ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2025, 40(2), https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-07
УДК: 372.851

ЕКВІАФІННІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПЛОЩИНИ У МАТЕМАТИЧНІЙ ОСВІТІ ШКОЛЯРІВ ТА МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Микола ПРАЦЬОВИТИЙ ✉
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
prats4444@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6130-9413
Наталя ПРАВІЦКА
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна
n.pravitska@chnu.edu.ua, https://orcid.org/0009-0004-7651-9105
Софія РАТУШНЯК
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
ratush404@gmail.com, https://orcid.org/0009-0005-2849-6233

АНОТАЦІЯ

Робота присвячена одному з класів афінних перетворень площини (бієкцій площини на себе, які зберігають колінеарність точок), а саме перетворенням, головним інваріантом яких є площі квадровних фігур. Вони називаються еквіафінними і є метричними перетвореннями. Тому важливі як для математики, так і для її практичних застосувань.

Формулювання проблеми. *Афінні, зокрема еквіафінні, перетворення площини не вивчаються учнями у ШКГ, але вони фігурують у програмі університетського курсу Аналітичної геометрії для майбутніх учителів математики. Еквіафінні перетворення є окремим сегментом у темі ʼʼАфінні перетворення площиниʼʼ (вони утворюють підгрупу групи афінних перетворень відносно операції «композиція перетворень»), яскравими представниками цього класу перетворень є гіперболічний та еліптичний повороти. Теоретичне висвітлення теми «Еквіафінні перетворення» легко зробити вповні автономним, тоді як важко знайти рафінований виклад питання «Еквіафінні перетворення площини» в навчально-методичній літературі (точніше, його просто не існує). Це і стало головною мотивацією для підготовки цієї роботи. Вмотивований вчитель математики може знайти у запронованому матеріалі вступ до теорії еквіафінних перетворень площини.*

Методи та матеріали. *Застосовано теоретичні методи науково-педагогічного пошуку та математичні методи для доведення математичних тверджень.*

Результати. *У статті здійснено елементарний виклад навчального теоретичного матеріалу з теми «еквіафінні перетворення площини». Він супроводжується коментарями і прикладами застосувань, задачами з розв'язками та задачами для самостійного розв'язування. Зокрема, у роботі виведено формули для обчислення площі трикутника, побудованого на двох векторах як на сторонах, та площі трикутника, визначеного координатами вершин у прямокутній декартовій системі координат, які є допоміжними фактами при обґрунтуванні критерію еквіафінності перетворення. Окрему увагу приділено двом «породним» еквіафінним перетворенням – гіперболічному та еліптичному повороту площини. У роботі також доведено ознаку руху у сім'ї афінних перетворень площини.*

Висновки. *Наведений виклад навчального матеріалу може бути використаний вчителем математики у системі гурткової роботи в школі або викладачами аналітичної геометрії для майбутніх учителів математики. Наведений*

EQUI-AFFINE TRANSFORMATIONS IN MATHEMATICAL EDUCATION OF SCHOOLCHILDREN AND FUTURE MATHEMATICS TEACHERS

Mykola PRATSIOVYTYI ✉
Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
prats4444@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6130-9413
Natalia PRAVITSKA
Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine
n.pravitska@chnu.edu.ua, https://orcid.org/0009-0004-7651-9105
Sofiia RATUSHNIAK
Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
ratush404@gmail.com, https://orcid.org/0009-0005-2849-6233

ABSTRACT

The work is devoted to a specific class of affine transformations of the plane (bijections of the plane onto itself that preserve the collinearity of points), namely transformations whose primary invariant is the areas of quadrilateral figures. These are referred to as equi-affine transformations and are considered metric transformations. They hold significance both in mathematics and its practical applications.

Formulation of the problem. *Affine transformations, particularly equi-affine transformations of the plane, are not studied by students in the school geometry curriculum. However, they are included in the university course in Analytical Geometry for future mathematics teachers. Equi-affine transformations represent a distinct segment within the broader topic of "Affine Transformations of the Plane" (they form a subgroup of the group of affine transformations under the operation of "a composition of transformations"). Notable examples of this class of transformations are hyperbolic and elliptical rotations. Theoretical Exposition. Equi-affine transformations can be presented as a fully autonomous subject. Yet, it is difficult to find a filtered exposition of the "Equi-affine Transformations of the Plane" in instructional and methodological literature (in fact, it simply does not exist). This challenge served as the primary motivation for working on this research. A motivated mathematics teacher can use the proposed material as an introduction to the theory of equi-affine transformations of the plane.*

Materials and methods. *Theoretical methods of scientific and pedagogical research and mathematical methods for proving mathematical statements are applied.*

Results. *This article provides a basic presentation of theoretical educational material on "Equi-affine Transformations of the Plane." It is supplemented with commentary, application examples, solved problems, and tasks for independent problem-solving. In particular, the work derives formulas for calculating the area of a triangle constructed on two vectors as sides and the area of a triangle determined by the coordinates of its vertices in a rectangular Cartesian coordinate system. These are auxiliary results used to substantiate the criterion of equi-affinity for a transformation. Special attention is given to two "progenitor" equi-affine transformations: the hyperbolic and elliptical rotations of the plane. Additionally, the work proves a criterion for isometry within the family of affine transformations of the plane.*

Conclusions. *The presented educational material can be utilized by mathematics teachers in extracurricular activities at schools or by instructors of analytical geometry for future mathematics teachers. This material is the basis for formulating problems* *матеріал є основою для формулювання проблем, пов’язаних із методикою вивчення теми, зокрема зі збалансованістю задачного матеріалу.*

related to the methodology of studying the topic, in particular, the balance of the task material..

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *геометричне перетворення площини; афінне перетворення; еквіафінне перетворення; критерій еквіафінності перетворення; гіперболічний поворот; еліптичний поворот; шкільний курс геометрії; гурткова робота в школі; майбутній вчитель математики.*

KEYWORDS: *geometric transformation of the plane; affine transformation; equi-affine transformation; a criterion of equi-affinity; hyperbolic rotation; elliptical rotation; school geometry curriculum; extracurricular activities in schools; future mathematics teacher.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Працьовитий М., Правіцка Н., Ратушняк С. Еквіафінні перетворення площини у математичній освіті школярів та майбутніх вчителів математики. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 49-56. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-07.

FOR CITATION: Pratsiovytyi, M., Pravitska, N., & Ratushniak, S. (2025). Equi-affine transformations in mathematical education of schoolchildren and future mathematics teachers. *Physical and Mathematical Education*, *40*(2), 49-56. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-07.

ВСТУП

Шкода, що в деяких шкільних підручниках не дотримуються вказаного означення і більше того, руйнують місток між наукою МАТЕМАТИКА і навчальною дисципліною, між університетськими геометричними курсами і шкільним курсом геометрії. І це тоді, коли метод геометричних перетворень є одним з головних загальних методів геометрії, зокрема елементарної. Школярі, які цікавляться математикою, мають мати змогу знати більше про перетворення, причому без спотворення наукових істин, а вчитель математики бути озброєним знаннями і вміннями, системним цілісним поглядом, здатним і готовим учню допомогти. Проблемі науковості, доступності та доцільності вивчення афінних перетворень присвячена дана стаття.

Теоретичний аналіз джерел навчальної літератури засвідчує практичну відсутність інформації, яка стосується еквіафінних перетворень площини, а вони утворюють важливу підгрупу групи всіх афінних перетворень і важливі для застосувань. Більше того, знайомство школярів з афінними перетвореннями варто розпочинати саме з еквіафінних перетворень, яким присвячена ця стаття.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Нагадаємо, що взаємно однозначне (бієктивне) відображення множини (тривимірного простору, площини, прямої) на себе називається її *перетворенням*. Це є загальноприйнятим в геометрії означенням. Інформація про еквіафінні перетворення площини частково наявна в наукових джерелах, але відсутня в навчально-методичній літературі.

Функції: $y = x$, $y = -x^2 + 1$, $y = x^n$ є прикладами перетворень відрізка $[0; 1]$ числової прямої. Прикладами перетворень площини є: рухи (центральна, осьова та ковзна симетрії, паралельне перенесення та поворот площини навколо фіксованої точки на заданий кут); перетворення подібності, зокрема гомотетія; інверсія площини (без виколотої точки) тощо. Клас перетворень тривимірного простору є суттєво масивніший, зокрема йому належать такі прості перетворення як центральна симетрія, симетрія відносно площини, сфери, стиск до площини та ін.

Далі мова йтиме про перетворення площини. Кожне з них можна задавати різними способами, зокрема аналітичним (за допомогою формули чи декількох формул). Якщо φ – перетворення площини і $\varphi(M) = M'$, то кажуть, що M' є образом точки M при перетворенні φ, а M – прообразом точки M'. Традиційно координати образу M' точки $M(x; y)$ позначають через $(x'; y')$. Формули перетворення площини, задані у прямокутній декартовій системі координат (ПДСК) мають загальний вигляд: $x' = f_1(x, y)$, $y' = f_2(x, y)$, де під $f_1(x, y), f_2(x, y)$ розуміються вирази зі змінними x та y (але не кожна пара таких формул задає перетворення площини). Вони встановлюють зв'язок між координатами $(x; y)$ точки та координатами її образу $(x'; y')$. Наприклад, формули $x' = -x$, $y' = y$ визначають осьову симетрію з віссю Oy, а формули $x' = x + a$, $y' = y + b$ – паралельне перенесення площини на вектор $\vec{s} = (a; b)$. Формули $x' = \frac{xr^2}{x^2+y^2}, y' = \frac{yr^2}{x^2+y^2}$ визначають інверсію площини з центром $O(0; 0)$ і радіусом $r > 0$.

Перетворення площини, яке кожну точку відображає в себе, називається тотожним. Воно задається формулами: $x' = x$, $y' = y$. Кожне перетворення, будучи бієктивним відображенням, має обернене. Якщо $f(M) = M'$, то обернене перетворення, яке позначається f^{-1}, точці M' ставить у відповідність точку M. При оберненому перетворенні образ і прообраз міняються ролями, тобто для перетворення $f(M) = M'$ оберненим є перетворення $f^{-1}(M') = M$.

Наприклад, для перетворення

$$f\colon \begin{cases} x' = f_1(x, y) = x - 2y, \\ y' = f_2(x, y) = x + y + 1 \end{cases}$$

знайти обернене означає: «обернути» задані формули, тобто виразити x та y через x' та y' і взаємозамінити позначення координат образу і прообразу (згідно з домовленостями позначати координати образу і прообразу відповідно x' і y' та x, y). У даному випадку:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{3} + \dfrac{2y'}{3} - \dfrac{2}{3}, \\ y = -\dfrac{x'}{3} + \dfrac{y'}{3} - \dfrac{1}{3}, \end{cases} \text{ і } f^{-1}\colon \begin{cases} x' = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2y}{3} - \dfrac{2}{3}, \\ y' = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Метод геометричних перетворень є одним з загальних методів дослідження геометричних об’єктів та розв’язування задач. Наведемо приклад ефективного використання методу геометричних перетворень площини для доведення геометричних нерівностей.

Задача (Всеукраїнська олімпіада з математики, ІІІ етап 22-23.01.2022 р. м. Львів). *На бісектрисі зовнішнього кута C трикутника ABC взято точку M, відмінну від точки C. Довести, що периметр $\triangle ABM$ більший за периметр $\triangle ABC$, тобто $P_{\triangle ABM} > P_{\triangle ABC}$.*

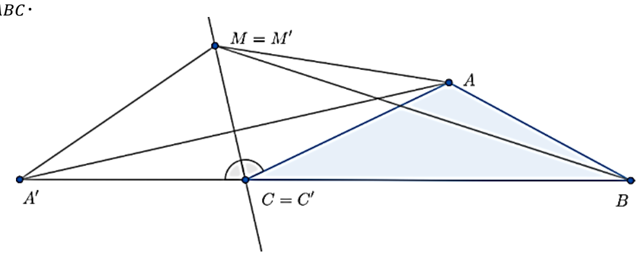

Рис. 1

Джерело: Всеукраїнська олімпіада з математики, ІІІ етап 22-23.01.2022 р. м. Львів

Розв'язання. Розглянемо симетрію площини f відносно бісектриси CM зовнішнього кута C трикутника ABC (див. Рис.1). Для неї точки M і C є нерухомими, а образ A' точки A лежить на прямій BC, $CA = CA'$, $MA = MA'$. Тоді

$$P_{\triangle ABM} = AB + BM + MA = AB + BM + MA'.$$

За нерівністю трикутника: $BM + MA' > A'B$. Але $A'B = A'C + CB = AC + CB$. Отже, $P_{\triangle ABM} > AB + A'C + CB = = AB + AC + BC = P_{\triangle ABC}$, що й вимагалось довести.

На основі перетворень можна побудувати всю теорію елементарної геометрії, зокрема шкільного курсу геометрії (це реалізовувалось у вітчизняній практиці в 70-тих роках попереднього століття (Колмогоров та ін., 1972)), але виявилось складним для школярів.

Перетворення, що зберігають міру, включаючи довжину, площу, об'єм, величину кута, відносять до класу метричних. Вони важливі для математики та її застосувань, зокрема для теорії ймовірностей, теорії динамічних систем та теорії фракталів. Одній з груп таких геометричних перетворень площини присвячена ця робота.

МЕТОДИ ТА МАТЕРІАЛИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Застосовано теоретичні методи науково-педагогічного пошуку та математичні методи для доведення математичних тверджень.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Афінні перетворення. Нагадаємо, що перетворення площини, яке кожні три точки, що лежать на одній прямій відображає в три точки, що теж належать одній прямій (тобто зберігає колінеарність точок), називається *афінним*. Афінні перетворення ще називають *колінеаціями*. Буквальний зміст терміну «колінеарність» означає «належність одній прямій». Зрозуміло, що рух (перетворення, що зберігає відстані) і перетворення подібності є частинним випадком афінного перетворення. Наведене означення носить суто геометричний зміст і є традиційним для геометричних курсів. Більше того, часто з педагогічних міркувань в означення афінного перетворення закладають надлишкову вимогу – збереження простого відношення трьох точок прямої, що є наслідком першої вимоги – збереження колінеарності точок (це випливає з відомих теорем Дарбу, які мають громіздкі доведення і займають багато лекційного часу).

Афінне перетворення у ПДСК аналітично задається формулами:

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1, \\ y' = a_2x + b_2y + c_2, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, які пов'язують координати точки $(x; y)$ з координатами її образу $(x'; y')$. Іноді ці формули «закладають» в означення афінного перетворення, тобто перетворення площини, задане формулами (1), називають афінним. Після цього виводяться основні властивості афінного перетворення: збереження колінеарності точок і простого відношення трьох точок прямої, доводиться основна теорема теорії афінних перетворень. Перше з наведених означень афінного перетворення, будучи суто геометричним, є суттєво абстрактнішим і малопридатним для початкового ознайомлення з ним і школярів, і студентів нематематичних спеціальностей.

Будь-яке афінне перетворення площини у спряжених комплексних координатах виражається наступною формулою: $z' = az + b\bar{z} + c$, де $a, b, c -$ комплексні параметри, $z -$ змінна, причому $\delta = a\bar{a} - b\bar{b} \neq 0$, числа і – спряженні.

Афінні перетворення площини не вивчаються у шкільному курсі математики (ШКМ). Там фрагментарно фігурують лише рухи та перетворення подібності і то не в аналітичній формі. Більше того, самому перетворенню як поняттю приділено мало уваги у шкільних програмах та підручниках, а в існуючих викладках бракує строгості. Але це не має заважати вчителю, який усвідомлює роль і значення геометричних перетворень, у позакласній, зокрема гуртковій, роботі знайомити учнів з афінними перетвореннями, принаймні з окремими їх представниками, культивувати метод геометричних перетворень. Це є одним з аргументів для відповіді на запитання: «Навіщо в університетському курсі «Аналітичної геометрії» майбутні вчителі математики системно вивчають афінні перетворення площини на строгій аналітичній основі?» (Працьовитий, 2007; Працьовитий, 2013.). Вчитель математики і успішні учні мають чітко розмежовувати метричні і афінні задачі елементарної математики (Істер, 2022). Варто прививати учням вміння міркувати категоріями афінної геометрії.

Еквіафінні перетворення площини. Афінне перетворення площини називається *еквіафінним*, якщо воно зберігає площі многокутників.

Зауваження. Оскільки довільний многокутник розбивається на скінченну кількість трикутників, то для перевірки еквіафінності перетворення площини достатньо перевірити збереження площ трикутників.

Наступні факти, доведені елементарними засобами, можуть суттєво допомогти вчителю ознайомити учнів з еквіафінними перетвореннями площини.

Лема 1. *Площа трикутника ΔABC обчислюється за формулою*

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

Доведення. Справді, використовуючи відому з ШКМ формулу:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\varphi$$

і означення скалярного добутку векторів, виконаємо перетворення:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sqrt{1-\cos^2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

Теорема 1. *Площа трикутника ΔABC, визначеного координатами вершин у ПДСК*: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ *обчислюється за формулою*:

$$S_{\Delta ABC} = \tfrac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|. \qquad (2)$$

Доведення. Оскільки

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1), \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1)\ ,$$

то використовуючи формулу (1), маємо

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}[((x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2)((x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2) - \left((x_2-x_1)(x_3-x_1) + (y_2-y_1)(y_3-y_1)\right)]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left((x_2-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_1)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)|.$$

Теорему доведено.

Наслідок. Площа трикутника з раціональними координатами вершин виражається раціональним числом.

Пропонуємо самостійно розв'язати наступні дві задачі.

Задача. Доведіть, що задане перетворення не є еквіафінним: $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

Задача. Знайти площу образу ΔABC, де $A(2;3), B(3;5), C(5;-2)$, під дією перетворення

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1, \\ y' = 6x - 3y - 4. \end{cases}$$

Гіперболічний поворот. Найпростішим прикладом еквіафінного перетворення, відмінного від руху, є перетворення f, яке задається формулами: $x' = kx$, $y' = \frac{1}{k}y$ і називається *гіперболічним поворотом*. Справді, якщо для трикутника ABC: $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$, $f(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$, то

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}\left|kx_1\left(\frac{1}{k}y_2 - \frac{1}{k}y_3\right) + kx_2\left(\frac{1}{k}y_3 - \frac{1}{k}y_1\right) + kx_3\left(\frac{1}{k}y_1 - \frac{1}{k}y_2\right)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)| = S_{\Delta ABC}.$$

Отже, гіперболічний поворот є еквіафінним перетворенням.

Формули гіперболічного повороту приводять до зв'язку координат образу і прообразу, який виражається рівністю $x'y' = xy$, тобто коли точка $M(x; y)$ належить гіперболі $\gamma: xy = c$, то її образ $M'(x'; y')$ також лежить на цій же гіперболі, оскільки $x'y' = xy = c$. Таким чином, гіпербола є інваріантною фігурою даного перетворення. Це і стало головною мотивацією для вибору терміну «гіперболічний поворот».

Зазначимо, що гіперболічний поворот іноді називають *перетворенням Лоренца*. Воно тісно пов'язане з неевклідовою *геометрією Лобачевського* і використовується в теорії відносності.

Задача. Знайти висоту $A'H'$ трикутника $\Delta A'B'C'$, що є образом ΔABC, де $A(2;3), B(3;5), C(5;-2)$, при перетворенні площини, яке задається формулами: $x' = 2x$, $y' = \frac{1}{2}y$.

Вказівка. Переконатись в тому, що дане перетворення зберігає площі фігур; обчислити площу трикутника ΔABC за формулою (2) і скористатись формулою $AH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{|B'C'|}$, де $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

Перетворення площини, задане формулами $x' = x$, $y' = ky$, де $k > 0$, називається стиском до осі Ox.

Задача 1. *Довести, що площа фігури, обмеженої еліпсом* $\gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *обчислюється за формулою* $S = \pi ab$.

Розв'язання. Формула, очевидно справджується для кола, що є еліпсом з рівними осями, тобто a=b. Коло з центром в початку координат і радіусом a: $x^2 + y^2 = a^2$ під дією стиску площини до осі Ox, який задається формулами

$$f: \begin{cases} x' = x, \\ y' = \dfrac{b}{a}y, \end{cases}$$

переходить в заданий еліпс γ. Враховуючи те, що при афінному перетворенні відношення площ образу і прообразу є константою $\Delta = 1 \cdot \frac{b}{a} - 0 \cdot 0 = \frac{b}{a}$, отримуємо $\frac{S_{\text{еліпс}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{b}{a}$, тобто $S_{\text{еліпс}} = \frac{b}{a}S_{\text{круга}} = \frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$, що й вимагалось довести.

КРИТЕРІЙ ЕКВІАФІННОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Теорема 2. *Афінне перетворення площини, задане у ПДСК формулами*

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + x_0, \\ y' = a_2x + b_2y + y_0, \end{cases} \tag{3}$$

є еквіафінним тоді і лише тоді, коли $\Delta = |a_1b_2 - a_2b_1| = 1$.

Доведення. Розглянемо вираз площі образу $A'B'C'$ трикутника ABC, заданого декартовими координатами вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3, y_3)$, під дією афінного перетворення (3), використовуючи формулу (2):

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}|x_1'(y_2' - y_3') + x_2'(y_3' - y_1') + x_3'(y_1' - y_2')| =$$
$$= \frac{1}{2}|(a_1x_1 + b_1y_1 + x_0)(a_2x_2 + b_2y_2 + y_0 - a_2x_3 - b_2y_3 - y_0) +$$
$$+(a_1x_2 + b_1y_2 + x_0)(a_2x_3 + b_2y_3 + y_0 - a_2x_1 - b_2y_1 - y_0) +$$
$$+(a_1x_3 + b_1y_3 + x_0)(a_2x_1 + b_2y_1 + y_0 - a_2x_2 - b_2y_2 - y_0)| =$$
$$= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3)(a_1b_2 - b_1a_2) + x_2(y_3 - y_1)(a_1b_2 - b_1a_2) + x_3(a_1b_2 - b_1a_2)|$$
$$= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)||a_1b_2 - a_2b_1| = |a_1b_2 - a_2b_1|S_{\Delta ABC}.$$

Отже, $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}$ тоді і лише тоді, коли $|a_1b_2 - a_2b_1| = 1$, що й вимагалось довести.

Наслідок. *Якщо афінне перетворення зберігає площу хоча б одного з трикутників, то воно є еквіафінним*.

Розглянемо приклад застосування теореми 2.

Задача 2. Трикутник $A_1B_1C_1$ є образом трикутника ABC при деякому афінному перетворенні f, а саме $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$, $C_1 = f(C)$. Знайти формули цього перетворення. Чи є афінне перетворення f еквіафінним, якщо в ПДСК задано $A(3; 0)$, $B(0; 3)$, $C(-1; 0)$, $A_1(7; 0)$, $B_1(1; 0)$, $C_1(0; 2)$?

Розв'язання. Знайдемо афінне перетворення f, використовуючи формули (3):

$$A_1 = f(A): \begin{cases} 7 = a_1 \cdot 3 + b_1 \cdot 0 + x_0, \\ 0 = a_2 \cdot 3 + b_2 \cdot 0 + y_0, \end{cases}$$
$$B_1 = f(B): \begin{cases} 1 = a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 3 + x_0, \\ 0 = a_2 \cdot 0 + b_2 \cdot 3 + y_0, \end{cases}$$
$$C_1 = f(C): \begin{cases} 0 = a_1 \cdot (-1) + b_1 \cdot 0 + x_0, \\ 2 = a_2 \cdot (-1) + b_2 \cdot 0 + y_0. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} 3a_1 + x_0 = 7, \\ 3b_1 + x_0 = 1, \\ -a_1 + x_0 = 0, \end{cases} \begin{cases} 3a_2 + y_0 = 0, \\ 3b_2 + y_0 = 0, \\ -a_2 + y_0 = 2, \end{cases}$$
$$a_1 = \frac{7}{4} = x_0, b_1 = -\frac{1}{4}, a_2 = -\frac{1}{2} = b_2, y_0 = \frac{3}{2}.$$

Отже,

$$\begin{cases} x' = \frac{7}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{7}{4}, \\ y' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Оскільки $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = S_{\Delta A_1B_1C_1}$, то f згідно з попереднім наслідком є еквіафінним.

Еліптичний поворот. Перетворення площини, яке у ПДСК задається формулами

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - ky\sin\varphi, \\ y' = \frac{1}{k}x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

називається *еліптичним поворотом*. Інваріантною фігурою цього перетворення є еліпс $\frac{x^2}{k^2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Справді, підставляючи вирази x' та y' у рівняння еліпса $\frac{x'^2}{k^2b^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ знаходимо рівняння його прообразу:

$$\frac{(x\cos\varphi - ky\sin\varphi)^2}{k^2b^2} + \frac{\left(\frac{1}{k}x\sin\varphi + y\cos\varphi\right)^2}{b^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{k^2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Як бачимо, рівняння не змінило форму, що засвідчує інваріантність цієї фігури відносно даного перетворення. При $k = 1$ еліптичний поворот є звичайним поворотом площини навколо початку координат на кут φ.

Еліптичний поворот площини є еквіафінним перетворенням згідно з теоремою 2, оскільки $\Delta = |a_1b_2 - a_2b_1| = \cos^2\varphi + \frac{1}{k} \cdot k\sin^2\varphi = 1$.

Згідно з теоремою 2 перетворення площини, задане у ПДСК формулами

$$\begin{cases} x' = mx\cos\varphi \pm ky\sin\varphi + x_0, \\ y' = \frac{1}{k}x\sin\varphi \mp \frac{1}{m}y\cos\varphi + y_0, \end{cases}$$

є еквіафінним. Справді, $\Delta = |a_1b_2 - a_2b_1| = \mp(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \mp1$.

Критерій руху.

Означення. Пару векторів $\vec{a} = (a_1; a_2)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2)$ називають ортонормованою, якщо

$$a_1^2 + a_2^2 = 1 = b_1^2 + b_2^2 \text{ і } a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Лема 2. *Якщо пара векторів $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ортонормована, то $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1$.*

Доведення. 1 Спосіб (для учнів). Позначимо $M = a_1 b_2 - a_2 b_1$ і розглянемо

$$M^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2.$$

Оскільки $a_2^2 = 1 - a_1^2$, $b_2^2 = 1 - b_1^2$, $a_2 b_2 = -a_1 b_1$. Тоді

$$M^2 = a_1^2(1 - b_1^2) + 2a_1^2 b_1^2 + (1 - a_1^2) b_1^2 = a_1^2 + b_1^2.$$

Аналогічно, в силу рівноправності a_1 і a_2, b_1 і b_2, маємо

$$M^2 = a_2^2 + b_2^2.$$

Тоді $2M^2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) = 2$. Отже, $M = \pm 1$.

2 Спосіб (для студентів, які вивчили векторний добуток векторів). В ортонормованому базисі $< \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, >$ тривимірного простору розглянемо вектори $\vec{a} = (a_1; a_2; 0)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; 0)$. Оскільки

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 = 0,$$

то $\vec{a} \perp \vec{b}$. Тому $cos\ \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 0$, а отже, синус напрямленого (орієнтованого) кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює ± 1. З іншого боку, згідно з означенням векторного добутку векторів маємо

$$\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \sqrt{0 + 0 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} = |\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}|.$$

Тому $|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}| = 1$, а отже, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \pm 1$.

Лему доведено.

Теорема 3. *Перетворення площини f, задане формулами*

$$x' = a_1 x + b_1 y + x_0 \text{ і } y' = a_2 x + b_2 y + y_0,$$

де пара векторів $\vec{a} = (a_1; a_2)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2)$ є ортонормованою, є еквіафінним, більше того, воно є рухом – перетворенням, що зберігає відстані.

Доведення. Перша частина твердження є наслідком попередньої леми і теореми, оскільки з ортонормованості пари векторів $\vec{a} = (a_1; a_2)$ *і* $\vec{b} = (b_1; b_2)$маємо $|a_1 b_2 - a_2 b_1| = 1$, а згідно з теоремою2 перетворення є еквіафінним.

Покажемо, що дане перетворення зберігає відстанні. Нехай точки $A(x_A; y_A)$ і $B(x_B; y_B)$ задані своїми координатами в ПДСК. Тоді маємо координати образу цих точок

$$A'(a_1 x_A + b_1 y_A + x_0; a_2 x_A + b_2 y_A + y_0),$$
$$B'(a_1 x_B + b_1 y_B + x_0; a_2 x_B + b_2 y_B + y_0).$$

Виразимо відстань між точками A' і B':

$$|A'B'| = \sqrt{[a_1(x_B - x_A) + b_1(y_B - y_A)]^2 + [a_2(x_B - x_A) + b_2(y_B - y_A)]^2} =$$
$$= \sqrt{(x_B - x_A)^2[a_1^2 + a_2^2] + (y_B - y_A)^2[b_1^2 + b_2^2] + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)(x_B - x_A)(y_A - y_B)}$$
$$= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |AB|.$$

Отже, f є рухом.

Задача 3. Знайти афінне перетворення, відмінне від руху, для якого парабола: $y^2 = 2px$ є інваріантною фігурою, а її вершина – інваріантною точкою. І з’ясувати чи є воно еквіафінним.

Розв’язання. Скористаємось загальними формулами афінного перетворення:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + x_0, \\ y' = a_2 x + b_2 y + y_0. \end{cases}$$

Оскільки вершина $O(0; 0)$ є інваріантною, то $x_0 = 0, y_0 = 0$. Тому формули набувають вигляду

$$x' = a_1 x + b_1 y, y' = a_2 x + b_2 y.$$

Оскільки парабола γ є інваріантною фігурою, то її образ задається тим же рівнянням: $y'^2 = 2px'$. Тоді рівняння прообразу після підстановки виразів x' та y' набуває вигляду:

$$(a_2 x + b_2 y)^2 = 2p(a_1 x + b_1 y), a_2^2 x^2 + 2a_2 b_2 xy + b_2^2 y^2 = 2pa_1 x + 2pb_1 y.$$

Звідки $a_2 = 0$, $b_1 = 0$ і $y^2 = 2p\frac{a_1}{b_2^2}x$. Отже, афінне перетворення $\begin{cases} x' = c^2 x, \\ y' = cy, \end{cases}$ де $0 \neq c \neq 1$, задовольняє вимогу задачі. Воно відмінне від руху згідно з теоремою 3 і для нього задана парабола є інваріантною фігурою.

Оскільки $a_1 b_2 = a_2 b_1 = c^3 \neq \pm 1$, то знайдене афінне перетворення не є еквіафінним.

Означення. Афінне перетворення, відмінне від руху, інваріантною фігурою якого є парабола, називається параболічним поворотом.

ГРУПА ЕКВІАФІННИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТА ЇЇ ПІДГРУПИ

Множина всіх афінних перетворень площини відносно операції «композиція перетворень» (суперпозиція) утворює некомутативну групу (дві осьові симетрії з осями, що перетинаються, але не перпендикулярні, не комутують). Одним з головних інваріантів цієї групи є збереження простого відношення трьох точок однієї прямої. Її підгрупами є множина всіх перетворень подібності та множина рухів. Теорія інваріантів групи афінних перетворень називається *афінною геометрією*, тобто афінна геометрія з групової точки зору (погляд, запропонований в 1872 р. Ф.Клейном) вивчає властивості геометричних фігур і геометричних відношень (відповідностей), які зберігаються при будь-якому афінному перетворенні.

Множина всіх еквіафінних перетворень площини є підгрупою групи всіх афінних перетворень площини. Її головним інваріантом є збереження площ квадровних фігур, а отже, еквіафінне перетворення зберігає відношення рівновеликості та рівноскладеності, які еквівалентні в силу теореми Бояй-Гервіна. Підгрупами групи еквіафінних перетворень є множина рухів, а також множина всіх гіперболічних поворотів (перетворень, які задаються формулами: $x' = kx,\ y' = \frac{1}{k}y$). При k=1 маємо нейтральний (нульовий) елемент групи -- тотожне перетворення $x' = x,\ y' = y$, обернене перетворення задається формулами: $x' = \frac{1}{k}x,\ y' = ky$.

Зауважимо, що афінні перетворення не представленні у навчальному посібнику (Боровик та ін., 2003), рекомендованому МОН України для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних навчальних закладів, що є свідченням того, що не всі майбутні вчителі математики їх вивчають.

ВИСНОВКИ

Наведену вище коротку аналітичну теорію еквіафінних перетворень площини доступну для старшокласників можна включати у систему гурткової роботи з геометрії для школярів. Добре було б мати збалансовану систему яскравих задач, які ефектно розв'язуються з використанням еквіафінних перетворень площини. Це актуальне, на наш погляд, завдання ми плануємо виконати в майбутньому, але наразі такою добіркою не володіємо. Можливо хтось з читачів має такі приклади, запрошуємо до обговорення і співпраці. Зауважимо, що знайомство з формульною (координатною) формою задання та дослідження перетворень площини для школярів є новим (не вписується у традиційні схеми) і може суттєво розширити погляд на геометрію – науку, яка органічно поєднує синтетичні та аналітичні методи дослідження об'єктів.

Рекомендуємо читачеві ознайомитись з науковим поглядом на геометричні перетворення в ШКМ у (Бевз, 1977; Бевз та ін., 1982).

Задачі. 1. *Знайти прообраз еліпса* $\frac{x'^2}{k^2b^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ *при еквіафінному перетворенні* $\begin{cases} x' = kx\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + \frac{1}{k}y\cos\varphi\,. \end{cases}$

2. *Відомо, що* $a_1^2 + a_2^2 = c^2 = b_1^2 + b_2^2$, $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. *Яких значень може набувати вираз* $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$?

3. Перетворення площини, інваріантною фігурою якого є принаймні одна парабола, називається параболічним поворотом. Знайти формули афінного перетворення площини, яке параболу $y = -x^2$ переводять саму в себе, залишаючи вершину на місці. Встановити чи є вказаний параболічний поворот еквіафінним перетворенням?

4. Знайти критерій еквіафінності перетворення у термінах спряжених комплексних координат?

5. Знайти перетворення, обернене заданому:

$$\begin{cases} x' = mx\cos\varphi + ky\sin\varphi + x_0, \\ y' = \dfrac{1}{k}x\sin\varphi - \dfrac{1}{m}y\cos\varphi + y_0. \end{cases}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз, Г.П. (1977). *Методика викладання математики*. Вища школа.
2. Бевз, Г.П., Конфорович, А.Г., Резніченко, З.О., & Ченакал, Є.О. (1982). *Математика: Посібник для факультативних занять у 7 кл*. Радянська школа.
3. Боровик, В.Н., Зайченко, І.В., Мурач, М.М., & Яковець, В.П. (2003). *Геометричні перетворення площини: навчальний посібник*. Університетська книга.
4. Готман, Э.Г., & Скопец, З.А. (1988). *Задача одна – решения разные*. Радянська школа.
5. Істер, О.С. (2022). *Геометрія: підруч. для 9 кл. закладів загальної середньої освіти*. Генеза.
6. Колмогоров, А.М., Семенович, О.Ф., Нагібін, Ф.Ф., & Черкасов, Р.С. (1972). *Геометрія 6 клас*. Радянська школа.
7. Кушнір, І.А. (1994). *Методи розв'язування задач з геометрії*. Абрис.
8. Мерзляк, А.Г., Полонський, В.Б., & Якір, М.С. (2017). *Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів*. Гімназія.
9. Погорєлов, О.В. (1993). *Геометрія: підруч. для 7-11кл. серед. школи*. Освіта.
10. Працьовитий, М.В. (2007). *Геометричні перетворення. Теоретико-груповий погляд на геометрію*. НПУ імені М.П. Драгоманова.
11. Працьовитий, М.В. (2007). *Геометричні перетворення. Рухи площини*. НПУ імені М.П. Драгоманова.
12. Працьовитий, М.В. (2013). *Перетворення подібності площини з елементами теорії фракталів*. НПУ імені М.П. Драгоманова.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bevz, G.P. (1977). *Methods of teaching mathematics*. Vyshcha shkola (in Ukrainian).
2. Bevz, G.P., Konforovich, A.G., Reznichenko, Z.O., & Chenakal, E.O. (1982). *Mathematics: A manual for optional classes in the 7th grade*. Radianska shkola (in Ukrainian).
3. Borovik, V.N., Zaichenko, I.V., Murach, M.M., & Yakovets, V.P. (2003). *Geometric transformations of the plane: a textbook*. University book (in Ukrainian).

4. Gottman, E.G., & Skopets, Z.A. (1988). *One problem - different solutions*. Radianska shkola (in Ukrainian).
5. Easter, O.S. (2022). *Geometry: a textbook for 9th grade of general secondary education*. Genesis (in Ukrainian).
6. Kolmogorov, A.M., Semenovich, O.F., Nagibin, F.F., & Cherkasov, R.S. (1972). *Geometry 6th grade*. Radianska shkola.
7. Kushnir, I.A. (1994). Methods of solving problems in geometry. Abris (in Ukrainian).
8. Merzlyak, A.G., Polonsky, V.B., & Yakir, M.S. (2017). *Geometry for general educational institutions with in-depth study of mathematics: a textbook for 9th grade of general educational institutions*. Gymnasium (in Ukrainian).
9. Pogorelov, O.V. (1993). *Geometry: a textbook for 7-11 grades of secondary school*. Osvita (in Ukrainian).
10. Pratsovyty, M.V. (2007). *Geometric transformations. Theoretical and group view of geometry*. Drahomanov National Pedagogical University (in Ukrainian).
11. Pratsovytyi, M.V. (2007). *Geometric transformations. Isometric transformations of the plane*. Drahomanov National Pedagogical University (in Ukrainian).
12. Pratsovytyi, M.V. (2013). *Transformations of plane similarity with elements of fractal theory*. Drahomanov National Pedagogical University (in Ukrainian).

| *Матеріал надійшов до редакції: 20.01.2025 р.* | *Прийнято до друку: 27.02.2025 р.* | *Опубліковано: 29.04.2025 р.* |