ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2025, 40(5), https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-05
УДК: 378.147

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ

Тетяна ГРИЦИК ✉
Відокремлений структурний підрозділ «Рівненський фаховий коледж Національного університету біоресурсів і природокористування України», Україна
grizik2008@ukr.net
https://orcid.org/0009-0000-1132-7285

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Стаття присвячена систематизації та узагальненню основних типів математичних моделей, що застосовуються під час розв'язування прикладних задач економічного змісту в курсі вищої математики, а також визначенню педагогічних умов розвитку вмінь математичного моделювання у майбутніх економістів.*

Матеріали і методи. *У дослідженні використано комплекс теоретичних і емпіричних методів: аналіз науково-методичної літератури з проблеми математичного моделювання, узагальнення вітчизняного та зарубіжного досвіду, систематизація типових економіко-математичних моделей, педагогічні спостереження.*

Результати. *У статті обґрунтовано значення математичного моделювання як провідного методу формування професійної компетентності майбутніх економістів. Систематизовано основні типи математичних моделей, що використовуються в економічних задачах (матричні, векторні, лінійні, інтегральні, диференціальні, на основі похідної). Запропоновано узагальнену структурну схему математичної моделі прикладної задачі, яка поєднує етапи формалізації, аналітики й інтерпретації та відображає взаємозв'язок теоретичної і кількісної складових. З'ясовано, що саме реалізація цієї послідовності сприяє формуванню дослідницького типу мислення та розвитку аналітичних умінь здобувачів освіти.*

Висновки*. Визначено суперечність між потребою сучасної економічної освіти у фахівцях, здатних до моделювання й аналізу економічних процесів, та реальним станом математичної підготовки здобувачів освіти. Доведено, що системне використання прикладних задач економічного змісту в курсі вищої математики сприяє формуванню фахових компетентностей і розвитку економічного мислення. Перспективами подальших досліджень є створення методичних засобів і цифрових ресурсів для навчання математичного моделювання, а також інтеграція цього методу в міждисциплінарні курси економічного спрямування.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *математичне моделювання; математична модель; прикладна задача; вища математика; економічний зміст; прикладна спрямованість.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Грицик Т. Побудова математичних моделей при розв'язуванні прикладних задач економічного змісту. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 36-43. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-05.

CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODELS WHEN SOLVING APPLIED PROBLEMS OF ECONOMIC CONTENT

Tetyana HRYTSIK ✉
Separate structural unit "Rivne Professional College of the National University of Life Resources and Environmental Sciences of Ukraine", Ukraine
grizik2008@ukr.net
https://orcid.org/0009-0000-1132-7285

ABSTRACT

Formulation of the problem*. The article aims to systematize and generalize the main types of mathematical models used in solving applied economic problems within the higher mathematics course, as well as to determine the pedagogical conditions that foster the development of mathematical modeling skills among future economists.*

Materials and methods. *The research employed a combination of theoretical and empirical methods, including an analysis of scientific and methodological literature on mathematical modeling, the synthesis and comparison of national and international studies, the systematization of typical economic–mathematical models, and pedagogical observations.*

Results. *The study substantiates the role of mathematical modelling as a core method in forming the professional competence of future economists. The main types of mathematical models used in economic problem-solving — matrix, vector, linear, integral, differential, and derivative-based models — were systematized. A generalized structural scheme of a mathematical model of an applied problem is proposed, integrating the stages of formalization, analysis, and interpretation, and reflecting the relationship between theoretical and quantitative components. It was found that the implementation of this sequence contributes to the development of research-oriented thinking and analytical skills of learners.*

Conclusion. *The study reveals a contradiction between the growing need for economists capable of modelling and analyzing economic processes and the insufficient level of students' mathematical training. It is proven that the systematic use of applied economic problems in the higher mathematics course promotes the formation of professional competences and the development of economic thinking. Further research should focus on the design of methodological tools and digital resources for teaching mathematical modeling, as well as on integrating modeling techniques into interdisciplinary economics-related courses.*

KEYWORDS: *mathematical modeling; mathematical model; applied problem; higher mathematics; economic content; applied orientation.*

FOR CITATION: Hrytsik, T. (2025). Construction of mathematical models when solving applied problems of economic content. *Physical and Mathematical Education*, *40*(5), 36-43. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-05.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасні соціально-економічні системи функціонують у середовищі високої невизначеності, що зумовлює потребу у фахівцях, здатних до аналітичного мислення, прогнозування та побудови моделей економічних процесів. Тому дедалі все більшого значення набувають математичні методи аналізу, оптимізації та прийняття рішень, що робить математичну підготовку майбутніх економістів фундаментом їхньої професійної діяльності. Уміння моделювати економічні явища і процеси є основою для формування навичок економічного мислення, аналітичної культури й здатності до аргументованих висновків у професійній діяльності.

Побудова математичних моделей дає змогу не лише відображати реальні економічні процеси у формі формалізованих залежностей, а й досліджувати їх властивості, виявляти закономірності та прогнозувати результати управлінських рішень. Тому оволодіння методом математичного моделювання розглядається як показник глибини професійної підготовки майбутнього економіста. Здатність переходити від реальної економічної ситуації до її формалізованого опису, інтерпретувати отримані результати та співвідносити їх з практикою становить один із ключових компонентів професійної компетентності фахівця економічного профілю. Проте результати педагогічних спостережень і емпіричних досліджень свідчать про недостатню сформованість у здобувачів освіти умінь математичного моделювання. Майбутні економісти нерідко мають лише фрагментарні уявлення про метод моделювання, обмежуючись відтворенням готових алгоритмів без розуміння логіки переходів між етапами формалізації, аналітики та інтерпретації. Труднощі викликають не лише побудова моделей, а й осмислення економічного змісту отриманих результатів, що свідчить про слабкий зв’язок між теоретичною математичною підготовкою і прикладною економічною діяльністю. Отже, виникає суперечність між об’єктивною потребою сучасного ринку праці в економістах, здатних застосовувати математичні методи та моделювання для аналізу економічних процесів, і реальним станом їхньої підготовки, що характеризується недостатнім рівнем сформованості вмінь побудови й дослідження математичних моделей. Ця суперечність зумовлює необхідність пошуку ефективних шляхів розвитку вмінь математичного моделювання у процесі вивчення вищої математики, що й визначає науково-практичну значущість даного дослідження.

Аналіз актуальних досліджень. Проблематика математичного моделювання у підготовці фахівців економічного профілю посідає помітне місце у сучасній педагогічній та методичній літературі. Дослідники наголошують, що математичне моделювання виконує не лише інструментальну, а й світоглядну функцію, оскільки формує у здобувачів освіти системне бачення економічних процесів і здатність мислити у категоріях взаємозалежності та закономірностей. У цьому аспекті моделювання розглядається як провідний спосіб пізнання, який поєднує теоретичні положення математики з практичними завданнями економіки (Прус, 2023).

Українські вчені приділяють значну увагу проблемі професійної спрямованості математичної підготовки майбутніх економістів. Зокрема, у працях Самарук (2022), Бондаренко і Кирилащук (2017), Гусак і Гуліватої (2016) обґрунтовано необхідність інтеграції змісту економічних дисциплін із курсом вищої математики, що забезпечує формування стійких умінь застосовувати математичні моделі в аналізі виробничих, фінансових і соціально-економічних процесів. Дослідження Думанської (2015) акцентує увагу на типології професійних задач, розв’язання яких сприяє розвитку економічного мислення й формуванню математичної компетентності здобувачів освіти.

У зарубіжних студіях спостерігається посилення інтересу до проблеми навчання математичного моделювання як провідного компонента STEM-освіти. Greefrath і Vorhölter (2016) визначають моделювання як процес переходу від реальної ситуації до математичного її опису та інтерпретації результатів, а також підкреслюють його роль у розвитку критичного мислення. Hernandez-Martinez, Rogovchenko і Thomas (2021) розглядають особливості професійного мислення викладачів математики, які впроваджують моделювання в освітній процес, і роблять висновок, що від ефективності цієї практики залежить здатність здобувачів застосовувати математичні методи у нестандартних економічних ситуаціях. Blum і Niss (2024) досліджують історичну еволюцію поняття компетентності математичного моделювання та доводять, що його розвиток відбувається у тісному зв’язку із потребами економічної освіти та ринку праці.

Суттєвий внесок у вивчення тенденцій розвитку математичного моделювання зробили в’єтнамські дослідники Ngu, Nam, Cuong і Thao (2025), які відзначають різке зростання кількості наукових публікацій у базі Scopus, присвячених проблемі навчання моделюванню у вищій школі. Вони підкреслюють, що одним із визначальних трендів є перехід від традиційного викладання математики до викладання через моделювання, що сприяє підвищенню мотивації та практичної спрямованості навчання.

Таким чином, результати попередніх досліджень дають підстави стверджувати, що розвиток умінь математичного моделювання є стратегічним напрямом удосконалення математичної підготовки економістів. Водночас більшість робіт зосереджено на теоретичних засадах або описі окремих прикладів моделей, тоді як питання систематизації типів математичних моделей прикладних задач економічного змісту та методики їх узгодженого використання в курсі вищої математики залишаються недостатньо розробленими. Саме цю прогалину має на меті заповнити дане дослідження.

Мета статті – систематизувати та узагальнити основні математичні моделі, які застосовуються при розв’язуванні прикладних задач економічного змісту в курсі вищої математики.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретичну основу дослідження становили аналіз і синтез науково-методичної, психолого-педагогічної та навчальної літератури, присвяченої проблемі математичного моделювання в економічній освіті; порівняльний аналіз вітчизняних і зарубіжних досліджень; систематизація й узагальнення отриманих відомостей з метою виокремлення типів математичних моделей прикладних задач. До емпіричних методів належали педагогічні спостереження за процесом навчання вищої математики, аналіз письмових робіт, спрямованих на виявлення рівня сформованості умінь побудови та дослідження математичних моделей.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У методичній літературі під прикладною задачею розуміють задачу, яка за формулюванням та методами розв'язування близька до задач, що виникають на практиці. Ці задачі містять реальні умови та ситуації, що мають місце у різних сферах діяльності сучасної людини: в побуті, на виробництві, в економіці тощо. Математичне моделювання завжди походить із практичної задачі, яка потім описується математичною моделлю та вирішується за допомогою цієї моделі. Весь процес називається моделюванням (Greefrath & Vorhölter, 2016).

Задачами економічного змісту називають задачі, пов'язані з фінансами, торгівлею, прийняттям оптимальних рішень, грошовими розрахунками. Погоджуємося з думкою, що задачі економічного змісту – потужний засіб розвитку економічного стилю мислення, економічного виховання, вироблення економічної грамотності (Бас, 2015). Будь-яка задача економічного змісту складається з предметного сюжету, умови та вимоги. Сюжет задачі містить економічні поняття, наприклад поняття собівартості, рентабельності, прибутку, витрат тощо.

У педагогічній літературі визначені основні методичні вимоги до системи прикладних задач: відповідність чинним навчальним програмам та підручникам з вищої математики, доступність та зрозумілість формулювання умови, відображення реальних виробничих процесів, дотримання наукової символіки та термінології, ілюстрація значущості математичних методів до розв'язання реальних проблем.

Математичне моделювання відносять до наукових методів вивчення явищ та процесів шляхом створення та дослідження їх математичних моделей. Математична модель – це система математичних та логічних співвідношень, що описують реальні системи. Дослідження математичної моделі дає можливість дізнатися про характеристики об'єкта вивчення. До загальних принципів математичного моделювання відносять: адекватність моделі, тобто її відповідність оригіналу; універсальність, що характеризує широту області застосування моделі; об'єктивність, тобто відповідність наукових висновків реальним умовам; чутливість, тобто здатність моделі реагувати на зміни параметрів; простота моделі; стійкість, що означає малу зміну моделі при малій зміні вихідних параметрів.

Розв'язування будь-якої прикладної задачі здійснюється за загальною схемою математичного моделювання та складається з трьох основних етапів (Blum & Leiss, 2007):

I. Етап формалізації (математизації): відбувається «переклад» реальної практичної ситуації на мову математики. Результатом цього етапу є побудова математичної моделі.

II. Аналітичний етап: розв'язування задачі всередині математичної моделі, знаходження розв'язків відповідних математичних задач.

III. Етап інтерпретації (дематематизації): здійснюється інтерпретація отриманого розв'язку відносно вихідної практичної ситуації.

Педагогічна практика свідчить, що у здобувачів освіти найменш сформовані навички реалізації першого та третього етапів моделювання. Важливо не тільки ознайомлювати студентів з готовими математичними моделями та працювати в межах цих моделей, а й навчати їх створювати та здійснювати переходи від практичних ситуацій до математичних задач і навпаки.

Пропонуємо розглядати математичні моделі через призму двох змістових складових: в узагальненій теоретичній формі (теоретична модель) та у конкретизованій формі з відповідною числовою інформацією (кількісна модель). Теоретична модель містить розв'язок у загальному вигляді, що включає вирази із змінними, рівняння або формули, які далі застосовуються у кількісній моделі. Теоретична та кількісні складові взаємно доповнюють одна одну і створюють цілісне уявлення про об'єкт вивчення.

Як приклад, розглянемо задачу на продуктивність праці. Обсяг продукції фірми, виробленої протягом дня представляє функцію $u(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{7}{2}t^2+2t$, де t – час в годинах. Знайти продуктивність праці через 3 години після початку роботи. Задача зводиться до математичної моделі на основі похідної. Теоретична модель задачі: нехай $u=u(t)$ – кількість виробленої продукції за відрізок часу t, де $t\in[0;T]$. Продуктивність праці в кожен момент часу $t_0\in[0;T]$ дорівнює похідній від обсягу продукції: $P=u'(t_0)$. Кількісна модель задачі: знайдемо похідну функції $u=u(t)$: $u'(t)=t^2+7t+2$. Отже, продуктивність праці змінюється за законом: $P(t)=t^2+7t+2$. Обчислимо її значення у точці $t_0=3$ год: $u'(3)=3^2+21+2=32$ одиниць. Отже, через 3 години від початку роботи фірма виготовлятиме 32 вироби за 1 годину.

Розглянемо основні типи математичних моделей в задачах економіки та проаналізуємо їх особливості.

1. Математичні моделі на основі поняття матриці та дій з матрицями (матричні моделі). Моделі цього типу застосовуються в задачах з лінійними залежностями між досліджуваними величинами. До матричних моделей належать моделі споживчого вибору, моделі фірми, моделі економічного росту, рівноваги на товарних, ресурсних і фінансових ринках та інші.

Особливості матричних моделей: до моделей цього типу зводяться здебільшого прикладні задачі, умова яких представлена у табличній формі; на етапі формалізації умова задачі записується у матричній формі, яка є зручною та компактною; в межах аналітичного етапу розглядаються операції над матрицями (додавання, віднімання матриць, множення матриці на число, транспонування матриці, знаходження оберненої матриці); Проілюструємо на прикладі вказані особливості.

Приклад. Підприємство випускає продукцію трьох видів P_1, P_2, P_3, використовуючи сировину двох типів S_1, S_2. Норми витрати одиниць сировини на виготовлення одиниці продукції кожного виду зазначені в таблиці:

Види продукції	Види сировини		План випуску, од.
	S_1	S_2	
P_1	3	4	120
P_2	2	5	70
P_3	6	7	100
Вартість сировини, у.о.	50	80	

Визначити витрати сировини для планового випуску продукції та загальну вартість сировини.

Розв'язання. Запишемо матриці норм витрат сировини $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}$, плану випуску продукції $B=\begin{pmatrix}120 & 70 & 100\end{pmatrix}$ і вартості сировини $C=\begin{pmatrix}50\\ 80\end{pmatrix}$.

Матрицю витрат сировини S можна записати як добуток матриць B та A:

$$S=BA=\begin{pmatrix}120 & 70 & 100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1100 & 1530\end{pmatrix}.$$

Тоді загальну вартість сировини представимо через добуток матриць S і C:

$$Q=SC=\begin{pmatrix}1100 & 1530\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}50\\ 80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}177400\end{pmatrix}.$$

Отже, витрати видів сировини S_1 та S_2 дорівнюють 1100 і 1530 одиниць відповідно; загальна вартість сировини 177400 умовних одиниць.

2. Математичні моделі на основі поняття вектора (векторні моделі). Економічні процеси моделюються за допомогою векторів цін, обсягу споживчих товарів, витрат ресурсів, кредитів, процентних ставок та інших. Розглядається економічний зміст скалярного добутку векторів, що дає можливість визначити невідомі величини. Наприклад, якщо відомі вектор обсягу n товарів $\vec{x}=(x_1;x_2;...;x_n)$, де x_i – обсяг i-го товару, та вектор цін $\vec{p}=(p_1;p_2;...;p_n)$, де p_i – ціна одиниці i-го товару, то скалярний добуток векторів $\vec{p}\vec{x}=p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n$ визначає ціну набору цих товарів.

Особливості векторних моделей: однотипні набори числових даних задачі приймаються як координати векторів; розглядається скалярний добуток векторів, результатом якого є невідома економічна величина (певне число); введення векторів дає можливість упорядкувати розрахунки, зробити їх наочними та лаконічними; векторні моделі за своїм змістом схожі на матричні моделі.

Приклад. Ресурсні витрати фірми на виготовлення одиниці продукції задані в таблиці:

Ресурси	Кількість	Ціна
Сировина типу 1	150 кг	60 грн/кг
Сировина типу 2	80 кг	250 грн/кг
Сировина типу 3	60 кг	500 грн/кг
Оплата праці	0,5 людино-год	40 грн/людино-год
Обладнання	0,6 машино-год	50 грн/машино-год
Електроенергія	200 кВт	4 грн/кВт

Визначити ціну всіх ресурсів, що використовуються цією фірмою на виготовлення одиниці продукції.

Розв'язання. Запишемо другий стовпець таблиці даних як координати вектора ресурсів на одиницю продукції $\vec{x}=(150;80;60;0{,}5;0{,}6;200)$, а третій стовпчик таблиці – як координати вектора цін одиниць відповідних ресурсів $\vec{p}=(60;250;500;40;50;4)$. Скалярний добуток векторів $\vec{p}$ та $\vec{x}$ дорівнює загальній вартості усіх використаних ресурсів, тобто

$$\vec{p}\cdot\vec{x}=\sum_{i=1}^{6}p_ix_i=60\cdot150+250\cdot80+500\cdot60+40\cdot0{,}5+50\cdot0{,}6+4\cdot200=59850.$$

Отже, ресурсні витрати фірми на виготовлення одиниці продукції дорівнюють 59850 грн.

3. Математичні моделі на основі поняття системи лінійних рівнянь (лінійні моделі).

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь є одним із основних інструментів математичного моделювання задач економіки. До моделей цього типу зводиться ряд прикладних задач: про обсяг випуску продукції, про знаходження коефіцієнтів повних та непрямих витрат, плану та програми виробництва, про визначення оптимального плану, про знаходження витрат сировини, палива та трудових ресурсів та інші. Особливості моделей: задача зводиться до системи рівнянь, що містить певну кількість рівнянь та невідомих (залежно від умови); необхідно обрати раціональний спосіб розв'язування системи (наприклад, метод Гаусса, матричний тощо); з моделями цього типу здобувачі знайомі зі школи (на прикладі систем рівнянь з двома або трьома невідомими).

Приклад. Зі стандартних листів матеріалу необхідно викроїти заготовки трьох типів A, B, C у кількостях відповідно 400, 540, 310. Кількість заготовок, одержуваних з кожного листа при кожному способі розкроювання, наведені в таблиці.

Тип заготовки	Спосіб розкроювання		
	1	2	3
A	5	3	1
B	2	8	4
C	1	2	6

Визначити, скільки листів потрібно для викроювання даної кількості заготовок.

Розв'язання. Нехай x_1, x_2, x_3 – невідома кількість листів для заготовок типу A, B, C відповідно. Для викроювання заготовок типу А в загальній кількості 400 необхідно $5x_1+3x_2+x_3$ листів, звідки отримуємо перше рівняння: $5x_1+3x_2+x_3=400$. Для отримання 540 заготовок типу В необхідна кількість листів $2x_1+8x_2+4x_3$, тому маємо друге рівняння: $2x_1+8x_2+4x_3=540$. Для виконання заготовок типу С сума $x_1+2x_2+6x_3$ має дорівнювати 310, тобто $x_1+2x_2+6x_3=310$. Усі заготовки будуть викроєні за умови одночасного виконання трьох записаних рівнянь, тобто маємо систему рівнянь, що є математичною моделлю задачі про розкроювання: $\begin{cases} 5x_1+3x_2+x_3=400 \\ 2x_1+8x_2+4x_3=540 \\ x_1+2x_2+6x_3=310 \end{cases}$. Розв'язуючи цю систему будь-яким методом (наприклад, методом Гаусса), отримаємо єдиний розв'язок: $x_1=50, x_2=40, x_3=30$. Отже, для повного виконання завдання потрібно 50 листів для заготовок типу А, 40 листів – типу В, 30 листів – типу С.

4. Математичні моделі на основі поняття похідної

Економічний зміст похідної включає визначення оптимальних обсягів випуску продукції, визначення еластичності попиту відносно доходу, аналіз граничного наближення до максимального доходу, визначення швидкості зміни економічного процесу. На основі поняття похідної будуються наступні узагальнені види математичних моделей економічних задач: модель продуктивності праці, модель маргінальних витрат, модель маргінального доходу, модель визначення максимуму прибутку, модель оптимізації оподаткування підприємства, модель еластичності та інші.

Особливості моделей на основі похідної: моделі цього типу розглядаються в розділах „Диференціювання функцій однієї змінної" та „Фунукції багатьох змінних"; похідна функції характеризує швидкість зміни певного економічного процесу або величини; передбачається розгляд деякої функції однієї або кількох змінної, яка встановлює залежність між економічними величинами; знаходяться похідні функції та аналізується їх економічний зміст.

Приклад. Обсяг видобування y деякої корисної копалини за одиницю часу залежить від кількості робітників x та визначається функцією $y=8\sqrt{x}$. Ціна корисної копалини – 600 грн/т, заробітна плата робітника – 200 грн/год, інших витрат фірма не враховує. Знайти оптимальну кількість робітників фірми.

Розв'язання. Запишемо функцію прибутку фірми: $P(x)=4800\sqrt{x}-200x$. Дослідимо $P(x)$ на екстремум за допомогою похідної. Знайдемо похідну $P'(x)$: $P'(x)=4800\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-200=\dfrac{2400}{\sqrt{x}}-200$.

Розв'яжемо рівняння $P'(x)=0$ та знайдемо стаціонарні точки функції: $\dfrac{2400}{\sqrt{x}}-200=0$, звідки $x=144$.

Знайдемо другу похідну та її значення в стаціонарній точці: $P''(x)=2400\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1200}{\sqrt{x^3}}$, $P''(144)=-\dfrac{1200}{\sqrt{144^3}}<0$.

Таким чином, $x=144$ – точка максимуму функції прибутку фірми. Отже, оптимальна кількість робітників фірми дорівнює 144.

5. Математичні моделі на основі визначеного інтеграла (інтегральна модель).

Через визначений інтеграл обчислюють сумарні економічні ефекти, наприклад загальний дохід фірми або загальні витрати виробництва. Якщо граничний дохід задано функцією $y=f(x)$, де x – кількість проданих одиниць товару, то дохід від реалізації N одиниць продукції дорівнює: $\int_0^N f(x)dx$.

В економічних задачах часто використовують теорему про середнє значення фунції. Наприклад, якщо $p=p(t)$ – змінний прибуток підприємства, то среднє значення прибутку за проміжок часу від t_1 до t_2 обчислюють через визначений інтеграл: $p_c=\dfrac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt$.

Особливості моделей на основі поняття інтеграла: операція інтегрування дає змогу отримати економічні функції за відомими їх граничними функціями; до моделей цього типу зводяться прикладні задачі на обчислення середніх значень економічних показників; застосовуються в задачах реалізації товарів та фінансових задачах; враховується тісний взаємозв'язок операцій диференціювання та інтегрування.

Приклад. За чистими інвестиціями $I(t)=80000t$ обчислити приріст капіталу з першого по четвертий рік. Визначити, за скільки років приріст капіталу становитиме 10 000 000 у.о.

Розв'язання. Приріст капіталу обчислимо за допомогою визначеного інтеграла: $\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$,

$\Delta K = \int_{1}^{4} 80\,000tdt = 40\,000t^2\Big|_1^4 = 600\,000$ у.о. За проміжок часу t приріст капіталу має становити 10 000 000 у.о., тобто

$$40\,000t^2\Big|_0^t = 10\,000\,000,\ t^2 = 250,\ t \approx 15{,}8 \text{ років.}$$

Отже, з першого по четвертий рік приріст капіталу 600 000 у.о., для приросту капіталу на 10 000 000 у.о. необхідно приблизно 15,8 років.

6. Математичні моделі на основі диференціальних рівнянь (диференціальні моделі).

На основі диференціальних рівнянь будуються моделі рівноважного зростання випуску продукції, зв'язку інфляції та безробіття, демографічного процесу, знецінювання обладнання та інші (Барабаш та ін., 2019). Особливості моделей цього типу: описують складні функціональні залежності в економічних явищах та процесах; відображають динаміку змін економічних величин, тобто є динамічними математичними моделями; моделі містять крім невідомих величин також їх похідні різних порядків; потребують сформованих умінь інтегрувати диференціальні рівняння. Розглянемо приклад диференціальної моделі першого порядку.

Приклад. У 2000 році населення деякої країни налічувало 60 млн осіб. Якою буде чисельність населення цієї країни у 2030 році, якщо відомо, що населення у 2020 році становило 64 млн. Швидкість зміни приросту населення вважати пропорційною кількості населення.

Розв'язання. Кількість населення y зростає і є функцією часу t, тобто $y=y(t)$. Оскільки швидкість зміни приросту населення пропорційна його кількості, то $\frac{dy}{dt}=ky$, де k – коефіцієнт пропорційності. Отримане диференціальне рівняння $\frac{dy}{dt}=ky$ є математичною моделлю даного демографічного процесу. Відокремимо змінні та знайдемо загальний розв'язок рівняння: $\frac{dy}{y}=kdt$, $y=Ce^{kt}$, де $C=const$.

Визначимо сталу інтегрування *C*, поклавши, що в початковий момент часу $t=0$ кількість населення $y=60$ млн: $Ce^0=60$, звідки $C=60$.

Обчислимо *k* з умови, що через *t=20* років кількість населення *y=64* млн. осіб: $60e^{20k}=64$, звідки $k=\frac{1}{20}\ln\frac{16}{15}$.

Таким чином, одержали частинний розв'язок диференціального рівняння у вигляді: $y=60e^{\frac{1}{20}\ln\frac{16}{15}t}$. Знайдемо кількість населення у 2030 році, поклавши в останній формулі $t=30$: $y=60e^{\frac{1}{20}\ln\frac{16}{15}\ 30}=60\quad 32^{\frac{1}{20}}\approx 71{,}4$ млн осіб.

Отже, чисельність населення країни у 2030 році наближено становитиме 71,4 млн осіб.

Підсумовуючи наведені приклади математичних моделей різних типів (матричних, векторних, лінійних, диференціальних, інтегральних і моделей на основі похідної) можна констатувати, що всі вони демонструють спільну логіку побудови й функціонування. Незважаючи на відмінності у змісті, ступені складності чи галузі застосування, кожна модель проходить три послідовні стадії: формалізацію, аналітичну обробку та інтерпретацію результатів. Саме ця послідовність забезпечує перехід від реальної економічної ситуації до її узагальненого теоретичного опису, а далі — до практичного висновку, що має прикладне значення для майбутнього економіста. Така спільність структурних елементів дає підстави розглядати процес моделювання як цілісну систему, у якій узгоджено взаємодіють теоретична і кількісна складові. Для наочного подання цієї системи побудовано узагальнену структурну схему математичної моделі прикладної задачі (Рис. 1), що відображає внутрішні логічні зв'язки між етапами моделювання та різновидами моделей.

Інтерпретація поданої схеми дає змогу зробити кілька важливих умовиводів. По-перше, універсальність структури моделі свідчить про те, що метод математичного моделювання можна розглядати як наскрізний дидактичний принцип викладання вищої математики майбутнім економістам. Вона забезпечує можливість інтеграції різних розділів курсу (лінійна алгебра, математичний аналіз, теорія диференціальних рівнянь) у єдине поле практичних застосувань. По-друге, подвійна природа моделі (теоретична та кількісна) дозволяє поєднувати абстрактне мислення з практичною аналітикою. Такий підхід сприяє розвитку у здобувачів умінь переходити від символічних формул до економічного змісту, від загального закону до конкретного числового результату. По-третє, виділення етапів формалізації, аналітики й інтерпретації відображає поступове зростання когнітивної складності навчальної діяльності: від розуміння умови задачі до вибору адекватних математичних засобів і, зрештою, до осмислення результату в економічному контексті. Саме ця багаторівнева побудова моделі формує у здобувачів освіти не лише технічні навички, а й здатність до наукового узагальнення, аналізу й прогнозування. Тому узагальнена структурна схема виконує подвійну функцію – методологічну й педагогічну. З одного боку, вона є інструментом аналізу економічних процесів, а з іншого, засобом навчання, що допомагає формувати системне бачення ролі математики в економіці. Такий підхід поглиблює розуміння здобувачами сутності моделювання як методу пізнання та сприяє формуванню дослідницького типу мислення, необхідного для сучасного економіста.

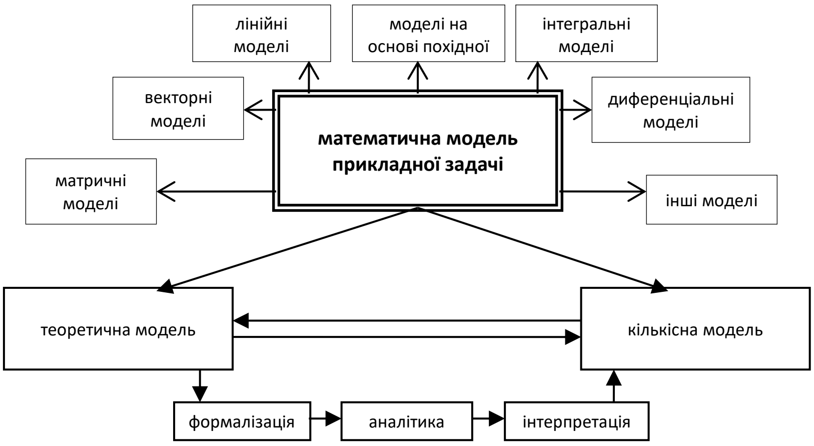

Рис. 1. Узагальнена структурна схема математичної моделі прикладної задачі

Джерело: авторська розробка

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведене дослідження підтвердило, що математичне моделювання є базовим засобом розвитку фахових компетентностей майбутніх економістів, адже забезпечує поєднання абстрактного теоретичного мислення з умінням аналізувати реальні економічні процеси. Запропонована систематизація моделей прикладних задач дозволила виявити закономірності їх побудови та узагальнити підхід до їх використання в курсі вищої математики. Виявлено, що послідовна реалізація етапів формалізації, аналітики та інтерпретації створює ефективну педагогічну рамку для формування навичок дослідницького мислення та самостійного вирішення професійних проблем.

Розвиток умінь математичного моделювання сприяє становленню у здобувачів економічного мислення, уміння прогнозувати тенденції та приймати обґрунтовані рішення. Водночас результати педагогічного діагностування свідчать, що більшість здобувачів освіти демонструють лише середній рівень володіння навичками моделювання, особливо на етапах формалізації реальних ситуацій і тлумачення отриманих результатів. Це підтверджує необхідність цілеспрямованого вдосконалення методики викладання вищої математики з акцентом на практико-орієнтованих завданнях економічного змісту та використанні моделювання як наскрізного методу навчання.

Узагальнена структурна схема математичної моделі прикладної задачі, розроблена в межах дослідження, може бути використана як дидактичний інструмент для проєктування навчальних занять, організації самостійної роботи здобувачів та створення електронних навчальних ресурсів. Її застосування сприяє розвитку пізнавальної самостійності, формуванню аналітичного й критичного мислення, а також підвищенню мотивації до навчання математичних дисциплін.

Перспективи подальших досліджень полягають у розробленні й апробації методичних засобів формування вмінь математичного моделювання з використанням цифрових технологій, симуляційного середовища та програмних пакетів економіко-математичного аналізу. Доцільним є також вивчення можливостей інтеграції моделювання у міждисциплінарні курси, зокрема фінансової аналітики, статистики, прогнозування та управління ризиками, що дозволить підвищити практичну значущість математичної підготовки майбутніх економістів і сприятиме розвитку їхньої дослідницької компетентності.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? The example “filling up”. In C.Haines (Eds.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering, and Economics-ICTMA 12.* (pp. 222–231). Woodhead Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221
2. Blum, W. & Niss, M. (2024). Origin and Development of the Notion of Mathematical Modelling Competency/Competencies. In H.Siller, V.Geiger,G.Kaiser (Eds.*),* *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times.* (pp. 185–200). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_14

3. Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling, ICME-13 Topical Surveys*. SpringerOpen. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1
4. Hernandez-Martinez, P., Rogovchenko, Y. & Thomas, S. (2021). 'I'm still making dots for them': Mathematics lecturers' views on their mathematical modelling practices. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 52(2), 165–177. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1668977
5. Ngu, P. N. H., Nam, N. D., Cuong, L. M., & Thao, T. T. P. (2025). Mathematical modelling in higher education: Evolving research and emerging trends (1980–2023). *Infinity Journal,* 14(2), 393-418. https://doi.org/10.22460/infinity.v14i2.p393-418
6. Барабаш, Г. М., Кирилич, В. М., & Пелюшкевич, О. В. (2019). *Збірник-довідник з курсу „Вища математика для економістів"*. ЛНУ імені Івана Франка. https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/09/1s3_HHYe_var_08-04-2019.pdf
7. Бас, С.В. (2019). *Формування предметної компетентності у процесі навчання вищої математики студентів економічних спеціальностей.* дис. канд. пед. наук, Криворізький національний університет. http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/0564/1589
8. Бондаренко, З. В., & Кирилащук, С. А. (2017). Прикладна спрямованість викладання вищої математики студентам економічного профілю ВНЗ. *Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. Педагогічні науки,* 4(90), 22-26. https://eprints.zu.edu.ua/25845/1/6.pdf
9. Гусак, Л. П., & Гулівата, І. О. (2016). Математичне моделювання як засіб здійснення професійної спрямованості навчання математики на економічних спеціальностях ВНЗ. *Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія: Педагогіка. Соціальна робота,* 1 (38), 105–107. https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/13517/1/
10. Думанська, Т. В. (2015). Визначення типології професійних задач майбутнього бакалавра економіки як важливого чинника формування його математичних компетентностей під час навчання вищої математики. *Science and Education: A New Dimension. Pedagogy and Psychology, III(37)*, 50–53. https://seanewdim.com/wp-content/uploads/2021/03/ped_psy_iii37_75.pdf
11. Самарук, Н.М. (2022). Шляхи реалізації професійної спрямованості математичної підготовки студентів економічних спеціальностей. *Grundlagen der modernen wissenschaftlichen Forschung, (12), 160-162.* https://doi.org/10.36074/logos-12.08.2022.50
12. Прус, А. (2023). Математичне моделювання як лінза реального світу. *Фізико-математична освіта, 38*(4), 56-61. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-008

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? The example "filling up". In C.Haines (Eds.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics-ICTMA 12*. (pp. 222–231). Woodhead Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221
2. Blum, W. & Niss, M. (2024). Origin and Development of the Notion of Mathematical Modelling Competency/Competencies. In H.Siller, V.Geiger,G.Kaiser (Eds.), *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times.* (pp. 185–200). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_14
3. Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling, ICME-13 Topical Surveys.* SpringerOpen. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1
4. Hernandez-Martinez, P., Rogovchenko, Y. & Thomas, S. (2021). Im still making dots for them: Mathematics lecturers views on their mathematical modelling practices. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 52(2), 165–177. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1668977
5. Ngu, P. N. H., Nam, N. D., Cuong, L. M., & Thao, T. T. P. (2025). Mathematical modelling in higher education: Evolving research and emerging trends (1980–2023). *Infinity Journal,* 14(2), 393-418. https://doi.org/10.22460/infinity.v14i2.p393-418
6. Barabash, H. M., Kyrylych, V. M., & Peliushkevych, O. V. (2019). *Zbirnyk-dovidnyk z kursu „Vyshcha matematyka dlia ekonomistiv"[Handbook for the course "Higher Mathematics for Economists"].* LNU imeni Ivana Franka. https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/09/1s3_HHYe_var_08-04-2019.pdf (in Ukrainian).
7. Bas, S.V. (2019). *Formuvannia predmetnoi kompetentnosti u protsesi navchannia vyshchoi matematyky studentiv ekonomichnykh spetsialnostei [Formation of subject competence in the process of teaching higher mathematics to students of economic specialties].* Candidate's thesis. Kryvorizkyi natsionalnyi universytet. http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/0564/1589 (in Ukrainian).
8. Bondarenko, Z. V., & Kyrylashchuk, S. A. (2017). Prykladna spriamovanist vykladannia vyshchoi matematyky studentam ekonomichnoho profiliu VNZ [Applied orientation of teaching higher mathematics to students of economic profile of universities]. *Visnyk Zhytomyrskoho derzhavnoho universytetu imeni Ivana Franka. Pedahohichni nauky – Bulletin of the Ivan Franko Zhytomyr State University. Pedagogical Sciences*, 4(90), 22-26. https://eprints.zu.edu.ua/25845/1/6.pdf (in Ukrainian).
9. Husak, L. P., & Hulivata, I. O. (2016). Matematychne modeliuvannia yak zasib zdiisnennia profesiinoi spriamovanosti navchannia matematyky na ekonomichnykh spetsialnostiakh VNZ [Mathematical modeling as a means of implementing the professional orientation of mathematics teaching in economic specialties of universities.]. Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho natsionalnoho universytetu. Seriia: Pedahohika. Sotsialna robota – Scientific Bulletin of Uzhhorod National University. Series: Pedagogy. Social Work, 1 (38), 105–107. https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/13517/1/ (in Ukrainian).
10. Dumanska, T. V. (2015). Vyznachennia typolohii profesiinykh zadach maibutnoho bakalavra ekonomiky yak vazhlyvoho chynnyka formuvannia yoho matematychnykh kompetentnostei pid chas navchannia vyshchoi matematyky [Determining the typology of professional tasks of a future bachelor of economics as an important factor in the formation of his mathematical competencies during the study of higher mathematics]. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology– Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, III(37), 50–53. https://seanewdim.com/wp-content/uploads/2021/03/ped_psy_iii37_75.pdf (in Ukrainian).
11. Samaruk, N.M. (2022). Shliakhy realizatsii profesiinoi spriamovanosti matematychnoi pidhotovky studentiv ekonomichnykh spetsialnostei [Ways to implement the professional orientation of mathematical training for students of economic specialties]. *Grundlagen der modernen wissenschaftlichen Forschung – Fundamentals of modern scientific research*, (12), 160-162. https://doi.org/10.36074/logos-12.08.2022.50 (in Ukrainian).
12. Prus, A. (2023). Matematychne modeliuvannia yak linza realnoho svitu [Mathematical modeling as a lens of the real world]. *Fizyko-matematychna osvita – Physics and mathematics education, 38*(4), 56-61. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-008 (in Ukrainian).

| *Матеріал надійшов до редакції: 09.08.2025 р.* | *Прийнято до друку: 25.10.2025 р.* | *Опубліковано: 28.11.2025 р.* |