ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2025, 40(5), https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-03
УДК: 517.987

ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЧНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЗАДАЧАХ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ З ПОХІДНИМИ БАГАТОВИМІРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Юрій БОХОНОВ ✉
Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, Україна
yubochonoff@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3355-008X

USING MATRIX CALCULUS IN PROBLEMS OF TRANSFORMING EXPRESSIONS WITH DERIVATIVES OF MULTIDIMENSIONAL MAPPINGS

Yuriy BOKHONOV ✉
Kyiv Polytechnic Institute, Ukraine
yubochonoff@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3355-008X

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *В задачах заміни змінних в диференціальних виразах, що містять похідні від багатовимірних відображень пропонується використання глобальних конструкцій, зокрема, матриці Якобі відображення. При цьому досягається формалізація, що допомагає розумінню ідейної сторони проблеми. Пропонована техніка особливо ефективно працює в найбільш складних задачах, коли треба перейти до нових як незалежних змінних, так і залежної.*

Матеріали і методи. *Для застосування замін в диференціальних виразах, що містять частинні похідні функцій від багатьох змінних, широко застосовуються матриці Якобі відображень, їхня поведінка при переході до нових змінних, формула диференціювання складеного відображення. При цьому найбільш корисним є використання похідної в позначеннях Лейбниця. Методика суттєво відрізняється від тих, що можна зустріти в численних посібниках. Треба зазначити, що вказана тематика входить, як правило, в програми вищих навчальних закладів з підвищеним рівнем вивчення математичного аналізу.*

Результати. *Розглянуто задачі, пов'язані з перетвореннями диференціальних виразів, в яких старі змінні виражаються через нові, а також нові змінні – через старі. Приклади охоплюють основні задачі на вказану тему, причому, також і підвищеної складності. Переконливо доведено, що в таких задачах ефективно працює матричне числення, а саме, матриця Якобі диференційовного відображення.*

Висновки. *Пропонована робота робить наголос на активному використанні матричної техніки в задачах перетворення змінних в диференціальних виразах, зокрема, диференціальних рівняннях першого порядку з багатьма змінними. Таким чином матриця Якобі постає як дійова конструкція, що робить процес перетворень більш зрозумілим і природним. Використання матриці Якобі допомагає студентам краще зрозуміти матеріал, робить розв'язання більш легким. Методика може бути пропонована також у курсах диференціальних рівнянь – звичайних і з частинними похідними.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *матричне числення; багатовимірне відображення; похідна; диференціювання; заміна змінних.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Бохонов Ю. Використання матричного числення в задачах перетворення виразів з похідними багатовимірних відображень. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 5. С. 21-28. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-03.

ABSTRACT

Formulation of the Problem. *In problems of substitution of variables in differential expressions containing derivatives of multidimensional mappings, the use of global constructions is proposed, in particular, the Jacobi matrix of the mapping. This achieves formalization that helps to understand the conceptual side of the problem. The proposed technique works especially effectively in the most complex problems, when it is necessary to switch to new variables, both independent and dependent.*

Materials and Methods. *For the application of substitutions in differential expressions containing partial derivatives of functions of many variables, the Jacobi matrix of mappings, its behavior when switching to new variables, and the formula for differentiating a composite mapping are widely used. In this case, the most useful is the use of the derivative in Leibniz notation. The methodology differs significantly from that found in many manuals. It should be noted that this topic is typically included in the programs of higher educational institutions with advanced studies in mathematical analysis.*

Results. *Problems related to transformations of differential expressions in which old variables are expressed in terms of new ones, and new variables in terms of old ones, are considered. The examples cover the main problems on the specified topic, as well as those of increased complexity. It has been convincingly demonstrated that matrix calculus, specifically the Jacobi matrix of differential mapping, is effective in solving such problems.*

Conclusion. *The proposed work emphasizes the active use of matrix techniques in problems involving the transformation of variables in differential expressions, particularly first-order differential equations with multiple variables. Thus, the Jacobi matrix proves to be an effective construction, making the transformation process more understandable and transparent. The use of the Jacobi matrix helps students better understand the material, making the solution easier and clearer. The technique can also be introduced in courses on differential equations, including ordinary and partial derivatives.*

KEYWORDS: *matrix calculus; multidimensional mapping; derivative; differentiation; change of variables.*

FOR CITATION: Bokhonov, Yu. (2025). Using matrix calculus in problems of transforming expressions with derivatives of multidimensional mappings. *Physical and Mathematical Education*, *40*(5), 21-28. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i5-03.

ВСТУП

Постановка проблеми. Диференціальне числення функцій багатьох змінних – обов'язкова тема в курсі математичного аналізу. Як правило, основна увага на практичних заняттях приділяється методам знаходження частинних похідних функцій, а сама похідна багатовимірного відображення, яку в даних базисах можна подати як матрицю Якобі, не бере участі у розв'язанні і майже не використовується на практиці. Насправді саме матричний підхід у задачах багатовимірного аналізу, особливо в задачах, в яких треба здійснювати перетворення змінних в диференціальних виразах або в диференціальних рівняннях з частинними похідними першого порядку, значно спрощує розв'язання, робить його природним. При цьому зрозумілою стає ідейна сторона процесу розв'язання.

Аналіз актуальних досліджень. Диференціальному численню багатовимірних відображень присвячена численна математична література, зокрема, І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов & О. К. Боярчук (1992), Дороговцев А. Я. (1993), Шкіль, М. І. (2005), В. П. Дубовик & І. І. Юрик (2013), O. Forster (2001), Miklós Laczkovich (2017), Shmuel Kantorovitz (2016), Wendell Fleming (2012). Однак, задачі перетворення диференціальних виразів не є розповсюдженими і розглядаються в навчальних закладах з підвищеним рівнем вивчення математичного аналізу. Як правило, методика розв'язання таких задач пов'язана з інваріантністю форми першого диференціала відносно замін змінних. Але при такому підході втрачається розуміння структури – не видно поведінки при перетвореннях похідної, матриці Якобі, як єдиного цілого. Найбільш сучасний погляд на операцію диференціювання полягає в тому, що для функції f, що діє з одного нормованого простору E в інший, F, її похідна в кожній точці – це елемент простору лінійних відображень: $f'(x) \in L(E,F)$ з E в F (J**.** Dieudonné (1969)). Далі доводиться формула диференціювання композиції функції, яка буде суттєво використовуватись в даній статті. В деяких класичних підручниках про цю конструкцію навіть не згадують, а в інших вона хоч і присутня, але не має подальшого розвитку, не пояснюється, що це може бути застосоване при розв'язанні задач різного степеня складності, наприклад, при знаходженні похідних складеної функції, при переході у диференціальних виразах та рівняннях з частинними похідними до нових координат, тощо. Автор вважає, що навчання студентів таким конструкціям підвищить їхній теоретичний рівень та зробить розв'язання задач більш зрозумілим.

Будемо реалізовувати описану конструкцію у скінченновимірному випадку. Розглянемо диференційовне відображення $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, y = f(x), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Його похідна – це матриця Якобі, яка в позначенні Лейбниця записується наступним чином:

$$\frac{D(y)}{D(x)} = \frac{D(y_1,\dots,y_m)}{D(x_1,\dots,x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ . & \dots & . \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Формула диференціювання композиції відображень (складеного відображення): нехай $z = z\left(y(x)\right) \in \mathbb{R}^k$. Тоді

$$\frac{D(z_1,\dots,z_k)}{D(x_1,\dots,x_n)} = \frac{D(z_1,\dots,z_k)}{D(y_1,\dots,y_m)} \frac{D(y_1,\dots,y_m)}{D(x_1,\dots,x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ . & \dots & . \\ \frac{\partial z_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial z_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ . & \dots & . \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Звідси при виконанні умов теореми про диференційовність відображення $x = x(y)$, оберненого до $y = y(x)$, доводиться справедливість формули: $\frac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(y_1,\dots,y_n)} = \left(\frac{D(y_1,\dots,y_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}\right)^{-1}$. Підкреслимо, що саме ця формула дуже спростить розв'язання деяких задач.

Розглянемо одну з найбільш розповсюджених задач. Нехай $u = u(x,y) \in \mathbb{R}$. Записати частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ в полярних координатах $\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}$, де $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. Зауважимо, що в цих записах є деяка невідповідність: u є функцією водночас від x, y і ρ,φ. Насправді величина u - це значення двох наступних функцій u і $\tilde{u}$:

$$u = u(x,y) = u\left(x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi)\right) \equiv \tilde{u}(\rho,\varphi).$$

Згідно з відомими формулами диференціювання складеного відображення і оберненого відображення

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{D(u)}{D(x,y)} = \frac{D(u)}{D(\rho,\varphi)} \frac{D(\rho,\varphi)}{D(x,y)} = \frac{D(u)}{D(\rho,\varphi)} \left(\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{\rho} & \frac{\cos\varphi}{\rho} \end{pmatrix} =$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi,\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi\right).$$

Остаточно,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi,\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi\right) \qquad (1)$$

Як правило, при розв'язанні цієї і подібних задач виписують досить громіздку систему лінійних рівнянь відносно шуканих похідних з подальшим їхнім розв'язанням. Автор пропонує не виписувати систему, а використати викладену техніку, яка ідейно замінює розв'язання системи (якщо б ми її виписали) застосуванням оберненої матриці до матриці Якобі перетворення старих (декартових) координат до нових (полярних), що, особливо просто для матриць розмірності 2×2 .

Аналогічно формулі (1) можна одержати для двох неперервно диференційовних функцій $u=u(x,y),v=v(x,y)$ формулу

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi & \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi\\ \frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi & \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Якщо ці функції задовольняють умовам Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, то з одержаного результату можна прийти до умов:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi=\frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi,\ \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi=\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi.$$

Виконаємо з цими рівностями два перетворення: спочатку перше помножимо на $-\sin\varphi$, друге – на $\cos\varphi$ і результати додамо; потім перше помножимо на $\cos\varphi$, а друге – на $\sin\varphi$ і теж додамо. Після спрощень отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}\ \text{-}$$

умови Коші-Рімана у полярних координатах, що є важливим фактом у теорії аналітичних функцій.

Метою роботи є застосування матричного числення в задачах заміни змінних в математичних виразах, що містять похідні першого порядку, зокрема, в диференціальних рівняннях першого порядку з частинними похідними.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження ґрунтується на аналізі програм курсу математичного аналізу для студентів 1-го курсу бакалаврату вищих навчальних закладів технічного спрямування і механіко-математичних факультетів університетів. Наполегливо втілюється методика застосування матриці Якобі диференційовного відображення. Застосовується ідеологія роботи автора – Бохонов, Ю. Є. (2021).

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Підкреслимо: при використанні замін і подальшому диференціюванні функцій автор наполягає на знаходженні не окремих частинних похідних, а всіх їх в цілому, як елементів відповідних матриць Якобі. Це також привчає студента до того, що вигляд диференціалів, формула диференціювання складеної функції такі самі, як і у одновимірному аналізі, але відповідні вирази мають матричну структуру.

Зауважимо також, що в подібних задачах забороняється розв'язувати нелінійну систему, знаходячи вираз одних координат через інші з метою знаходження матриці Якобі відповідного відображення. З ідейної точки зору розв'язання нелінійної системи важче, ніж розв'язання лінійної задачі, яке в даному випадку замінюється знаходження оберненої матриці.

Приклад 1. Перейти до полярних координат в системі рівнянь:

$$\frac{dx}{dt}=y+kx\left(x^2+y^2\right),\frac{dy}{dt}=-x+ky\left(x^2+y^2\right).$$

Перетворимо систему, застосовуючи формулу диференціювання складеного відображення і записавши праву частину в полярних координатах:

$$\begin{pmatrix}x_t'\\ y_t'\end{pmatrix}=\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\frac{D(\rho,\varphi)}{D(t)}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_t'\\ \varphi_t'\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}\sin\varphi+k\rho^2\cos\varphi\\ -\cos\varphi+k\rho^2\sin\varphi\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix}\rho_t'\\ \varphi_t'\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sin\varphi+k\rho^2\cos\varphi\\ -\cos\varphi+k\rho^2\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\varphi+k\rho^2\cos\varphi\\ -\cos\varphi+k\rho^2\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\rho^3\\ -1\end{pmatrix},$$

$$\frac{d\rho}{dt}=-k\rho^3,\frac{d\varphi}{dt}=-1.$$

Приклад 2. Записати у полярних координатах наступне диференціальне рівняння з частинними похідними: $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (1), підставляючи вирази $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ через $\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}$ в рівняння, одержимо після перетворень при $\rho \neq 0$: $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$. Його розв'язком буде довільна неперервно диференційовна функція: $z = f\left(x^2 + y^2\right)$.

Розглянемо два найбільш загальних випадки, коли відомо про зв'язок між «старою» функцією від двох «старих» змінних і «новою» функції, що залежить від двох «нових» змінних. При цьому в одній ситуації старі змінні виражаються через нові, а в іншій – нові змінні виражаються через старі.

Випадок I. Старі змінні $x, y, z = z(x, y)$ виражаються через нові $u, v, w = w(u, v)$: $x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \chi(u, v, w)$.

В деякому диференціальному виразі від старої невідомої функції $z = z(x, y)$ треба перейти до нової невідомої функції $w = w(u, v)$. Зауважимо, що вираз $\frac{D\chi(u, v, w)}{D(u, v)}$ далі будемо розуміти як похідні по (u, v) функції χ , від яких вона залежить явним чином, не беручи до уваги залежність від цих змінних функції w , тобто, саме частинні похідні, якщо w вважається незалежною змінною. З умови випливає: $z(x, y) = \chi(u, v, w)$. Підставляючи в ліву частину $x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w)$, одержимо тотожність, що суттєво, оскільки саме тотожність можна диференціювати: $z(x, y) = z\big(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w)\big) \equiv \chi\big(u, v, w(u, v)\big)$. Продиференціюємо обидві частини за змінними (u, v) :

$$\frac{D(z)}{D(u,v)} = \frac{D(z)}{D(x,y)}\left(\frac{D\big(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w)\big)}{D(u,v)} + \frac{D\big(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w)\big)}{D(w)}\frac{D(w)}{D(u,v)}\right) = \frac{D\chi(u,v,w)}{D(u,v)} + \frac{D\chi(u,v,w)}{D(w)}\frac{D(w)}{D(u,v)} .$$

Звідси

$$\frac{D(z)}{D(x,y)} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{D\chi(u,v,w)}{D(u,v)} + \frac{D\chi(u,v,w)}{D(w)}\frac{D(w)}{D(u,v)}\right)\left(\frac{D\big(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w)\big)}{D(u,v)} + \frac{D\big(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w)\big)}{D(w)}\frac{D(w)}{D(u,v)}\right)^{-1} .$$

Запишемо вирази правої частині у більш зручному для обчислень вигляді:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\left(\frac{\partial \chi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial v}\right) + \frac{\partial \chi}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}\right)\right)\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi}{\partial w} \end{pmatrix}\left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}\right)\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} + \frac{\partial \chi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \qquad (2)$$

Приклад 3. Перетворити диференціальне рівняння з частинними похідними $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$, увівши заміну: $x = ue^w = \varphi(u, w), y = ve^w = \psi(v, w), z = we^w = \chi(w)$.

Будемо діяти за формулою (2). Обчислимо окремо вирази у правій частині одержаного виразу :

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial v}\right) + \frac{\partial \chi}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}\right) = \left((1+w)e^w\frac{\partial w}{\partial u}, (1+w)e^w\frac{\partial w}{\partial v}\right) = (1+w)e^w\left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} == e^w\begin{pmatrix} 1 + u\frac{\partial w}{\partial u} & u\frac{\partial w}{\partial v} \\ v\frac{\partial w}{\partial u} & 1 + v\frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Позначимо визначник одержаної матриці через Δ . Читач самостійно зробить необхідні перетворення і знайде обернену до цієї матриці:

$$\left(= e^w\begin{pmatrix} 1 + u\frac{\partial w}{\partial u} & u\frac{\partial w}{\partial v} \\ v\frac{\partial w}{\partial u} & 1 + v\frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix}.\right)^{-1} = \frac{e^{-w}}{\Delta}\begin{pmatrix} 1 + v\frac{\partial w}{\partial v} & -u\frac{\partial w}{\partial v} \\ -v\frac{\partial w}{\partial u} & 1 + u\frac{\partial w}{\partial u} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{(1+w)e^{w}e^{-w}}{\Delta}\left(\frac{\partial w}{\partial u},\frac{\partial w}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}1+v\frac{\partial w}{\partial v} & -u\frac{\partial w}{\partial v}\\ -v\frac{\partial w}{\partial u} & 1+u\frac{\partial w}{\partial u}\end{pmatrix}=\frac{1+w}{\Delta}\left(\frac{\partial w}{\partial u},\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

Звідси

$$x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{u(1+w)e^{w}}{\Delta}\frac{\partial w}{\partial u},\ y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{v(1+w)e^{w}}{\Delta}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Тоді $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{(1+w)^2e^{2w}}{\Delta^2}\left(\left(u\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(v\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\right), z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=w^2e^{2w}\frac{(1+w)^2}{\Delta^2}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$

Таким чином рівняння з умови задачі після перетворень запишеться у вигляді, що співпадає (з точністю до позначень змінних) з тим, що фігурує в умові задачі:

$$\left(u\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(v\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v},$$

тобто, воно інваріантне відносно вказаної заміни змінних.

Приклад 4. Перетворити диференціальне рівняння з частинними похідними $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$,

увівши заміну: $x=\xi\varsigma\equiv\varphi(\xi,\eta,\varsigma), y=\eta\varsigma\equiv\psi(\xi,\eta,\varsigma), z=\varsigma\equiv\chi(\xi,\eta,\varsigma), u=\varsigma w(\xi,\eta,\varsigma)$.

Міркуючи, як і при доведенні формули (2), одержимо:

$$\frac{D(\varsigma w(\xi,\eta,\varsigma))}{D(\xi,\eta,\varsigma)}=\frac{D(u)}{D(\xi,\eta,\varsigma)}=\frac{D(u)}{D(x,y,z)}\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\varsigma)}\Rightarrow\left(\varsigma\frac{\partial w}{\partial\xi},\varsigma\frac{\partial w}{\partial\eta},w+\varsigma\frac{\partial w}{\partial\varsigma}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}\varsigma & 0 & \xi\\ 0 & \varsigma & \eta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\varsigma\frac{\partial w}{\partial\xi},\varsigma\frac{\partial w}{\partial\eta},w+\varsigma\frac{\partial w}{\partial\varsigma}\right)=\left(\varsigma\frac{\partial u}{\partial x},\varsigma\frac{\partial u}{\partial y},\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial\eta},\frac{\partial u}{\partial z}=w-\xi\frac{\partial w}{\partial\xi}-\eta\frac{\partial w}{\partial\eta}+\varsigma\frac{\partial w}{\partial\varsigma}.$$

Після підстановки знайдених похідних з урахуванням вигляду перетворень змінних з умови задачі одержимо:

$$(x-z\xi)\frac{\partial w}{\partial\xi}+(y-\eta z)\frac{\partial w}{\partial\eta}+z\varsigma\frac{\partial w}{\partial\varsigma}+zw=u+\frac{xy}{z}\Rightarrow\varsigma^2\frac{\partial w}{\partial\varsigma}+u=u+\xi\eta\varsigma\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial\varsigma}=\frac{\xi\eta}{\varsigma}.$$

Випадок ІІ. Нові змінні $\xi,\eta,\zeta=\zeta(\xi,\eta)$ виражаються через старі $x,y,z=z(x,y)$:

$$\xi=\varphi(x,y,z),\eta=\psi(x,y,z),\zeta=\chi(x,y,z).$$

Запишемо тотожність: $\zeta\left(\varphi(x,y,z(x,y)),\psi(x,y,z(x,y))\right)=\chi(x,y,z(x,y))$ і продиференціюємо її за змінними x і y :

$$\frac{D(\zeta)}{D(x,y)}=\frac{D(\zeta)}{D(\xi,\eta)}\left(\frac{D(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z))}{D(x,y)}+\frac{D(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z))}{D(z)}\frac{D(z)}{D(x,y)}\right)=\frac{D(\chi(x,y,z))}{D(x,y)}+\frac{D(\chi(x,y,z))}{D(z)}\frac{D(z)}{D(x,y)}.$$

Звідси неважко отримати вираз для частинних похідних старої невідомої функції за старими змінними:

$$\frac{D(z)}{D(x,y)}=\left(\frac{D(\zeta)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z))}{D(z)}-\frac{D(\chi(x,y,z))}{D(z)}\right)^{-1}\left(\frac{D(\chi(x,y,z))}{D(x,y)}-\frac{D(\zeta)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z))}{D(x,y)}\right)$$

або в координатній формі:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

$$=\left(\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi},\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial z}\end{pmatrix}-\frac{\partial\chi(x,y,z)}{\partial z}\right)^{-1}\left(\left(\frac{\partial\chi(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial\chi(x,y,z)}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi},\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial y}\end{pmatrix}\right). \tag{3}$$

Приклад 5. Перетворити диференціальне рівняння з частинними похідними $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$,

ввівши заміну і одержавши рівняння відносно нової функції $\zeta=\zeta(\xi,\eta)$, якщо

$$\xi=\varphi(x,y,z)=yz-x,\ \eta=\psi(x,y,z)=xz-y,\zeta=\chi(x,y,z)=xy-z.$$

Застосуємо формулу (3):

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi},\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}+1\right)^{-1}\left((y,x)-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi},\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)\begin{pmatrix}-1&z\\z&-1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left(y\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+x\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}+1\right)^{-1}\left((y,x)+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}-z\frac{\partial\zeta}{\partial\eta},-z\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)\right)=\left(y\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+x\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}+1\right)^{-1}\left(y+\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}-z\frac{\partial\zeta}{\partial\eta},x-z\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right).$$

Підставимо знайдені значення частинних похідних у рівняння:

$$(xy+z)\left(y+\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}-z\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)+\left(1-y^2\right)\left(x-z\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)=(x+yz)\left(y\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+x\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}+1\right)$$

і після перетворень одержимо: $\left(1-x^2-y^2-z^2-2xyz\right)\dfrac{\partial\zeta}{\partial\eta}=0$. Якщо вираз у дужках не дорівнює нулю, прийдемо до рівняння $\dfrac{\partial\zeta}{\partial\eta}=0.$ Його можна розв'язати у неявному вигляді: $\zeta=f(\xi)$, де f – довільна неперервно диференційовна функція. Повертаючись до старих змінних, будемо мати: $xy-z=f\left(yz-x\right)$.

Приклад 6. Перетворити диференціальне рівняння з частинними похідними $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, увівши заміну: $u=\dfrac{y}{x},v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Розв'язання. Далі ми будемо використовувати наступне значення кореня: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=v-z$.
Запишемо формулу диференціювання складеного відображення:

$$\frac{D(z)}{D(x,y)}=\frac{D(z)}{D(u,v)}\frac{D\big(u(x,y,z(x,y)),v(x,y,z(x,y))\big)}{D(x,y)}=$$

$$=\frac{D(z)}{D(u,v)}\left(\frac{D\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)}{D(x,y)}+\frac{D\big(u(x,y,z(x,y)),v(x,y,z(x,y))\big)}{D(z)}\frac{D(z)}{D(x,y)}\right).$$

Звідси

$$\left(1-\frac{D(z)}{D(u,v)}\frac{D\big(u(x,y,z(x,y)),v(x,y,z(x,y))\big)}{D(z)}\right)\frac{D(z)}{D(x,y)}=\frac{D(z)}{D(u,v)}\frac{D\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)}{D(x,y)}\Rightarrow$$

$$\frac{D(z)}{D(x,y)}=\left(1-\frac{D(z)}{D(u,v)}\frac{D\big(u(x,y,z(x,y)),v(x,y,z(x,y))\big)}{D(z)}\right)^{-1}\frac{D(z)}{D(u,v)}\frac{D\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)}{D(x,y)}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(1-\left(\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial z}\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial z}\end{pmatrix}\right)^{-1}\left(\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}&\dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial x}&\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\left(1-\left(\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}0\\1+\dfrac{z}{v-z}\end{pmatrix}\right)^{-1}\left(\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}-\dfrac{y}{x^2}&\dfrac{1}{x}\\[2mm]\dfrac{x}{v-z}&\dfrac{y}{v-z}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{v-z}{v-z-v\dfrac{\partial z}{\partial v}}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{v-z}\frac{\partial z}{\partial v},\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{v-z}\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Підставляючи знайдені значення у рівняння, одержимо:

$$\frac{v-z}{v-z-v\dfrac{\partial z}{\partial v}}\left(-\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x^2}{v-z}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y^2}{v-z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=v\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{v-z-v\dfrac{\partial z}{\partial v}}\frac{\partial z}{\partial v}=v\Rightarrow\left(x^2+y^2+v^2\right)\frac{\partial z}{\partial v}=v^2-zv.$$

З умови задачі випливає: $x^2+y^2+v^2=2\left(v^2-vz\right)$, після чого рівняння набуває вигляду: $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{1}{2}$.

Приклад 7. Перетворити диференціальне рівняння з частинними похідними $(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, взявши за залежну змінну x, а y,z – за незалежні змінні.

Розв'язання. Скористаємось формулою (3), ввівши наступні заміни:

$$\xi=\varphi(x,y,z)=z,\ \eta=\psi(x,y,z)=y,\ \zeta=\chi(x,y,z)=x:$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\left(\frac{\partial x}{\partial z},\frac{\partial x}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial z}\end{pmatrix}-\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^{-1}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial x},\frac{\partial x}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial z},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y}\\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{pmatrix}\right)=\left(\left(\frac{\partial x}{\partial z},\frac{\partial x}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)^{-1}\left((1,0)-\left(\frac{\partial x}{\partial z},\frac{\partial x}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-1}\left((1,0)-\left(0,\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-1}\left(1,-\frac{\partial x}{\partial y}\right).$$

Звідси $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial x}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-1}$. Підстановка одержаних виразів у рівняння після перетворень дає:

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y}.$$

ОБГОВОРЕННЯ

Більш традиційною є методика в задачах, де треба переходити від одних координат до інших в диференціальних виразах шляхом запису диференціалів в цих змінних і розв'язанні відповідних систем рівнянь відносно шуканих частинних похідних. Подібний підхід запроваджено у Шкіль, М. І. (2005). Пропонована в даній статті формалізація розв'язує такі проблеми набагато раціональніше, оскільки все впирається в знаходження оберненої матриці Якобі, що особливо у випадку матриці розмірності 2×2 є тривіальною задачею.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянуті приклади свідчать про ефективність і зрозумілість розв'язання досить складних задач диференціального числення функцій багатьох змінних. Особливо хочеться звернути увагу на приклад 7, дослідження якого має психологічні труднощі. Але при застосуванні пропонованого формалізму його розв'язування спрощується. Подальші дослідження можуть бути пов'язані з перетвореннями виразів, що містять похідні вищих порядків. При цьому виникає проблеми ідеологічного характеру, зокрема, з інтерпретацією похідної від матриці Якобі, тощо. Згідно з роботою автора, Бохонов, Ю. Є. (2024) вищі похідні можуть бути інтерпретовано у термінах тензорних добутків, що дає змогу працювати з кожною такою похідною як з єдиним цілим.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори підтверджують відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть розглядатися як потенційний конфлікт інтересів щодо публікації цієї статті.

ФІНАНСУВАННЯ

Робота виконана за відсутності фінансової підтримки з боку будь-яких організацій.

ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ

Це теоретичне дослідження не передбачає використання додаткових наборів даних.

ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Інструменти штучного інтелекту не використовувались при написанні цієї роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бохонов, Ю. Є. (2021). *Математичний аналіз. Частина 2. Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтеграли, що залежать від параметра: навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»*. КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/56825
2. Бохонов, Ю. (2024). Застосування тензорної алгебри в диференціальному численні багатовимірних відображень. *Фізико-математична освіта*, *39*(3), 24–30. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-03
3. Ляшко, І. І., Ємельянов, В. Ф. & Боярчук О. К. (1992). Математичний аналіз, частина 1. Київ: «Вища школа». https://chtyvo.org.ua/authors/Liashko_Ivan/Matematychnyi_analiz_Chastyna_1/
4. Дороговцев, А. Я. (1993). Математичний аналіз: підручник. К.: "Либідь". https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Dorogovtsev_P1_1993_320.pdf
5. Шкіль, М. І. (2005). Математичний аналіз: підручн. у 2-х ч. К.: Вища школа, https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Shkil_P2_2005_510.pdf
6. Дубовик, В. П. & Юрик, І. І. (2013). Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. 4-те вид. К. : Ігнатекс-Україна. https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/Dubovik_P1_2008_200.pdf
7. Forster, O. (2001). Analysis 1 – 3 (in German), *Vieweg Studium: Grundkurs Mathematik*, Vieweg, Braunschweig.
8. Laczkovich, M., & T. Sós, V. (2017). *Real Analysis* (Vol. 3). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-7369-9
9. Kantorovitz, S. (2016). *Several Real Variables*. Springer Cham. Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-27956-5
10. Fleming, W. (1977). *Functions of Several Variables*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9461-7
11. Dieudonné, J. (1969). Foundations of Modern Analysis. Academic Press.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bokhonov, Yu. Ye. (2021). *Matematychnyi analiz. Chastyna 2. Dyferentsialne chyslennia funktsii kilkokh diisnykh zminnykh. Intehraly, shcho zalezhat vid parametra: navch. posib. dlia stud. spetsialnosti 122 «Komp'iuterni nauky» [Mathematical analysis. Part 2. Differential calculus of functions of several real variables. Integrals depending on the parameter: a textbook for students of specialty 122 "Computer science"].* KPI im. Ihoria Sikorskoho. Kyiv : KPI im. Ihoria Sikorskoho. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/56825 (in Ukrainian).
2. Bokhonov, Yu. (2024). Zastosuvannia tenzornoi alhebry v dyferentsialnomu chyslenni bahatovymirnykh vidobrazhen [Application of tensor algebra in the differential calculus of multidimensional mappings]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education, 39*(3), 24-30. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-03 (in Ukrainian).
3. Liashko, I. I., Yemelianov, V. F. & Boiarchuk O. K. (1992). *Matematychnyi analiz [Mathematical Analysis]*, chastyna 1. Kyiv: «Vyshcha shkola». https://chtyvo.org.ua/authors/Liashko_Ivan/Matematychnyi_analiz_Chastyna_1/ (in Ukrainian).
4. Dorohovtsev, A. Ya. (1993). *Matematychnyi analiz: pidruchnyk [Mathematical Analysis: Textbook].* K.: "Lybid". https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Dorogovtsev_P1_1993_320.pdf (in Ukrainian).
5. Shkil, M. I. (2005). *Matematychnyi analiz: pidruchn. u 2-kh ch. [Mathematical Analysis: Textbook in 2 parts].* K.: Vyshcha shkola, https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Shkil_P2_2005_510.pdf (in Ukrainian).
6. Dubovyk, V. P. & Yuryk, I. I. (2013). *Vyshcha matematyka: navch. posib. dlia stud. vyshch. navch. zak. [Higher Mathematics: Textbook for Students of Higher Education].* 4-te vyd. K. : Ihnateks-Ukraina. https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/Dubovik_P1_2008_200.pdf (in Ukrainian).
7. Forster, O. (2001). Analysis 1 – 3 (in German), *Vieweg Studium: Grundkurs Mathemati*k, Vieweg, Braunschweig.
8. Laczkovich, M., & T. Sós, V. (2017). *Real Analysis* (Vol. 3). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-7369-9
9. Kantorovitz, S. (2016). *Several Real Variables*. Springer Cham. Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-27956-5
10. Fleming, W. (1977). *Functions of Several Variables*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9461-7
11. Dieudonné, J. (1969). Foundations of Modern Analysis. Academic Press.

| *Матеріал надійшов до редакції: 04.07.2025 р.* | *Прийнято до друку: 19.09.2025 р.* | *Опубліковано: 28.11.2025 р.* |