ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2026, 41(1), https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-01
УДК: 519.6

ТРИ КРОКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ОЗНАЧЕННЯ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Микола БІЛОЦЬКИЙ ✉
Український державний університет імені М.П. Драгоманова, Україна
m.m.bilotskyy@udu.edu.ua .
https://orcid.org/0009-0001-5457-8997

THREE STEPS FOR SOLVING PROBLEMS USING THE DEFINITION OF THE LIMIT OF A SEQUENCE

Mykola BILOTSKY ✉
Ukrainian State University named after M.P. Drahomanov, Ukraine
m.m.bilotskyy@udu.edu.ua .
https://orcid.org/0009-0001-5457-8997

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Важливим компонентом математичної підготовки є володіння студентами понятійним апаратом математичних дисциплін, які в більшості вищих навчальних закладів об'єднують під назвою вища математика, зокрема, математичного аналізу. Об'єктом вивчення класичного математичного аналізу є функція, різноманітні функціональні залежності, предметом вивчення – властивості функцій, а основним інструментом вивчення цих властивостей є граничний перехід. Для курсів математичного аналізу ключовим поняттям є поняття границі. Пояснюється це тим, що такі важливі поняття цих дисциплін як границя функції, неперервність функції, похідна функції, різні види інтегралів вводяться, спираючись саме на операцію граничного переходу. Тому успішність оволодіння студентами цими курсами великою мірою визначається рівнем оволодіння поняттям границі, що актуалізує проблему розробки ефективної стратегії формування у здобувачів освіти поняття границі послідовності, в тому числі і в задачах практичного використання означень поняття границі.*

Матеріали і методи. *Використано аналіз науково-методичної літератури та навчальних видань з вищої математики і математичного аналізу; систематизацію вітчизняного і зарубіжного досвіду введення поняття границі; узагальнення авторського досвіду організації практичних занять і добору вправ, у яких доведення здійснюється без апеляції до готових теорем, лише на основі означення.*

Результати. *Вироблено стратегію формування у здобувачів освіти поняття границі послідовності, розуміння та закріплення його змісту на практичних заняттях. Обґрунтовано «алгоритмічний» підхід розв'язування задач застосування поняття границі послідовності у вигляді трьох послідовних кроків, який ґрунтується на використанні означень границі послідовності «ε-n0». Алгоритм зменшує когнітивне навантаження на здобувачів освіти на початку теми, допомагає відділити евристику оцінок від формального завершення доведення, формує навичку керування похибкою та усвідомлення залежності $n_0(\varepsilon)$. Алгоритм слугує основою методичних рекомендацій для практичних занять і активізує навички доведення нерівностей як інструментів аналізу.*

Висновки. *Особливостями запропонованої методики застосування поняття границі послідовності на практичних заняттях є те, що студенти самостійно можуть засвоїти зміст та важливість кожної деталі означення границі послідовності. Подальші розвідки доцільно спрямувати на алгоритмізацію застосування означень границі функції однієї змінної в точці.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: вища математика; математичний аналіз; границя послідовності; методика формування математичного поняття; послідовність; границя послідовності дійсних чисел; границя послідовності комплексних чисел; три кроки; алгоритмізація; оцінки; розв'язування нерівності; транзитивність відношення порядку; функція обернена до функції математична освіта.

ABSTRACT

Formulation of the problem. *An important component of mathematical training is learners' command of the conceptual apparatus of mathematical disciplines, which, in most higher education institutions, is taught under the umbrella title Higher Mathematics, in particular Mathematical Analysis. The object of study in classical mathematical analysis is the function and various functional dependencies; its subject matter is the properties of functions, and the main tool for investigating these properties is the limit process. For courses in mathematical analysis, the central notion is that of a limit. This is explained by the fact that fundamental concepts such as the limit of a function, continuity, the derivative, and various types of integrals are introduced in terms of limits. Therefore, success in mastering these courses largely depends on the extent to which learners have mastered the notion of a limit, which makes the development of an effective strategy for forming the concept of the limit of a sequence relevant, including in tasks that require the practical use of the formal definitions of a limit.*

Materials and methods. *The study employed an analysis of scientific and methodological literature and textbooks in higher mathematics and mathematical analysis; a systematization of domestic and international approaches to introducing the concept of a limit; and a generalization of the author's experience in organizing practical classes and selecting exercises in which proofs are constructed without appealing to ready-made theorems, relying only on the definition.*

Results. *A strategy was developed to develop learners' understanding of the limit of a sequence and to consolidate this understanding in practical classes. An "algorithmic" approach to solving problems that apply the concept of the limit of a sequence is substantiated in the form of three consecutive steps based on the ε–n_0 definition of the limit of a sequence. The algorithm reduces learners' cognitive load at the beginning of the topic, helps separate the heuristic search for estimates from the formal completion of the proof, develops skills in controlling error, and supports awareness of the dependence $n_0(\varepsilon)$. The algorithm serves as a basis for methodological recommendations for practical classes and strengthens skills in proving inequalities as analytical tools.*

Conclusions. *A feature of the proposed method for applying the concept of the limit of a sequence in practical classes is that learners can independently grasp the meaning and importance of each detail in the definition of the limit of a sequence. Further research should be directed toward algorithmizing the application of definitions of the limit of a real-valued function of one variable at a point.*

KEYWORDS: higher mathematics; mathematical analysis; limit of a sequence; methodology of forming a mathematical concept; sequence; limit of a sequence of real numbers; limit of a sequence of complex numbers; three steps; algorithmization; estimates; solving inequalities; transitivity of the order relation; inverse function; mathematics education.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Білоцький М. Три кроки розв'язування задач на означення границі послідовності. *Фізико-математична освіта*, 2026. Том 41. № 1. С. 6-14. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-01.

FOR CITATION: Bilotsky, M. (2026). Three steps for solving problems using the definition of the limit of a sequence. *Physical and Mathematical Education*, *41*(1), 6-14. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-01.

ВСТУП

В сучасному суспільстві більшість напрямків діяльності людини потребують широкого використання математичних методів. Тому до математичної підготовки фахівців, які в майбутній своїй діяльності можуть використовувати математичні методи, висуваються підвищені вимоги. Визначальними складовими математичної підготовки є не тільки володіння студентами понятійним апаратом математичних дисциплін але і наявність умінь та навичок застосування означень понять при розв'язуванні задач. Відоме означення границі послідовності дійсних або комплексних чисел завжди було важким для змістовного сприйняття на перших етапах навчання математичному аналізу студентами перших курсів вищих навчальних закладів. Окрім цього, не тільки у студентів а, почасти, і у викладачів, які читають лекції і проводять практичні заняття на тему «Границя послідовності», виникають труднощі у виборі способів і прийомів використання означення границі при розв'язуванні відповідних задач математичного аналізу та теорії функцій комплексної змінної.

Математична підготовка студентів здійснюється в процесі вивчення вищої математики, математичного аналізу, алгебри, геометрії тощо. Володіння студентами понятійним апаратом відповідних математичних дисциплін є важливою частиною засвоєння основ математичних дисциплін. Необхідно визнати, що питанням методики введення основних понять різних математичних дисциплін, зокрема, математичного аналізу у закладах вищої освіти присвячено мало вітчизняних досліджень і публікацій, Серед математичних понять є значна їх кількість, яка є складною для розуміння більшістю студентами. І до таких понять, зокрема, належить поняття границі. Для курсів класичного математичного аналізу поняття границі є ключовим з наступних причин. Об'єктом вивчення класичного математичного аналізу є функція, різноманітні функціональні залежності, предметом вивчення – властивості функцій, а основним інструментом вивчення цих властивостей є граничний перехід. Більше того, такі важливі поняття цих дисциплін як границя функції, неперервність функції, похідна функції, різні види інтегралів вводяться, спираючись саме на операцію граничного переходу. Тому успішність оволодіння студентами вищою математикою чи математичним аналізом великою мірою визначається тим, наскільки добре студенти оволодіють змістом процесу граничного переходу, поняттям границі. І першим етапом в такому навчанні є знайомство та засвоєння поняття гранці послідовності, що актуалізує проблему розробки ефективної методики формування поняття границі послідовності. Але без з відчуття того, як працює інструмент граничного переходу при доведенні того, що дане число є границею послідовності можливе тільки при розв'язуванні відповідних задач.

Аналіз актуальних досліджень. Про методику застосування означення границі послідовності при розв'язанні задач на практичних заняттях у закладах вищої освіти України наявних досліджень мало.

У дослідженні (Білоцький, 2011) наведені спроби алгоритмізації розв'язування задач застосування границі послідоовності з дійсними членами. Стаття (Томащук та ін., 2024) присвячена методиці формування поняття границі послідовності у студентів закладів вищої освіти. У цій роботі порівнюються різні означення границі послідовності, аналізуються випадки застосування кожного з цих означень при розв'язуванні задач. Розв'язування прикладу супроводжується обчислювальним експериментом та відповідним рисунком, виконаними за допомогою табличного процесора Microsoft Excel. В цій статті наведений достатньо повний аналіз досліджень присвячених методиці формування поняття границі послідовності. Дисертація (Босовський, 2010) присвячена наступності вивчення теорії границь у школі та закладах вищої освіти. Окремі аспекти, пов'язані з вивченням границь послідовностей у закладах вищої освіти, знайшли відображення в публікаціях: Михаліним (2003). Цей підхід ґрунтується на понятті «майже рівності». За допомогою цього поняття вдається дуже легко формулювати і доводити властивості границь послідовностей.

У праці (Третяк & Босовський, 2017) представлено авторське бачення змістового наповнення та методики вивчення теми «Границя числової послідовності» в курсі математичного аналізу для студентів математичних спеціальностей. Виклад ведеться у вигляді аргументованих відповідей на ряд традиційних для даної теми питань. Автори притримуються думки, що вивчення теорії границь потрібно розпочинати з вивчення границі послідовності, а потім – границі функції і неперервності. Такий підхід, до речі, реалізується в більшості підручників і навчальних посібників з математичного аналізу. Серед різних означень поняття границі послідовності автори пропонують першим вводити означення мовою околів та достатньо переконливо аргументують це. Проте сама методика введення поняття границі послідовності в цій публікації не висвітлена.

Виникає питання, чи можна рекомендувати послідовність кроків, яка максимально близька до процесу використання означення границі послідовності при розв'язанні задач відповідної тематики на практичних заняттях з математичного аналізу, як алгоритм дій, що сприятиме формуванню у здобувачів освіти поняття границі послідовності?

Мета статті: виробити стратегію формування у здобувачів освіти поняття границі послідовності, розуміння та закріплення його змісту на практичних заняттях через обґрунтування алгоритмічного підходу до розв'язування задач застосування поняття границі послідовності.

Матеріали цієї статті базуються на досвіді навчання математичного аналізу та теорії функцій комплексної змінної у закладах вищої освіти, зокрема, на досвіді проведення практичних занять з цих дисциплін в Українському державному університеті імені М. П. Драгоманова.

МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

Використано аналіз науково-методичної літератури та навчальних видань з вищої математики і математичного аналізу; систематизацію вітчизняного і зарубіжного досвіду введення поняття границі; узагальнення авторського досвіду організації практичних занять і добору вправ, у яких доведення здійснюється без апеляції до готових теорем, лише на основі означення.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Стратегія формування у здобувачів освіти поняття границі послідовності була вироблена на основі багаторічного досвіду навчання математичного аналізу. Вона базується на такому алгоритмі (дається для випадку $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, коли $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \overset{def}{\Leftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > o \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right)$):

1 крок - Виконання оцінок. Побудова скінченної послідовності порівнянь, прикінцевим результатом якої, завдяки транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел буде порівняння $|x_n - a| \le (\varphi(n))^{-1}$, де $\varphi(x)$– по можливості не складна, з додатними значеннями, зростаюча на проміжку $[\lambda_0;+\infty) \subset [1;+\infty)$ елементарна функція і $\varphi(x) \to +\infty (x \to +\infty)$ (наприклад, $\varphi(x) = x^\alpha, 0 < \alpha \le 1$).

2 крок - Розв'язування нерівності. Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon > 0$ покладаємо $|x_n - a| \le (\varphi(n))^{-1} < \varepsilon$ і розв'язуємо нерівність $\left(\varphi(n) > \varepsilon^{-1}, n \in N \cap \left[[\lambda_0] + 1;+\infty\right)\right)$, де $(\lambda_0;+\infty) \supset \left(\varphi^{-1}(\varepsilon^{-1});+\infty\right)$– множина розв'язків нерівності, $\varphi^{-1}(x)$– функція обернена до $\varphi(x)$, $n_0 = n_0(\varepsilon) := \left[\varphi^{-1}(\varepsilon^{-1})\right] + 1 \ge [\lambda_0] + 1$,де $[d]$– ціла частина дійсного числа d.

3 крок - Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left((\varphi(n))^{-1} < \varepsilon\right), \left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| \le (\varphi(n))^{-1}\right)\right\} \Rightarrow \left(\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| < \varepsilon\right)\right)$$

Отже, для заданого $\varepsilon > 0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $\left(n > n_0(\varepsilon)\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| < \varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Застосування алгоритму подамо на прикладах.

Можливі означення границі послідовностей тільки для наступних випадків :

1) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$; 2) $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$; 3) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$; 4) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Приклад 1). Довести: 1а). $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}$; 1б). $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Приклад 1а) .◄ Маємо $x_n = \frac{2n-1}{2-3n} \forall n \in N, a = -\frac{2}{3}$. Виконаємо три кроки:

1 крок - $\forall n \in N : |x_n - a| = \left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{2n-1}{2-3n} + \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3(3n-2)}$ і $\varphi(x) = 3(3x-2)$ на проміжку $[1;+\infty)$.

2 крок - Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon > 0$ покладаємо $|x_n - a| = \frac{1}{3(3n-2)} < \varepsilon$ і

розв'язуємо нерівність $\left(\frac{1}{3(3n-2)} < \varepsilon, n \in N\right) \Leftrightarrow \left(3n - 2 > \frac{1}{3\varepsilon}, n \in N\right) \Leftrightarrow \left(n > \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}, n \in N\right)$, де $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}$.

Виберемо $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}\right] + 1$.

3 крок - За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел для вибраного $n_0(\varepsilon)$ маємо

$$\left\{\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{3(3n-2)} < \varepsilon\right), \left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| = \left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| \le \frac{1}{3(3n-2)}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| = \left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| < \varepsilon\right)\right)$$

Отже, для заданого $\varepsilon > 0$ знайдено $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}\right] + 1$ таке, що $\left(n > n_0(\varepsilon)\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| = \left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| < \varepsilon\right)$,

і доведено, що $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, тобто $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}$.►

Зауваження 1.

А. Зрозуміло, що найважливішим з трьох кроків є перший крок отримання (доведення) потрібної нерівності. Він має евристичний характер, потребує творчості, вміння гнучко використовувати попередніх знань з математики.

В. На другому кроці, задовольняючи при цьому всі умови вибору $n_0 = n_0(\varepsilon)$, достатньо покласти $n_0 = n_0(\varepsilon) := \max\left\{\left[\varphi^{-1}(\varepsilon^{-1})\right] + 1, [\lambda_0] + 1\right\}$. Результатом першого та другого кроків може бути і така оцінка $|x_n - a| \le\le \cdots \le \lambda(\varepsilon)$, де $\lambda(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. Але в такому випадку знайдеться $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що $|x_n - a| < \varepsilon$

С. Після перших декілька прикладів використання запропонованого правила з трьох кроків на третьому останньому кроці можна обмежитись стандартною фразою «*для наперед заданого довільного* $\varepsilon > 0$ *знайдено* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ *таке, що* $\left(n > n_0(\varepsilon)\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| < \varepsilon\right)$, *і доведено, що* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ».

Приклад 1б). ◄ Маємо $x_n = \sqrt[n]{n}\ \ \forall n \in N, a = 1$. Так як $x_n = \sqrt[n]{n} \ge 1 = a\ \ \forall n \in N,$ можемо покласти $x_n = \sqrt[n]{n} := 1 + \beta_n\ \ \forall n \in N$, де $\beta_n \ge 0\ \forall n \in N$. Тоді за формулою бінома Ньютона дістанемо $\forall n \in N, n \ge 2$ нерівність

$$n = (1+\beta_n)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\beta_n)^n = 1 + n\beta_n + \frac{n(n-1)}{2}(\beta_n)^2 + \cdots + (\beta_n)^n \ge \frac{n(n-1)}{2}(\beta_n)^2,$$

з якої маємо $|x_n - a| = \sqrt[n]{n} - 1 = \beta_n \le \sqrt{2n^{-1}}\ \ \forall n \in N, n \ge 2$. Виконаємо необхідні кроки.

1 крок- $\forall n \in N, n \ge 2:\ \ |x_n - a| = \sqrt[n]{n} - 1 = \beta_n \le \sqrt{2n^{-1}} = \sqrt{2}\,\sqrt{n^{-1}}$, і $\varphi(x) = \sqrt{0{,}5x}\ \forall x \in [2; +\infty)$.

2 крок - Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon > 0$, покладаємо $|x_n - a| < \sqrt{2}\,\sqrt{n^{-1}} < \varepsilon$ і розв'язуємо нерівність $\left(\sqrt{2}\,\sqrt{n^{-1}} < \varepsilon, n \in N, n \ge 2\right) \Leftrightarrow \left(n > 2\varepsilon^{-2}, n \in N, n \ge 2\right)$, де $\varphi^{-1}\left(\varepsilon^{-1}\right) = 2\varepsilon^{-2}$. Виберемо $n_0 = n_0(\varepsilon) = \max\left\{2, \left[2\varepsilon^{-2}\right] + 1\right\}$.

3 крок - За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел для $n_0 = n_0(\varepsilon) = \max\left\{2, \left[2\varepsilon^{-2}\right] + 1\right\}$ маємо $\left(n > n_0(\varepsilon)\right) \Rightarrow \left(|x_n - a| = \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon\right)$

і доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.►

Послідовність кроків для випадку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, де $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty\right) \overset{def}{\Leftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > o \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : n > n_0 \Rightarrow |x_n| > \varepsilon\right)$:

1 крок Виконання оцінок. $|x_n| \ge \ge \cdots \ge \varphi(n)$, де $\varphi(x) > 0 \forall x \in (\lambda_0; +\infty) \subset (0; +\infty), \varphi(x) \uparrow +\infty (x \to +\infty)$,

тобто побудова скінченної послідовності порівнянь, прикінцевою метою якої завдяки властивості транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел буде порівняння $|x_n| \ge \varphi(n)$, де $\varphi(x)-$ по можливості достатньо проста елементарна додатнозначна зростаюча на проміжку $[\lambda_0; +\infty) \subset [1; +\infty)$ функція і $\varphi(x) \to +\infty (x \to +\infty)$ (наприклад, $\varphi(x) = x^\alpha,\ \ 0 < \alpha \le 1$).

2 крок Розв'язування нерівності. Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon > 0$ покладаємо $|x_n| \ge \varphi(n) > \varepsilon$ і розв'язуємо нерівність

$$\left(\varphi(n) > \varepsilon, n \in N \cap \left[[\lambda_0] + 1; +\infty\right)\right) \Leftrightarrow \left(\varphi(n) > \varepsilon, n \in N \cap \left[[\lambda_0] + 1; +\infty\right)\right) \Leftrightarrow \left(n \in N \cap \left(\varphi^{-1}(\varepsilon); +\infty\right) \cap \left[[\lambda_0] + 1; +\infty\right)\right),$$

де $(\lambda_0; +\infty) \supset \left(\varphi^{-1}(\varepsilon); +\infty\right)-$ множина розв'язків нерівності $\varphi(x) > \varepsilon$, $\varphi^{-1}(x)-$ функція обернена до функції $\varphi(x)$. Тоді всі $n \in N \cap \left[\left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right] + 1; +\infty\right) \subset \left[[\lambda_0] + 1; +\infty\right) \subset [\lambda_0; +\infty)$ задовольняють нерівність $\varphi(n) > \varepsilon$. Покладаємо $n_0 = n_0(\varepsilon) := \left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right] + 1 \ge [\lambda_0] + 1$, де $[d]-$ ціла частина дійсного числа d. Такий вибір $n_0 = n_0(\varepsilon)$ для довільного наперед заданого фіксованого $\varepsilon > 0$ завжди є коректним так як для довільного $\varepsilon > 0$

$$\left(n > n_0(\varepsilon) = \left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right] + 1 > \varphi^{-1}(\varepsilon) \ge \lambda_0, n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n| \ge \varphi(n) > \varepsilon\right) \Rightarrow \left(|x_n| > \varepsilon\right).$$

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Leftrightarrow \left(\varphi(n) > \varepsilon\right), \left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n| \ge \varphi(n)\right)\right\} \Rightarrow \left(\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n| > \varepsilon\right)\right).$$

Отже, для заданого $\varepsilon > 0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $\left(n > n_0(\varepsilon)\right) \Rightarrow \left(|x_n| > \varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Приклад 2). Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\left((-1)^n 5^n\right) + (-1)^n \left(n^\alpha + 1\right)\right) = \infty$, коли $\alpha > 0$.

◄. Маємо $x_n = \cos\left((-1)^n 5^n\right) + (-1)^n\left(n^\alpha + 1\right)\ \forall n \in \mathrm{N}$, коли $\alpha > 0$.

1 крок. $|x_n| = \left|\cos\left((-1)^n 5^n\right) + (-1)^n\left(n^\alpha + 1\right)\right| \ge \left|(-1)^n\left(n^\alpha + 1\right)\right| - \left|\cos\left((-1)^n 5^n\right)\right| \ge \left(n^\alpha + 1\right) - 1 = n^\alpha\ \ \forall n \in \mathrm{N}$

2 крок. Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon > 0$ покладаємо $|x_n| \ge \varphi(n) = n^\alpha > \varepsilon$ і розв'язуємо нерівність $\left(n^\alpha > \varepsilon, n \in N\right) \Leftrightarrow \left(n \in N \cap \left(\varepsilon^{1/\alpha}; +\infty\right)\right)$. Тоді всі $n \in N \cap \left[\left[\varepsilon^{1/\alpha}\right] + 1; +\infty\right)$ задовольняють нерівність $\varphi(n) = n^\alpha > \varepsilon$.

Покладаємо $n_0 = n_0(\varepsilon) := \left[\varepsilon^{1/\alpha}\right] + 1$,

3 крок. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо $\left\{\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(\varphi(n) > \varepsilon\right), \left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n| \ge \varphi(n)\right)\right\} \Rightarrow \left(\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(|x_n| > \varepsilon\right)\right)$.

Отже, для заданого $\varepsilon > 0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $\left(n > n_0(\varepsilon)\right) \Rightarrow \left(|x_n| > \varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.►

Послідовність кроків для випадку $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, де $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\right) \overset{def}{\Leftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > o \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : n > n_0 \Rightarrow x_n > \varepsilon\right)$:

1 крок Виконання оцінок. $x_n \geq \geq \cdots \geq \varphi(n)$, де $\varphi(x) > 0 \forall x \in (\lambda_0;+\infty) \subset (0;+\infty), \varphi(x) \uparrow +\infty (x \to +\infty)$,

тобто побудова скінченної послідовності порівнянь, прикінцевою метою якої завдяки властивості транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел буде порівняння $x_n \geq \varphi(n)$, де $\varphi(x)-$ по можливості достатньо проста елементарна додатнозначна зростаюча на проміжку $[\lambda_0;+\infty) \subset [1;+\infty)$ функція і $\varphi(x) \to +\infty (x \to +\infty)$ (наприклад, $\varphi(x) = x^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1$).

2 крок Розв'язування нерівності. Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon > 0$ покладаємо $x_n \geq \varphi(n) > \varepsilon$ і розв'язуємо нерівність

$$\left(\varphi(n) > \varepsilon, n \in N \cap \left[[\lambda_0]+1;+\infty\right)\right) \Leftrightarrow \left(\varphi(n) > \varepsilon, n \in N \cap \left[[\lambda_0]+1;+\infty\right)\right) \Leftrightarrow \left(n \in N \cap \left(\varphi^{-1}(\varepsilon);+\infty\right) \cap \left[[\lambda_0]+1;+\infty\right)\right),$$

де $(\lambda_0;+\infty) \supset \left(\varphi^{-1}(\varepsilon);+\infty\right)-$ множина розв'язків нерівності $\varphi(x) > \varepsilon$, $\varphi^{-1}(x)-$ функція обернена до функції $\varphi(x)$. Тоді всі $n \in N \cap \left[\left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right]+1;+\infty\right) \subset \left[[\lambda_0]+1;+\infty\right) \subset [\lambda_0;+\infty)$ задовольняють нерівність $\varphi(n) > \varepsilon$. Покладаємо $n_0 = n_0(\varepsilon) := \left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right]+1 \geq [\lambda_0]+1$, де $[d]-$ ціла частина дійсного числа d. Такий вибір $n_0 = n_0(\varepsilon)$ для довільного наперед заданого фіксованого $\varepsilon > 0$ завжди є коректним так як для довільного $\varepsilon > 0$

$$\left(n > n_0(\varepsilon) = \left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right]+1 > \varphi^{-1}(\varepsilon) \geq \lambda_0, n \in N\right) \Rightarrow \left(x_n \geq \varphi(n) > \varepsilon\right) \Rightarrow (x_n > \varepsilon).$$

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Leftrightarrow \left(\varphi(n) > \varepsilon\right), \left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(x_n \geq \varphi(n)\right)\right\} \Rightarrow \left(\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow (x_n > \varepsilon)\right).$$

Отже, для заданого $\varepsilon > 0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $\left(n > n_0(\varepsilon)\right) \Rightarrow \left(|x_n| > \varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Приклад 3). Довести, що $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$. ◄. Для послідовності $x_n = \sqrt[n]{n!} \; \forall n \in N$ маємо наступні кроки:

1 крок Виконання оцінок. Методом математичної індукції неважко показати, що $n! > \left(n/3\right)^n \forall n \in N$.

2 крок Розв'язування нерівності. Для наперед заданого довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ розв'язуємо нерівність $\left(n/3 > \varepsilon, n \in N\right) \Leftrightarrow \left(n > 3\varepsilon, n \in N\right) \Leftrightarrow \left(n \in N \cap (3\varepsilon;+\infty) \Leftrightarrow \left(n \in \left[[3\varepsilon]+1;+\infty\right)\right)\right)$, де $x_n = \sqrt[n]{n!} > n/3 > \varepsilon \; \forall n \in N$

Покладаємо $n_0 = n_0(\varepsilon) := [3\varepsilon]+1$.

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(n/3 > \varepsilon\right), \left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(x_n = \sqrt[n]{n!} > n/3\right)\right\} \Rightarrow \left(\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(x_n = \sqrt[n]{n!} > \varepsilon\right)\right).$$

Отже, для довільного наперед заданого $\varepsilon > 0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $\left(n > n_0(\varepsilon)\right) \Rightarrow \left(|x_n| = \sqrt[n]{n!} > \varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. ►

Послідовність кроків для випадку $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$**, де** $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right) \overset{def}{\Leftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > o \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : n > n_0 \Rightarrow x_n < -\varepsilon\right)$**:**

1 крок Виконання оцінок. $x_n \leq \leq \cdots \leq -\varphi(n)$, де $\varphi(x) > 0 \forall x \in (\lambda_0;+\infty) \subset (0;+\infty), \varphi(x) \uparrow +\infty (x \to +\infty)$, тобто побудова скінченної послідовності порівнянь, прикінцевою метою якої завдяки властивості транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел буде порівняння $x_n \leq -\varphi(n)$, де $\varphi(x)-$ по можливості достатньо проста елементарна додатнозначна зростаюча на проміжку $[\lambda_0;+\infty) \subset [1;+\infty)$ функція і $\varphi(x) \to +\infty (x \to +\infty)$ (наприклад, $\varphi(x) = x^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1$).

2 крок Розв'язування нерівності. Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon > 0$ покладаємо $x_n \leq -\varphi(n) < -\varepsilon$ і розв'язуємо нерівність

$$\left(\varphi(n) > \varepsilon, n \in N \cap \left[[\lambda_0]+1;+\infty\right)\right) \Leftrightarrow \left(-\varphi(n) < -\varepsilon, n \in N \cap \left[[\lambda_0]+1;+\infty\right)\right) \Leftrightarrow \left(n \in N \cap \left(\varphi^{-1}(\varepsilon);+\infty\right) \cap \left[[\lambda_0]+1;+\infty\right)\right),$$

де $(\lambda_0;+\infty) \supset \left(\varphi^{-1}(\varepsilon);+\infty\right)-$ множина розв'язків нерівності $\varphi(x) > \varepsilon$, $\varphi^{-1}(x)-$ функція обернена до функції $\varphi(x)$. Тоді всі $n \in N \cap \left[\left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right]+1;+\infty\right) \subset \left[[\lambda_0]+1;+\infty\right) \subset [\lambda_0;+\infty)$ задовольняють нерівність $\varphi(n) > \varepsilon$. Покладаємо $n_0 = n_0(\varepsilon) := \left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right]+1 \geq [\lambda_0]+1$, де $[d]-$ ціла частина дійсного числа d. Такий вибір $n_0 = n_0(\varepsilon)$ для довільного наперед заданого фіксованого $\varepsilon > 0$ завжди є коректним так як для довільного $\varepsilon > 0$

$$\left(n > n_0(\varepsilon) = \left[\varphi^{-1}(\varepsilon)\right]+1 > \varphi^{-1}(\varepsilon) \geq \lambda_0, n \in N\right) \Rightarrow \left(x_n \leq -\varphi(n) < -\varepsilon\right) \Rightarrow (x_n < -\varepsilon).$$

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Leftrightarrow \left(-\varphi(n) < -\varepsilon\right), \left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow \left(x_n \leq -\varphi(n)\right)\right\} \Rightarrow \left(\left(n > n_0(\varepsilon), n \in N\right) \Rightarrow (x_n < -\varepsilon)\right).$$

Отже, для заданого $\varepsilon > 0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $(n > n_0(\varepsilon)) \Rightarrow (x_n < -\varepsilon)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

Приклад 4). Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-1}{2-3n} = -\infty$. Маємо для послідовності $x_n = \dfrac{2n^2-1}{2-3n}$ $\forall n \in \mathrm{N}$ наступні кроки:

◀ ***1 крок. Виконання оцінок*** $x_n = \dfrac{2n^2-1}{2-3n} = -\dfrac{2n^2-1}{3n-2} < -\dfrac{2n^2-n^2}{3n} = -\dfrac{n}{3}$ $\forall n \in N$.

2 крок. Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon > 1$ покладаємо $x_n = \dfrac{2n^2-1}{2-3n} < -\dfrac{n}{3} < -\varepsilon$ $\forall n \in N$ і розв'язуємо нерівність $(n > 3\varepsilon, n \in N) \Leftrightarrow (n > 3\varepsilon, n \in N) \Leftrightarrow (n \in N \cap (3\varepsilon; +\infty)) \Leftarrow (n \in [[3\varepsilon]+1; +\infty))$. Покладаємо $n_0 = n_0(\varepsilon) := [3\varepsilon] + 1$.

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{(n > n_0(\varepsilon), n \in N) \Rightarrow \left(-\frac{n}{3} < -\varepsilon\right), (n > n_0(\varepsilon), n \in N) \Rightarrow \left(x_n = \frac{2n^2-1}{2-3n} < -\frac{n}{3}\right)\right\} \Rightarrow \left((n > n_0(\varepsilon), n \in N) \Rightarrow \left(x_n = \frac{2n^2-1}{2-3n} < -\varepsilon\right)\right)$$

Отже, для довільного наперед заданого фіксованого $\varepsilon > 0$ знайдено $n_0(\varepsilon) = [3\varepsilon] + 1$ таке, що $(n > n_0(\varepsilon) = [3\varepsilon] + 1) \Rightarrow \left(x_n = \dfrac{2n^2-1}{2-3n} < -\varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. ▶

Надалі надамо приклади на застосування означення границі послідовності комплексних чисел, для якої можливі такі випадки:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ $a -$ скінченне комплексне число; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

При застосуванні алгоритму при обчисленні границі послідовності комплексних чисел мета кожного з трьох кроків залишається не змінною. Але при виконанні першого кроку потрібно застосовувати модуль комплексного числа та його властивості, і доречно використовувати геометричну інтерпретацію комплексних чисел для більшої наочності міркувань. Також потрібно пам'ятати, що для комплексних чисел справедливі нерівності:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \le \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 + 2|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z|} = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,$$

і $\forall n \in \mathrm{N}$:

- $|z_n - a| \le |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} a|, |z_n| \le |\operatorname{Re} z_n| + |\operatorname{Im} z_n|$;
- $\sqrt{2\min\{|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a|, |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} a|\}} \le |z_n - a| \le 2\max\{|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a|, |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} a|\}$;
- $\sqrt{2\min\{|\operatorname{Re} z_n|, |\operatorname{Im} z_n|\}} \le |z_n| \le 2\max\{|\operatorname{Re} z_n|, |\operatorname{Im} z_n|\}$

Останні нерівності обґрунтовується з використанням нерівності між середнім геометричним та середнім арифметичним в наступний спосіб.

$$\forall n \in \mathrm{N}: \sqrt{2\min\{|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a|, |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} a|\}} \le \sqrt{2|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a| \cdot |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} a|} \le |z_n - a| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} a)^2} \le$$

$$\le \sqrt{(|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} a|)^2} = |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} a| \le 2\max\{|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} a|, |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} a|\}.$$

Приклад 5). Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{100 + n - 2ni}{1 + ni} = -2 - i$.

◀ Виконаємо для послідовності $z_n = \dfrac{100 + n - 2ni}{1 + ni}$, $a = -2 - i$ наступні крокі:

1 крок Виконання оцінок

$$\forall n \in N: |z_n - a| = \left|\frac{100 + n - 2ni}{1 + ni} - (-2 - i)\right| = \left|\frac{100 + n - 2ni}{1 + ni} + 2 + i\right| = \left|\frac{(100 + n - 2ni)(1 - ni)}{(1 + ni)(1 - ni)} + 2 + i\right| =$$

$$= \left|\frac{(100 + n - 2n^2) - i(102n + n^2)}{1 + n^2} + 2 + i\right| = \left|\frac{(100 + n - 2n^2) - i(102n + n^2) + 2 + 2n^2 + i + in^2}{1 + n^2}\right| = \left|\frac{(102 + n) - i(102n - 1)}{1 + n^2}\right| \le$$

$$\le 2\max\left\{\frac{102 + n}{1 + n^2}, \frac{102n - 1}{1 + n^2}\right\} = 2\frac{102n - 1}{1 + n^2} \text{ при } n \ge 2.$$

Отже, на завершення першого кроку дістанемо $|z_n - a| \le 2\dfrac{102n - 1}{1 + n^2} < 2\dfrac{102n}{n^2} = \dfrac{204}{n}$ $\forall n \in N, n \ge 2$

2 крок Розв'язування нерівності. Для наперед заданого довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ визначимо значення n, для яких $|z_n - a| < \dfrac{204}{n} < \varepsilon$ $\forall n \in N, n \ge 2$. Маємо $\left(n > \dfrac{204}{\varepsilon}, n \in N, n \ge 2\right) \Leftrightarrow \left(n \in \left(N \cap \left(\left[\dfrac{204}{\varepsilon}\right] + 2; +\infty\right)\right)\right)$. Означимо $n_0 = n_0(\varepsilon) := \left[\dfrac{204}{\varepsilon}\right] + 2$.

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n>n_0(\varepsilon),n\in N\right)\Rightarrow\left(\frac{204}{n}<\varepsilon\right),\left(n>n_0(\varepsilon),n\in N\right)\Rightarrow\left(\left|z_n-a\right|<\frac{204}{n}\right)\right\}\Rightarrow\left(\left(n>n_0(\varepsilon),n\in N\right)\Rightarrow\left(\left|z_n-a\right|<\varepsilon\right)\right).$$

Отже, для довільного наперед заданого $\varepsilon>0$ знайдено $n_0(\varepsilon)$ таке, що $\left(n>n_0(\varepsilon)\right)\Rightarrow\left(\left|z_n-a\right|<\varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100+n-2ni}{1+ni}=-2-i$. ►

Приклад 6). Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{14+7n^2+2ni}{1+ni}=\infty$.

◄ Маємо для послідовності $z_n=\frac{14+7n^2+2ni}{1+ni}$, $a=\infty$ наступні кроки:

1 крок Виконання оцінок $\forall n\in N$ дістанемо таку нерівність

$$\left|z_n\right|=\left|\frac{14+7n^2+2ni}{1+ni}\right|=\frac{\left|14+7n^2+2ni\right|}{\left|1+ni\right|}=\frac{\sqrt{\left(14+7n^2\right)^2+4n^2}}{\sqrt{1+n^2}}=\sqrt{\frac{\left(7+7\left(1+n^2\right)\right)^2+4\left(1+n^2\right)-4}{1+n^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{49+98\left(1+n^2\right)+49\left(1+n^2\right)^2+4\left(1+n^2\right)-4}{1+n^2}}=\sqrt{\frac{45}{1+n^2}+102+49\left(1+n^2\right)}>\sqrt{49\left(1+n^2\right)}>7n.$$

2 крок Розв'язування нерівності. Для довільного фіксованого $\varepsilon>0$ маємо $\left|z_n\right|>7n>\varepsilon\ \forall n\in N$. Знайдемо потрібні значення n з нерівності $\left(7n>\varepsilon,n\in N\right)\Leftrightarrow\left(n>\varepsilon/7,n\in N\right)\Leftrightarrow\left(n\in N\cap\left(\varepsilon/7;+\infty\right)\right)\Leftarrow\left(n\in\left[\left[\varepsilon/7\right]+1;+\infty\right)\right)$.

Покладаємо $n_0=n_0(\varepsilon):=\left[\varepsilon/7\right]+1$.

3 крок Висновки. За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\left(n>n_0(\varepsilon),n\in N\right)\Rightarrow\left(7n>\varepsilon\right),\left(n>n_0(\varepsilon),n\in N\right)\Rightarrow\left(\left|z_n\right|>7n\right)\right\}\Rightarrow\left(\left(n>n_0(\varepsilon),n\in N\right)\Rightarrow\left(\left|z_n\right|=\left|\frac{14+7n^2+2ni}{1+ni}\right|>\varepsilon\right)\right).$$

Отже, для довільного наперед заданого $\varepsilon>0$ знайдено $n_0=n_0(\varepsilon)=\left[\varepsilon/7\right]+1$ таке, що $\left(n>n_0(\varepsilon)\right)\Rightarrow\left(\left|z_n\right|>\varepsilon\right)$, тобто доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$. ►

Приклад 7). Твердження. Для того, щоб існувала границя $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A,\ A\neq0,\arg z_n\neq\pi\,\forall n\in\mathbb{N}$, необхідно і достатньо, щоб існували границі $\lim\limits_{n\to\infty}\left|z_n\right|=\left|A\right|,\ \lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=\arg A.$ або символічно:

$$\left(\exists\lim_{n\to\infty}z_n=A,\ \ A\neq0,\arg z_n\neq\pi\,\forall n\in\mathbb{N}\right)\Leftrightarrow\left(\exists\lim_{n\to\infty}\left|z_n\right|=\left|A\right|,\exists\lim_{n\to\infty}\arg z_n=\arg A,\ \ \arg z_n\neq\pi\,\forall n\in\mathbb{N}\right).$$

Доведення твердження.

Достатність. Якщо $n\to\infty,\exists\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=\arg A,\ A\neq0,\arg z_n\neq\pi\,\forall n\in\mathbb{N}$, то

$$z_n=\left|z_n\right|\left(\cos\arg z_n+i\sin\arg z_n\right)=\left|z_n\right|\left(\cos\arg z_n+i\sin\arg z_n\right)=\left|z_n\right|\cos\arg z_n+i\left|z_n\right|\sin\arg z_n\to\left|A\right|\cos\arg A+i\left|A\right|\sin\arg A,\ n\to\infty$$

за теоремами про границю добутку та границю суми двох збіжних послідовностей.

Необхідність. Нехай $\exists\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A,\ A\neq0,\arg z_n\neq\pi\,\forall n\in\mathbb{N}$. Тоді за означенням, *по-перше*, $\forall\varepsilon>0\,\exists n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\left|z_n-A\right|<\varepsilon\ \forall n>n_1$ і тому $\forall\varepsilon>0\,\exists n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\left|\left|z_n\right|-\left|A\right|\right|\le\left|z_n-A\right|<\varepsilon\ \forall n>n_1$ Отже, за означенням границі послідовності, маємо: $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\left|z_n\right|=\left|A\right|$. *По-друге*, доведемо, що $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=\arg A$

1 крок (рис.1). Маємо

$$\forall\varepsilon\in\left(0;\min\left\{d(z)=\left|z-A\right|:\operatorname{Im}z=0,\ \operatorname{Re}z\le0\right\}\right)\exists n_2(\varepsilon)>n_1(\varepsilon),n_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\left|z_n-A\right|<\varepsilon$$

$$\arg A-\arcsin\frac{\varepsilon}{\left|A\right|}<\arg z_n<\arg A+\arcsin\frac{\varepsilon}{\left|A\right|}\ \forall n>n_2(\varepsilon)>n_1(\varepsilon).$$

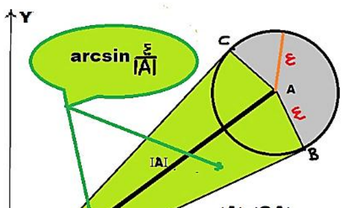

Рис. 1. Інтерпретація границі у комплексній площині

Джерело: розроблено авторами

2 крок. Це означає, що $\left|\arg z_n - \arg A\right| < \arcsin\frac{\varepsilon}{|A|}, \forall n > n_2(\varepsilon)$,

де $0<\lambda(\varepsilon) = \arcsin\frac{\varepsilon}{|A|} = O(\varepsilon)$ як завгодно мале, якщо $0<\varepsilon$ як -завгодно мале. Тому

$$\exists n_0 = n_0(\varepsilon) > n_2(\varepsilon) : \left|\arg z_n - \arg A\right| < \varepsilon$$

3 крок. Отже, за означенням границі послідовності, маємо: $\exists \lim_{n\to\infty} \arg z_n = \arg A$. Твердження доведено.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Встановлено мінімальну кількість кроків, яку пропонується виконувати при розв'язуванні задач з використанням означення границі послідовності на практичних заняттях з математичного аналізу. Разом з цим встановлено, що подібні задачі дозволяють активно залучати знання з теорії дійсного числа, навички розв'язування та доведення нерівностей, які є одним з основних інструментів встановлення та доведення фактів і теорем аналізу функцій дійсної змінної.

Подальші дослідження планується присвяти алгоритмізації розв'язування задач на означення границі функції однієї змінної в точці. Також будуть виділені три кроки розв'язування задач з використанням означення границі функції однієї змінної в точці.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Білоцький, М.М. (2013). Про алгоритмізацію процесу розв'язування задач з використанням границі послідовності. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*: Міжнародний збірник наук. робіт, 40, 66 – 72.
2. Томащук, О., Самусенко, П., Лещинський, О., & Іллічева, Л. (2024). Методика формування поняття границі послідовності у студентів закладів вищої освіти. *Фізико-математична освіта*, 39(2), 60-67. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i2-08
3. Босовський, М. В. (2010). *Наступність у вивченні теорії границь у загальноосвітніх та вищих навчальних закладах.* Дис. канд. пед.наук, Черкаський національний університет імені Б. Хмельницького.
4. Михалін, Г.О. (2003). *Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу*. РННЦ «ДІНІТ».
5. Третяк, М.В., & Босовський, М.В. (2017). Деякі роздуми про вивчення границі числової послідовності. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*, 135, 14-17. https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/557428.pdf
6. Шкіль, М. І., Колесник, Т. В., & Котлова, В. М. (1984). Вища математика. Елементи аналітичної геометрії. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї дійсної змінної. К.: Вища школа.
7. Дороговцев, А. Я. (1993). Математичний аналіз: Підручник. Частина 1.К. :Либідь.
8. Дюженкова, Л. І., Колесник, Т. В., Лященко, М. Я., Михалін, Г. О., & Шкіль, М. І. (2002). Математичний аналіз у задачах і прикладах. Частина І. К.: Вища школа.
9. Дюженкова, Л. І., Дюженкова, О. Ю., & Михалін, Г. О. (2002). Вища математика. Приклади і задачі. К. :Видавничий центр «Академія».

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bilotskyi, M.M. (2013). Pro alhorytmizatsiiu protsesu rozv'iazuvannia zadach z vykorystanniam hranytsi poslidovnosti [On the algorithmization of the problem-solving process using the sequence limit]. *Dydaktyka matematyky: problemy i doslidzhennia – Didactics Of Mathematics*: Problems And Investigations: Mizhnarodnyi zbirnyk nauk. robit, 40, 66 – 72. (Ukrainian).
2. Tomashchuk, O., Samusenko, P., Leshchynskii, O., & Illicheva, L. (2024). Metodyka formuvannia poniattia hranytsi poslidovnosti u studentiv zakladiv vyshchoi osvity [Methods of forming the concept of sequence limits for students of higher education institutions]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education, 39*(2), 60-67. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i2-08 (Ukrainian).
3. Bosovskyi, M. V. (2010). *Nastupnist u vyvchenni teorii hranyts u zahalnoosvitnikh ta vyshchykh navchalnykh zakladakh [Continuity in the study of boundary theory in general and higher education institutions]*. Dys. kand. ped.nauk, Cherkaskyi natsionalnyi universytet imeni B. Khmelnytskoho. (Ukrainian).
4. Mykhalin, H.O. (2003). *Profesiina pidhotovka vchytelia matematyky u protsesi navchannia matematychnoho analizu [Professional training of mathematics teachers in the process of teaching mathematical analysis]*. RNNTs «DINIT». (Ukrainian).
5. Tretiak, M.V., & Bosovskyi, M.V. (2017). Deiaki rozdumy pro vyvchennia hranytsi chyslovoi poslidovnosti [Some thoughts on studying the limit of a numerical sequence]. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*, *135*, 14-17. https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/557428.pdf (Ukrainian).

6. Shkil, M. I., Kolesnyk, T. V., & Kotlova, V. M. (1984). *Vyshcha matematyka. Elementy analitychnoi heometrii. Dyferentsialne ta intehralne chyslennia funktsii odniiei diisnoi zminnoi [Higher Mathematics. Elements of Analytical Geometry. Differential and Integral Calculus of a Function of One Real Variable]*. K.: Vyshcha shkola. (Ukrainian).
7. Dorohovtsev, A. Ya. (1993). *Matematychnyi analiz [Mathematical analysis]*: Pidruchnyk. Chastyna 1.K. :Lybid. (Ukrainian).
8. Diuzhenkova, L. I., Kolesnyk, T. V., Liashchenko, M. Ya., Mykhalin, H. O., & Shkil, M. I. (2002). *Matematychnyi analiz u zadachakh i prykladakh [Mathematical analysis in problems and examples]*. Chastyna I. K.: Vyshcha shkola. (Ukrainian).
9. Diuzhenkova, L. I., Diuzhenkova, O. Yu., & Mykhalin, H. O. (2002). *Vyshcha matematyka. Pryklady i zadachi [Higher Mathematics. Examples and Problems]*. K. :Vydavnychyi tsentr «Akademiia». (Ukrainian).

| *Матеріал надійшов до редакції: 18.12.2025 р.* | *Прийнято до друку: 25.01.2026 р.* | *Опубліковано: 02.03.2026 р.* |