

ОСОБЛИВОСТІ ОЗНАЙОМЛЕННЯ ЗДОБУВАЧІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ З УЗАГАЛЬНЕНОЮ КАНТОРОВОЮ МНОЖИНОЮ З ВИКОРИСТАННЯМ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ

Катерина МАЛИШЕНКО ✉

Херсонський державний університет, Україна
ekatjamalish@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0008-0050-6366>

FEATURES OF INTRODUCING GENERAL SECONDARY EDUCATION STUDENTS TO THE GENERALIZED CANTOR SET USING NUMERATION SYSTEMS

Kateryna MALYSHENKO ✉

Kherson State University, Ukraine
ekatjamalish@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0008-0050-6366>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Сьогодні Україна знаходиться на етапі активної реформи базової середньої освіти. Тому математичну підготовку необхідно реалізувати таким чином, щоб після закінчення закладів загальної середньої освіти учні не лише вміли виконувати базові математичні обчислення, а і набули навичок розв'язувати завдання з комбінованих тем; бачили різні способи застосування вивченої теми. Важливу роль в досягненні наведених цілей відіграє зацікавленість та особиста мотивація здобувачів освіти до вивчення математики. Отже, бажано будувати навчання таким чином, щоб учні не просто вивчали наведений матеріал, а самі ставали активними дослідниками.

Матеріали і методи. Використано систему теоретичних та емпіричних методів, зокрема аналіз наукової літератури з окресленої проблеми, спостереження за процесом вивчення курсу математики в закладах повної загальної середньої освіти з метою виявлення можливостей інтеграції до нього теми «Канторова множина та системи числення».

Результати дослідження показали, що можливо побудувати для системи числення з основою $2n+1$, де n – натуральне число, канторову досконалу множину. Зокрема розглянуто п'ятіркову та семіркову системи числення, що дозволяє виконати подальше узагальнення. В результаті отримано множини, досконалість яких було доведено. Побудовано функції Кантора для п'ятіркової та семіркової систем числення, з'ясовано закономірності, опираючись на які, узагальнено функцію Кантора для всіх систем числення з основою $2n+1$.

Висновки. Встановлено, що для довільного натурального числа n можлива побудова канторової досконалої множини з основою $2n+1$, для якої також побудована функція Кантора. Дослідження свідчить про актуальність формування дослідницьких компетентностей учнів загальноосвітніх навчальних закладів, зокрема через розв'язування інтегрованої задачі з теми "Кантова множина та системи числення".

КЛЮЧОВІ СЛОВА: Канторова досконала множина; функція Кантора; системи числення; розвиток дослідницьких умінь; STEM-освіта.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Малишенко К. Особливості ознайомлення здобувачів загальної середньої освіти з узагальненою Канторовою множиною з використанням систем числення. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 23-29. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-03>.

ABSTRACT

Formulation of the Problem. Ukraine is currently undergoing an active reform of basic secondary education. In our opinion, mathematical education should be structured in such a way that, upon completing general secondary education, students not only acquire the ability to perform basic mathematical computations but also develop skills in solving problems involving integrated topics, identifying various applications of studied concepts, forecasting and analyzing different mathematical models, formulating hypotheses, and proving or refuting them. Achieving these goals significantly depends on students' interest and intrinsic motivation to study mathematics. We propose organizing the learning process to ensure that students study the provided material and actively engage as researchers.

Materials and Methods. A combination of theoretical and empirical methods was employed, including analyzing scientific literature on the identified issue and observing the mathematics curriculum in general secondary schools to explore possibilities for integrating the topic "Cantor Set and Numeral Systems".

Results. The study demonstrated that it is possible to construct Cantor perfect sets for numeral systems with a base of $2n+1$, where n is a natural number. Specifically, the quinary (base-5) and septenary (base-7) numeral systems were considered, enabling further generalizations. As a result, perfect sets were obtained, and their perfection was proven. Cantor functions for the quinary and septenary numeral systems were constructed, and patterns were identified, leading to the generalization of the Cantor function for all numeral systems with a base of $2n+1$.

Conclusion. It was determined that for any natural number n , it is possible to construct a Cantor perfect set with a base of $2n+1$, for which a Cantor function can also be developed. The analysis of regulatory documents, mathematical, instructional, and psychopedagogical literature highlights the relevance of fostering research competencies among secondary school students in Ukraine's current educational development phase. In our study, this is achieved through solving an integrated problem on the topic "Cantor Set and Numeral Systems".

KEYWORDS: Cantor perfect set; Cantor function; numeral systems; development of research skills; STEM-education.

FOR CITATION: Malyshenko, K. (2025). Features of introducing general secondary education students to the generalized Cantor set using numeration systems. *Physical and Mathematical Education*, 40(2), 23-29. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-03>.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сьогодні Україна знаходиться на етапі активної реформи базової середньої освіти. Нова українська школа – це дієва формула, яка робить навчання комфортним та практичним, а головне – навчає критично мислити, досліджувати та пропонувати власні ідеї. Тобто тепер пріоритетне місце займають компетентності, завдяки яким людина зможе існувати в суспільстві, навчатися в продовж життя та займатися професійною діяльністю.

Згідно «Концептуальних засад реформування середньої школи» (Гриневич та ін., 2016) математична компетентність займає одне з ключових місць в освіті сучасних школярів. Це вимагає, щоб учні були компетентними не лише в розв'язуванні завдань з підручника, а й могли вільно застосовувати здобуті знання та навички у повсякденному житті. Проте варто пам'ятати, що маючи особисту мотивацію, учні значно швидше досягають поставлених цілей. Саме тому доцільно, щоб учні виступали не в ролі пасивного слухача, а активного діяча, який самостійно здобуває необхідні знання з підтримкою вчителя. Отже, варто розвивати в учнів дослідницькі уміння.

Реалізація даної ідеї може відбуватися таким чином: учні мають наскрізну задачу, поступові кроки до вирішення якої вони виконуватимуть впродовж всього свого навчання. Таким чином буде існувати мета до вивчення певної теми, а набуті знання одразу ж застосовуватимуться для опрацювання проблемного завдання. Разом з тим створюються сприятливі обставини для впровадження проектно-зорієнтованої технології навчання, яка надасть додаткову мотивацію до навчання; навчить критично осмислювати інформацію та використовувати набуті знання на практиці.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Активною прихильницею розвитку математичної компетентності є Н. А. Тарасенкова. Наприклад, у своїй роботі (Тарасенкова, 2016) вона пропонує розв'язувати учням К-задачі (компетентнісні задачі) та КО-задачі (компетентнісно-орієнтовані задачі). Авторка стверджує, що такий підхід сформує в учнів практичну математичну компетентність. О. В. Онопрієнко (2023) у роботі стверджує, що розвиток математичної компетентності наразі є актуальним і має формуватися поетапно. О. В. Школьній, автор модельної програми з математики для 5-6 класів та 7-9 класів, у роботі (Школьній, 2024) підтримує ідею формування вміння учнів проводити логічні міркування та розвитку їх абстрактного мислення. Ця ж ідея прослідковується і в підручниках з математики для 5 та 6 класу Джона Ендрю Біоса (2022; 2023). Окрім викладення матеріалу передбаченого програмою, автор додає додатковий матеріал задля підвищення навчальної зацікавленості. Учні мають досліджувати теми, які суміжні із тими, що вивчаються. У роботі (Casola & Taylor, 2019) було піднято питання про поточний стан математичної освіти та способи його покращення.

Разом з тим ідея розвитку дослідницьких умінь та математичної компетентності є не лише провідною ідеєю математиків та педагогів, вона закріплена у нормативно-правових документах нашої держави. Як зазначається у Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти): «Упровадження природничо-математичної освіти (STEM-освіти) вимагає від педагогічних та науково-педагогічних працівників активного використання новітніх педагогічних підходів до викладання та оцінювання, інновацій у сфері освіти, практики міжпредметного навчання, методів та засобів навчання, що сприяють розвитку дослідницьких та винахідницьких компетентностей здобувачів освіти.» До того ж положення Нової української школи не забороняють навчальні експерименти, а навпаки підтримують їх: «Щоб навчати по-новому, вчитель повинен отримати свободу дій – обирати навчальні матеріали, імпровізувати та експериментувати. Цю свободу дає новий закон «Про освіту».» (Гриневич та ін., 2016).

М. І. Жалдак та Г. О. Михалін (2011) у роботі звертають увагу на те, що в шкільному курсі змістова лінія «Елементи теорії множин» охолоплює лише деякі поверхневі факти і вивчається недостатньо. Хоча в університетському курсі ця ж змістова лінія є дуже важливою для багатьох курсів. Тому автори пропонують починати її вивчення вже в середніх класах школи, при цьому доповнюючи великою кількістю зрозумілих для учнів прикладів. А також варто багатократно повертатися до цієї теми щоразу на більш підвищеному рівні.

Метою статті є обґрунтування способу формування дослідницьких умінь та математичної компетентності учнів шляхом розв'язання наскрізної задачі «Канторова множина та системи числення». При цьому одночасно удосконалюючи вивчення наскрізної лінії «Елементи теорії множин» через дослідження множин подібних до традиційної канторової досконалої множини та функції Кантора з подальшим обґрунтуванням та розробкою плану інтеграції цієї теми до шкільного курсу математики.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У дослідженні використана система теоретичних та емпіричних методів. Зокрема,

теоретичних: аналіз нормативно-правових документів, математичної, психолого-педагогічної, методичної літератури з окресленої проблеми, підручників та навчальних посібників з математики, алгебри та геометрії для з'ясування сутності процесу формування дослідницької компетенції здобувачів освіти під час вивчення шкільного курсу математики; з'ясування можливості застосування наскрізної задачі «Канторова множина та системи числення»;

емпіричних: спостереження за процесом навчання математики в закладах повної загальної середньої освіти з метою виявлення можливостей інтеграції теми «Канторова множина та системи числення» до шкільного курсу математики на поглибленому рівні.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Наскрізною задачею, яку доречно впровадити в шкільний курс математики, можуть стати системи числення на досконалій множині. Безперечно, дана тема виносить на опрацювання лише в курсі вищої математики. Однак при правильному плануванні етапів опрацювання, яке враховуватиме глибину знань та готовність до сприйняття інформації на конкретному етапі навчання, стає можливим її впровадження в шкільний курс.

Якщо проаналізувати математичне підґрунтя необхідне для вивчення систем числення на досконалій множині, то виявимо такі теми: поняття відрізу та його поділу; дії над звичайними дробами; елементи комбінаторики; поняття множини та дії над нею; геометрична прогресія та сума нескінченно спадної геометричної прогресії; обернена функція;

границя та її застосування; елементи методології математики. Оскільки, ці теми вивчаються в шкільному курсі математики, то для здобувачів освіти закладів загальної середньої освіти, які вивчають математику на поглибленому рівні, опрацювання запропонованої наскрізної задачі є цілком можливим завданням.

Аналізуючи традиційну канторову множину розглянемо можливість побудови подібної множини при поділі відрізка на 5, 7, 9, 11, 13 і т.д. частин. Таким чином отримуємо узагальнену канторову множину.

Розглянемо одиничний відрізок $F_0 = [0;1]$. Розділимо його на $2n+1$ рівних частин, n – деяке натуральне фіксоване число. Доведимо, що нумерація відрізків починатиметься з цифри 0, тобто відрізок з порядковим номером m відповідає числу $m-1$, $m = \overline{1, 2n+1}$.

Тепер видалимо всі інтервали, яким відповідає непарне число $2m-1$, $m = \overline{1, n}$. Залишені відрізки об'єднаємо і матимемо:

$$F_1 = [0; \frac{1}{2n+1}] \cup [\frac{2}{2n+1}; \frac{3}{2n+1}] \cup \dots \cup [\frac{2n}{2n+1}; 1].$$

Аналогічно кожен з відрізків множини F_1 знову поділимо на $2n+1$ рівних відрізків та видалимо інтервали, яким відповідає непарне число $2m-1$, $m = \overline{1, n}$. Зауважимо, що першому відрізку відповідає число 0. Перетин цих відрізків назвемо F_2 . Продовжимо цей крок до нескінченності та визначимо: $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k$.

Можна довести, що множина, яка утворилася є досконалою множиною Кантора. Кожне з чисел із відрізка $[0, 1]$ можна записати у відповідній системі числення з основою $2n+1$ у вигляді:

$$x = \frac{a_1}{(2n+1)} + \frac{a_2}{(2n+1)^2} + \dots + \frac{a_k}{(2n+1)^k} + \dots, \text{ де числа } a_k \text{ можуть набувати значення } \overline{0, 2n}.$$

Можна довести, що кожній точці $x \in F$ відповідає послідовність чисел: $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$, де a_k можуть набувати тільки парних значень $2m$, $m = \overline{0, n}$.

Знайдемо сумарну довжину інтервалів, що вилучаємо. На множині F_1 вилучили: $n \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$. На F_2 : $\frac{n}{2n+1} + (n+1) \cdot \frac{n}{(2n+1)^2}$. На F_3 : $\frac{n}{2n+1} + (n+1) \cdot \frac{n}{(2n+1)^2} + (n+1)^2 \cdot \frac{n}{(2n+1)^3}$.

$$\text{На } F_k: \frac{n}{2n+1} + (n+1) \cdot \frac{n}{(2n+1)^2} + (n+1)^2 \cdot \frac{n}{(2n+1)^3} + \dots + (n+1)^{k-1} \cdot \frac{n}{(2n+1)^k};$$

$$\text{При } n \rightarrow \infty \text{ довжина } F_k \rightarrow \frac{\frac{n}{2n+1}}{1 - \frac{n+1}{2n+1}} = \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{n} = 1.$$

Отже, сумарна довжина вилучених інтервалів дорівнює 1, а тому міра множини F дорівнює 0.

Для наочності наведемо приклад побудови такої множини в п'ятірковій системі числення (рис. 1).

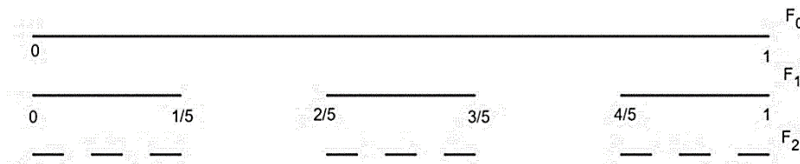


Рис. 1. П'ятіркова Канторова множина

Джерело: авторська розробка.

Нагадаємо, що за означенням множину називають досконалою, якщо вона замкнена і не має ізольованих точок (Жалдак та ін., 2007). Очевидно, що одержана множина $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k$ є перетином відрізків. Відрізок $[0, 1]$ є замкненою множиною на прямій з природною топологією.

Нагадаємо, що точка $x \in A$ називається ізольованою, якщо існує околі точки x , в якому немає точок множини A , окрім самої точки x (Борисенко, 1995). Оскільки довжини відрізків, з яких складаються множини F_k прямують до нуля при $k \rightarrow \infty$, то для кожної точки $x \in F$ принаймні кінцеві точки деяких відрізків з множин виду F_k збігаються до x , а тому містяться в її околі.

Отже, побудована множина F володіє всіма властивостями досконалої множини.

Оскільки канторову досконалу множину можна побудувати для будь-якої $2n+1$ системи числення при фіксованому натуральному n , то для кожної з них визначимо функцію Кантора. Отже, якщо $x \in F$, x можна представити у такому вигляді:

$$x = \frac{a_1}{(2n+1)} + \frac{a_2}{(2n+1)^2} + \dots + \frac{a_k}{(2n+1)^k} + \dots, \text{ де числа } a_k \text{ можуть набувати значень виду } \overline{2m}, m = \overline{0, n}.$$

Визначимо $F(x) = \frac{a_1}{(n+1)} + \frac{a_2}{(n+1)^2} + \dots + \frac{a_k}{(n+1)^k} + \dots$, тобто фактично ми знайшли число, якому відповідає послідовність $\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \dots; \frac{a_k}{2}, \dots$ в системі числення з основою $n+1$.

Якщо $x \notin F$, то x належить деякому з вилучених на k -ому етапі інтервалів. Можна довести, що значення функції Кантора у кінцевих точках визначеного інтервалу співпадають, а тому значення функції Кантора в будь-якій точці цього інтервалу будемо вважати рівним значенню в будь-якій його кінцевій точці.

Проілюструємо цей алгоритм побудови на п'ятірковій системі числення. Обчислюємо значення функції на $(\frac{1}{5}; \frac{2}{5})$. Обираємо точку $\frac{2}{5} = (2, 0, 0, \dots)_5$. Поділимо координати навпіл та отримаємо трійковий запис: $(1, 0, 0, \dots)_3$. Обчислюємо значення функції в цій точці: $\frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \dots = \frac{1}{3}$.

Переконаємося, що і на іншому кінці інтервалу $\frac{1}{5} = (0, 4, \dots)_5$ функція Кантора приймає таке ж значення. Поділимо координати навпіл та отримаємо трійковий запис: $(0, 2, 2, \dots)_3$. Обчислюємо значення функції в цій точці: $\frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$. Отже, кожній точці інтервалу $(\frac{1}{5}; \frac{2}{5})$ відповідає значення функції $K(x) = \frac{1}{3}$.

Аналогічно обчислюємо значення функції Кантора на $(\frac{3}{5}; \frac{4}{5})$. Обираємо точку $\frac{4}{5} = (4, 0, 0, \dots)_5$. Поділимо координати навпіл та отримаємо трійковий запис: $(2, 0, 0, \dots)_3$. Обчислюємо значення: $\frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \dots = \frac{2}{3}$. Обчислимо значення функції в точці $\frac{3}{5} = (2, 4, 4, \dots)_5$. Поділимо координати навпіл та отримаємо трійковий запис: $(1, 2, 2, \dots)_3$. Обчислюємо значення функції в цій точці: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Отже, кожній точці інтервалу $(\frac{3}{5}; \frac{4}{5})$ відповідає значення функції $K(x) = \frac{2}{3}$.

За такою ж схемою обчислюємо значення функції на $(\frac{1}{25}; \frac{2}{25})$. Легко переконатися, що кожній точці інтервалу $(\frac{1}{25}; \frac{2}{25})$ відповідає значення функції $K(x) = \frac{1}{9}$.

Отже, виконуємо аналогічні дії для кожного вилученого інтервалу. Отримаємо такі значення (рис. 2):

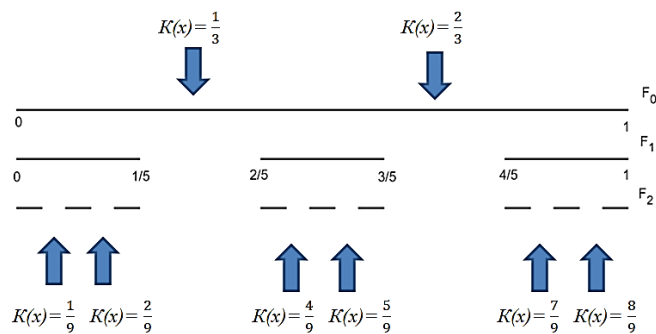


Рис. 2. Деякі значення функцій Кантора

Джерело: авторська розробка.

Функція Кантора для п'ятіркової системи числення матиме вигляд як на рис. 3.

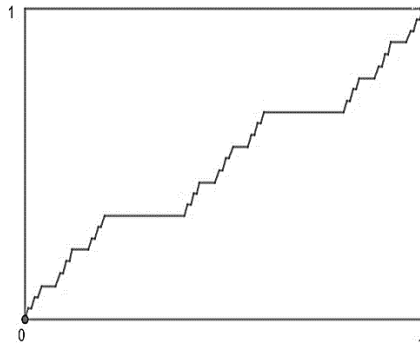


Рис. 3. Функція Кантора в п'ятірковій системі числення

Джерело: авторська розробка.

Описане дослідження можна реалізувати і в шкільному курсі математики. Опираючись на ідеї математиків-методистів, нормативно-правові документи та розуміючи важливість розвитку дослідницьких умінь учнів, пропонуємо наскрізну задачу на тему «Системи числення на досконалій множині», яку школярі виконуватимуть протягом свого навчання у 5-11 класах. Хоча ця тема опрацьовується в курсі вищої математики, проте, на наш погляд, якщо до цього питання підходити поступово, то задача є цілком посилююю для учнів шкільного віку.

Реалізувати вивчення канторових досконалих множин пропонуємо за такою схемою:

1. Ознайомлення із системами числення (5 клас)

В курсі 5 класу учні ознайомлюються із десятковою системою числення. Проте в учнів не формується уявлення про системи числення, адже десяткова система для школярів – це звичайний запис чисел, до якого вони звикли. На нашу думку, необхідно показати, що існують інші системи також. Аналізуючи підручник з математики для 5 класу Джона Ендрю Біуса (2022), який розроблено відповідно до модельної програми «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Василюшин М.С., Милянник А.І., Працьовитий М.В., Простакова Ю.С., Школьнік О.В.), а також електронні додатки до нього, бачимо, що в якості інтегрованого модуля автор пропонує, розглянути інші системи числення, такі як римська та двійкова системи числення. Тому доцільно буде ознайомитися й з іншими системами та правилами кодування. Наприклад, для трійкової системи використовуємо цифри 0,1,2; для п'ятіркової 0, 1, 2, 3, 4 і т.д. Таким чином учні усвідомлюють, що існують й інші системи числення, такі як трійкова, п'ятіркова, семіркова і т.д. А також знають певні правила їх використання.

2. Ведення поняття відрізка та поділу відрізків (5 клас)

В розділі найпростіші геометричні фігури на площині вивчається відрізок та поділ відрізка. А це якраз безпосередньо стосується канторових досконалих множин. На цьому етапі можна дати учням відрізок певної довжини та запропонувати поділити на 3, 5, 7 і т.д. рівних частин.

3. Визначення значення кінців відрізків (5 клас)

Вивчення звичайних дробів дозволить учням встановлювати значення кінців відрізків. Наприклад, поділили відрізок на 5 частин, тому в знаменнику буде число 5. Тоді перша точка поділу $-\frac{1}{5}$, друга точка поділу $-\frac{2}{5}$, третя $-\frac{3}{5}$, четверта $-\frac{4}{5}$. Запропонувати учням визначити кінці відрізків при поділі одиничного відріка на 3, 5, 7 і т.д. рівних частин.

4. Ознайомлення із способами кодування (5 клас)

Під час вивчення теми «Логічні та комбінаторні задачі» варто розказати учням про структуру канторових множин. Тобто знайомимо їх з тим, що після поділу відрізка на $2n+1$ рівних частин, домовляємося, що нумерацію відрізків починаємо із числа 0. Потім відрізки з парними номерами залишаємо, а з непарними вилучаємо. Пояснюємо, що такий поділ ми можемо зробити ще декілька разів. Проте, на нашу думку, на множині F_4 варто зупинитися, адже на даному рівні знань поняття про нескінченність ще не є сформованим в учнів, тому продовження поділу може бути складним для сприйняття. Кодувати учням буде легше не точки, що належать відрізкам, а самі відрізки. Адже метою цього завдання є засвоєння способів кодування.

5. Формування поняття множини (5 клас)

Варто зазначити, що, наприклад, автори підручника з алгебри для 8 класу з поглибленим вивченням Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. (2021) з поняттям множини та операціями над нею ознайомлюють учнів у 8 класі. Проте автор підручника з математики для 5 класу Джон Ендрю Біос пропонує ознайомче вивчення множини на п'ятому році навчання. Хоча на цьому етапі розглядаються лише способи задання множини, переріз, об'єднання та різниця, проте це дозволяє ознайомити здобувачів освіти із тим фактом, що такий поділ відрізків продовжується ще багато разів. А залишенні інтервали об'єднуємо і отримуємо множину Кантора. На її досконалості наголошувати не варто, оскільки вивчення множин відбувається оглядово.

6. Визначення приналежності точки через порівняння дробів з різними знаменниками (6 клас)

Під час опрацювання теми, що пов'язана з діями над звичайними дробами з різними знаменниками, учні вже можуть порівнювати дроби, тому вони вже зможуть визначити, чи належить точка відрізкам канторової множини, чи тим, що відкидаються. Наприклад, маємо п'ятіркову систему і точку $x = \frac{3}{8}$. Тепер порівнюємо точку із кінцями відрізків канторової множини. $НСК(5; 8)=40$ $x = \frac{3}{8} = \frac{15}{40}$; $\frac{1}{5} = \frac{8}{40}$; $\frac{2}{5} = \frac{16}{40}$ $\rightarrow \frac{8}{40} < \frac{15}{40} < \frac{16}{40}$ Таким чином $\frac{1}{5} < \frac{3}{8} < \frac{2}{5}$. Отже, точка належить інтервалу, що відкидаємо.

7. Обрахування довжини відрізків, що належать канторовій множині та які вилучаються на початкових множинах (6 клас)

Здобувачі освіти вже можуть виконувати арифметичні дії над звичайними дробами, тому завдання порахувати суму залишених та суму відкинутих відрізків на початкових множинах не має бути складним. Наприклад, для п'ятіркової системи множина F_1 має довжину: $3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$; множина F_2 має довжину: $9 \cdot \frac{1}{25} = \frac{9}{25}$. Відкинуті відрізки на F_1 мають довжину: $2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$; На множині F_2 : $\frac{2}{5} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{25} = \frac{2}{5} + \frac{6}{25} = \frac{16}{25}$. Тут вчитель сам обирає в залежності від можливостей учнів та наявності часу, до якої множини виконуватимуть розрахунки.

8. Узагальнення знань про побудову канторової множини (7 клас)

На цьому етапі варто узагальнити набуті знання про канторову множину. Адже курс вивчення математики в 7 класі розпочинається із повторення курсу 5-6 класу. Тому, якщо в попередніх класах учні побудову канторових множин робили покроково в силу вивчення нових тем, то тепер вони можуть це зробити узагальнено. Спочатку будуємо відрізок, ділимо його на необхідну кількість, визначаємо значення кінців відрізків; показуємо, які інтервали відкидаємо, а які залишаємо; визначаємо приналежність точки до певного відрізка, вводимо елементи кодування відрізків, продовжуємо процес побудови та робимо висновок про одержання канторової множини. На наш погляд, це доречне завдання для повторення вивченого за 5-6 клас.

9. Ознайомлення із скінченними та нескінченними множинами. Потужність континуум (8 клас)

Тепер варто ознайомити здобувачів із поняттям множини більш детально. В класах із поглибленим вивченням у 8 класі розглядається поняття скінченних та нескінчених множин. Необхідно наголосити, що на прямій множини можуть бути зліченими, а також мати потужність континуум. Також можна показати й деякі інші властивості множин, але варто оцінити глибину знань учнів та їх готовність до сприймання цього матеріалу. Таким чином вже сформується поняття структури та систем числення на досконалій множині. В якості проекту здобувачі освіти можуть підготувати додаткову інформацію про Георга Кантора.

10. Знаходження точок канторової множини з допомогою геометричної прогресії (9 клас)

В курсі 9 класу вивчаються числові послідовності, зокрема геометрична прогресія. Варто нагадати учням про принципи кодування точки, які належать канторовій множині, а також навчити визначати значення цієї точки з допомогою геометричної прогресії. Наприклад, $x = (0, 2, 4, 0, 2, 4, \dots)_5$. Звертаємо увагу учнів на те, що якщо додамо кожен 3 члена геометричної прогресії, то утвориться геометрична прогресія, де $b_1 = \frac{14}{5^3}$; $q = \frac{1}{5^3}$. $X = \frac{0}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \frac{0}{5^4} + \frac{2}{5^5} + \frac{4}{5^6} + \dots = \frac{14}{5^3} + \frac{14}{5^6} + \frac{14}{5^9} + \dots$. Шукаємо суму спадної геометричної прогресії. $x = \frac{\frac{14}{5^3}}{1 - \frac{1}{5^3}} = \frac{14}{125} \cdot \frac{125}{124} = \frac{7}{62}$.

11. Ознайомлення з функцією Кантора (10 клас)

Під час вивчення теми «Функція» у 10 класі доцільно ознайомити учнів із драбиною Кантора: показати алгоритм побудови, структуру, обчислення значення функції та приблизний графік функції. В якості проектною роботи здобувачі освіти можуть підготувати цікаві факти стосовно цієї теми.

12. Обчислення загальної довжини відрізків Канторової множини та відкинутих відрізків (10 клас)

Якщо в попередніх класах обраховувалася загальна довжина залишених та відкинутих відрізків лише на початкових множинах, то в 10 класі, коли учні вже розуміють поняття границі, можна запропонувати завдання обрахувати загальну довжину залишених та відкинутих відрізків на множині F_n , адже тут передбачається перехід до границі. В результаті буде отримано шокуючий для здобувачів освіти результат: загальна довжина залишених відрізків рівна 0, а вилучених інтервалів дорівнює 1, тобто довжині початкового відрізка. На нашу думку таке неймовірне відкриття ще більше зацікавить до вивчення математики та підштовхне до наукової діяльності.

13. Узагальнення знань (11 клас)

Методологія математики є важливою наскрізною лінією для вивчення. Адже учні вчаться висувувати гіпотези, доводити або спростовувати їх. На нашу думку, в 11 класі здобувачі освіти вже мають достатню глибину знань та математичний апарат для виконання узагальнення. Тому варто звернути увагу учнів на подібності побудованих раніше трійкової, п'ятіркової, семіркової канторових множин та функцій Кантора на них. Потім запропонувати розглянути канторову множину і функцію Кантора на загальний випадок, тобто на $2n+1$ системи числення. Таким чином завершується опрацювання даної теми в шкільному курсі. Проте сама тема цим не вичерпується, адже здобувачі можуть продовжити її опрацювання в курсі вищої математики. Тим самим залишається мотивація до подальшого вивчення математики.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Отже, на даному етапі розвитку освіти в Україні актуальним є формування дослідницької компетенції здобувачів освіти середньої школи, зокрема, в нашому дослідженні, через розв'язання наскрізної задачі з теми «Канторова множина та системи числення». Адже, розвиток математичної грамотності є дуже важливою компетентністю, завдяки якій людина зможе існувати в суспільстві, навчатися в продовж життя та займатися професійною діяльністю, саме цього і вимагають основні положення Нової української школи.

Одночасно з цим впровадження даної теми в шкільний курс математики допоможе поглибити вивчення наскрізної лінії «Елементи теорії множин». Саме для цього ми побудували канторові множини на $2n+1$ системах числення, а також функції Кантора на них. І при вдалому плануванні вивчення даної теми учні шкільного віку зможуть її ефективно засвоїти. На нашу думку, школярі матимуть додаткову мотивацію до вивчення, а також практичне застосування навчального матеріалу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Біос, Дж. Е. (2022). *Математика: підручник для 5 класу закладів загальної середньої освіти*. Київ: «Формула».
2. Біос, Дж. Е. (2023). *Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти*. Київ: «Формула».
3. Борисенко, О. А. (1995). *Диференціальна геометрія і топологія*. Основа.
4. Гриневич, Л. М., Елькін, О., Калашнікова, С., Коберник, І., Ковтунець, В., Макаренко, О., ... & Шиян, Р. (2016). *Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи*.
5. Жалдак, М. І., & Михалін, Г. О. (2011). Елементарні факти теорії множин у шкільному курсі математики. *Математика в школі*, 3, 12-23.
6. Жалдак, М. І., Михалін, Г. О., & Деканов, С. Я. (2007). *Математичний аналіз. Функції багатьох змінних*. НПУ імені М. П. Драгоманова.
7. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2021). *Алгебра 8. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики*. Харків: «Гімназія».
8. Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти (авт. Васишин М. С., Милияник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Шкільний О. В.). URL: https://drive.google.com/file/d/1YMPwWKLNdHTQ6wi4_5aUH0sPafkCBqX/view
9. Модельна навчальна програма «Математика. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (авт. Васишин М. С., Милияник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Шкільний О. В.). URL: <https://drive.google.com/file/d/1hxfR8CXPRbsZ16yos4CykfiJ-K5U-cKu/view>
10. Онопрієнко, О. В. (2023). Компетентнісний потенціал навчальної діяльності на уроках математики у НУШ. In *Початкова освіта в парадигмі Нової української школи: виклики часу: збірник матеріалів Всеукраїнської науково-практичної конференції* (27 квітня 2023 року, м. Глухів) (с. 104-107). Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка.
11. Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти, Постанова Кабінету Міністрів України № 898 (2022). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-n#Text>.
12. Про схвалення Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти), Розпорядження Кабінету Міністрів України № 960-р (2020). <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-p#Text>.
13. Тарасенкова, Н. А. (2016). Компетентнісні засади забезпечення наступності навчання математики в різних ланках освіти. *Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи: матеріали всеукраїнської науково-практичної конференції* (15-16 вересня 2016 р., м. Одеса) (с. 108-111). Одеса: Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського.
14. Шкільний, О. (2024). Методичні особливості вивчення логічних основ математики в інтегрованому курсі «Математика» для учнів 7 класу НУШ. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 20-28.
15. Casola, L., & Taylor, T. E. (Ред.). (2019). *Increasing Student Success in Developmental Mathematics*. National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/25547>.
16. Hayes, E. (2011). Science teachers take to the stage. *Science in school*, 19, 6-9.
17. Learning and Understanding: Improving Advanced Study of Mathematics and Science in U.S. High Schools. (2002). National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/10129>.
18. Rizayeva, L. (2022). Formation of research skills of students through solving problems in teaching mathematics in primary classes. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 17(8), 2567-2579.
19. Tandee, K., McLoughlin, E., & Paul, G. (2022). Mathematics and science across the transition from primary to secondary school: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, 9.
20. Tifi, A., Natale, N., & Lombardi, A. (2006). Scientists at play: teaching science process skills. *Science in school*, 1, 37-40.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bios, Dzh. E. (2022). Mathematics: Textbook for 5th grade general secondary education institutions. Kyiv: "Formula". (in Ukrainian)
2. Bios, Dzh. E. (2023). Mathematics: Textbook for 6th grade general secondary education institutions. Kyiv: "Formula".
3. Borysenko, O. A. (1995). *Differential geometry and topology*. Osnova. (in Ukrainian)
4. Hrynevych, L. M., Elkin, O., Kalashnikova, S., Kobernyk, I., Kovtunets, V., Makarenko, O., ... & Shyyan, R. (2016). *The New Ukrainian School: Conceptual foundations of secondary school reform*. (in Ukrainian)
5. Zhaldak, M. I., & Mykhalin, H. O. (2011). *Elementary facts of set theory in the school mathematics course*. Mathematics in School, (3), 12-23. (in Ukrainian)
6. Zhaldak, M. I., Mykhalin, H. O., & Dekanov, S. Ya. (2007). *Mathematical analysis. Functions of several variables*. NPU named after M. P. Dragomanov. (in Ukrainian)
7. Merzlyak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2021). *Algebra 8. Textbook for classes with an in-depth study of mathematics*. Kharkiv: Gymnaziia. (in Ukrainian)
8. Model Curriculum "Mathematics. Grades 5-6" for institutions of general secondary education (authors: Vasylyshyn M. S., Mylyanyk A. I., Pratsovytyi M. V., Prostakova Y. S., Shkolnyi O. V.). Retrieved from https://drive.google.com/file/d/1YMPwWKLNdHTQ6wj4_5aUH0sPafkCBqX/view. (in Ukrainian)
9. Model Curriculum "Mathematics. Grades 7-9" for institutions of general secondary education (authors: Vasylyshyn M. S., Mylyanyk A. I., Pratsovytyi M. V., Prostakova Y. S., Shkolnyi O. V.). Retrieved from <https://drive.google.com/file/d/1hxfR8CXPBsZ16yos4Cykfij-K5U-cKu/view>. (in Ukrainian)
10. Onopriienko, O. V. (2023). *The competency potential of learning activities in mathematics lessons in the New Ukrainian School*. In *Primary education in the paradigm of the New Ukrainian School: Challenges of the time: Collection of materials of the All-Ukrainian scientific and practical conference (April 27, 2023, Hlukhiv)* (pp. 104-107). Hlukhiv National Pedagogical University named after Oleksandr Dovzhenko. (in Ukrainian)
11. On some issues of state standards for complete general secondary education, Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine No. 898 (2022). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-n#Text>. (in Ukrainian)
12. Approval of the Concept for the Development of Natural-Mathematical Education (STEM Education), Order of the Cabinet of Ministers of Ukraine No. 960-p (2020). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-p#Text>. (in Ukrainian)
13. Tarasenkova, N. A. (2016). *Competency-based principles of ensuring continuity in mathematics education at different levels of education*. In *Implementation of continuity in mathematical education: Realities and prospects: Materials of the All-Ukrainian scientific and practical conference (September 15-16, 2016, Odesa)* (pp. 108-111). Odesa: South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynskiy. (in Ukrainian)
14. Shkolnyi, O. (2024). *Methodological features of studying the logical foundations of mathematics in the integrated course "Mathematics" for 7th-grade students of the New Ukrainian School*. *Didactics of Mathematics: Theory, Experience, Innovations*, (2), 20-28. (in Ukrainian)
15. Casola, L., & Taylor, T. E. (Eds.). (2019). *Increasing Student Success in Developmental Mathematics*. National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/25547>
16. Hayes, E. (2011). Science teachers take to the stage. *Science in School*, (19), 6-9.
17. *Learning and Understanding: Improving Advanced Study of Mathematics and Science in U.S. High Schools*. (2002). National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/10129>
18. Rizayeva, L. (2022). Formation of research skills of students through solving problems in teaching mathematics in primary classes. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 17(8), 2567-2579.
19. Tandeep, K., McLoughlin, E., & Paul, G. (2022). Mathematics and science across the transition from primary to secondary school: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, (9).
20. Tifi, A., Natale, N., & Lombardi, A. (2006). Scientists at play: teaching science process skills. *Science in School*, (1), 37-40.

| Матеріал надійшов до редакції: 28.11.2024 р. | Прийнято до друку: 15.02.2025 р. | Опубліковано: 29.04.2025 р. |

