters with geometry]*. Nauka.
10. Kolmohorov, A. M., Semenovych, O. F., Nahibin, F. F., & Cherkasov, R. S. (1972). *Heometriia. 6 klas [Geometry. Grade 6].* Radianska shkola.
11. Kravchuk, O. M. (2018). *Heometrychni peretvorennia. Chastyna I. Ortohonalni peretvorennia: metodychni rekomendatsii do vyvchennia vybirkovoi navchalnoi dystsypliny «Heometrychni peretvorennia» [Geometric transformations. Part I. Orthogonal transformations: methodological recommendations for studying the elective academic discipline "Geometric transformations"]*.
12. Lenchuk, I. (2016). Metod peretvoren: paralelne perenesennia [Transformation method: parallel transfer]. *Matematyka v ridnii shkoli – Mathematics in the native school, 3*, 37–42.
13. Lenchuk, I. H., & Pratsovytyi, M. V. (2019). Povorot navkolo priamoi v metrychnii stereometrii [Rotation around a straight line in metric stereometry]. *Matematyka. Informatsiini tekhnolohii. Osvita – Mathematics. Information technologies. Education, 6*, 57–65.
14. Merzliak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2017a). *Heometriia dlia zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv z pohlyblenym vyvchenniam matematyky: pidruchnyk dlia 9 klasu [Geometry for general educational institutions with in-depth study of mathematics: a textbook for grade 9]*. Himnaziia.
15. Merzliak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2017b). *Heometriia: pidruchnyk dlia 8 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Geometry: a textbook for grade 8 of general educational institutions]* (2-he vyd.). Himnaziia.
16. Merzliak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2017c). *Heometriia: pidruchnyk dlia 9 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Geometry: a textbook for the 9th grade of general education institutions].* Himnaziia.
17. Merzliak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2021). *Heometriia: pidruchnyk dlia 8 klasu z pohlyblenym vyvchenniam matematyky zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Geometry: a textbook for the 8th grade with in-depth study of mathematics of general secondary education institutions].* (2-he vyd.). Himnaziia.
18. Pohorielov, O. V. (1993). *Heometriia: pidruchnyk dlia 7–11 klasiv serednoi shkoly [Geometry: a textbook for the 7th–11th grades of secondary school].* Osvita.
19. Ponaryn, Ya. P., & Skopets, Z. A. (1981). *Peremeshchenyia y podobyia ploskosty [Displacements and similarity of planes].* Radianska shkola.
20. Pratsovytyi, M. V. (2007). *Heometrychni peretvorennia. Teoretyko-hrupovyi pohliad na heometriiu [Geometric transformations. Group-theoretic view of geometry].* Vyd-vo NPU imeni M. P. Drahomanova.
21. Pratsovytyi, M. V. (2013a). *Analitychna heometriia. Heometrychni peretvorennia. Peretvorennia podibnosti z elementamy teorii fraktaliv [Analytical geometry. Geometric transformations. Similarity transformations with elements of fractal theory]*. Vyd-vo NPU imeni M. P. Drahomanova.
22. Pratsovytyi, M. V. (2013b). *Heometrychni peretvorennia. Rukhy ploshchyny [Geometric transformations. Plane motions]*. Vyd-vo NPU imeni M. P. Drahomanova.
23. Semenikhina, O. V., & Drushliak, M. H. (2014). Heometrychni peretvorennia na ploshchyni i komp'iuterni instrumentarii yikh realizatsii [Geometric transformations on the plane and computer tools for their implementation]. *Kompiuter u shkoli ta simi – Computer in school and family, 7*, 25–29. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/komp_2014_7_8
24. Shkolnyi, O. V. (2025). Vyvchennia heometrychnykh peretvoren u 9 klasi NUSh za avtorskym pidruchnykom intehrovanoho kursu matematyky [tudy of geometric transformations in the 9th grade of the National Secondary School according to the author's textbook of the integrated course of mathematics]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii – Didactics of mathematics: theory, experience, innovations, 4*, 7–19. https://doi.org/10.31652/3041-2277-2025-4-7-19
25. Shkolnyi, O., Nelin, Ye., Mylianyk, A., & Prostakova, Yu. (2025). *Matematyka. Posibnyk yak chastyna pidruchnyka intehrovanoho kursu dlia 9 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity (u 2-kh chastynakh) [Mathematics. Manual as part of the textbook of the integrated course for the 9th grade of general secondary education institutions (in 2 parts)].* Chastyna 1. Ranok.

| *Матеріал надійшов до редакції: 10.02.2026 р.* | *Прийнято до друку: 27.03.2026 р.* | *Опубліковано: 30.04.2026 р.* |