

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕНЗОРНОЇ АЛГЕБРИ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОМУ ЧИСЛЕННІ БАГАТОВИМІРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Юрій БОХОНОВ ✉

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна
yubochonoff@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3355-008X>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Відомо формули, за якими можна знайти похідну кожного елемента багатовимірного відображення. При цьому досить рідко на практиці використовують матрицю Якобі - першу його похідну, матрицю Гессе – другу похідну скалярної функції кількох змінних, тощо. В той самий час застосування матриць як технічного апарата при розв'язуванні подібних задач виявляється зручним і ефективним. На цьому шляху все ж виникають труднощі, наприклад, при матричному запису похідної від матриці. Виявляється, що для адекватного опису подібних конструкцій варто використовувати тензорні добутки матриць, де разом зі звичайними матрицями та векторами працюють з формальним вектором - лінійним оператором, елементами якого є оператори частинних похідних. При цьому формули для похідної довільного і диференціалу порядку від вектор-функції стають зрозумілими і прозорими.

Матеріали і методи. Для дослідження похідних високих порядків багатовимірних відображень широко використовується метод тензорних (кронекерівських) добутків матриць. При цьому похідна довільного порядку вектор-функції визначається як тензорний степінь формального диференціального оператора першого порядку – транспонованого вектора-градієнта. Дія таких тензорних виразів на вектор-функцію дає її похідну відповідного порядку. Це дає змогу описати мовою матриць конструкцію похідних, що на якісному рівні відрізняється від знаходження частинних похідних від кожної компоненти багатовимірного відображення.

Результати. За допомогою використання тензорних добутків матриць доведено і детально виписано формули для першої і другої похідних вектор-функцій, а також вказано, як знаходиться похідна довільного порядку. В класичних курсах математичного аналізу, як правило, виписуються матриця Якобі багатовимірного відображення і матриця Гессе (друга похідна) скалярнозначної функції багатовимірного аргументу. В пропонованій статті показано алгоритм знаходження довільної похідної як оператора, що діє в тензорному добутку лінійних просторів, що дає змогу краще усвідомити цю важливу конструкцію математичного аналізу.

Висновки. Широке застосування тензорних операцій, в яких діє також формальний вектор-оператор похідної першого порядку виявляється дуже ефективним. Більш того, на цьому шляху вдається показати структуру, з'ясувати, елементами яких лінійних просторів є похідні. На цьому шляху зразу вдається одержати усі похідні шуканого порядку, а не кожен частинну похідну окремо.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: похідна; диференціал; лінійний простір; лінійний оператор; вектор-функція; матриця; тензорний добуток.

Для цитування:	Bohonov Yu. Zastosuvannya tenzornoї algebri v diferentsialnomu chyslenni bahatovymirnykh vidobrazhen. <i>Fiziko-matematichna osvita</i> , 2024. Tom 39. № 3. С. 24-30. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i3-03
	Bohonov, Yu. (2024). Zastosuvannya tenzornoї algebri v diferentsialnomu chyslenni bahatovymirnykh vidobrazhen. <i>Fiziko-matematichna osvita</i> , 39(3), 24-30. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-03
For citation:	Bokhonov, Yu. (2024). Application of tensor algebra in the differential calculus of multidimensional mappings. <i>Physical and Mathematical Education</i> , 39(3), 24-30. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-03
	Bokhonov, Yu. (2024). Zastosuvannya tenzornoї algebri v dyferentsialnomu chyslenni bahatovymirnykh vidobrazhen [Application of tensor algebra in the differential calculus of multidimensional mappings]. <i>Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education</i> , 39(3), 24-30. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-03

APPLICATION OF TENSOR ALGEBRA IN THE DIFFERENTIAL CALCULUS OF MULTIDIMENSIONAL MAPPINGS

Yuriy BOKHONOV ✉

National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine

yubochonoff@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-3355-008X>

ABSTRACT

Formulation of the problem. There are known formulas that can be used to find the derivative of each element of a multidimensional mapping. At the same time, the Jacobi matrix - its first derivative, the Hessian matrix - the second derivative of a scalar function of several variables, etc., are rarely used in practice. At the same time, using matrices as a technical device for solving similar problems is convenient and practical. Difficulties still arise on this path, for example, when writing the derivative of a matrix as a matrix. For an adequate description of such constructions, it is worth using tensor products of matrices, where together with ordinary matrices and vectors work with a formal vector - a linear operator, the elements of which are partial derivative operators. At the same time, the formulas for the derivative of arbitrary and differential order from the vector function become clear and transparent.

Materials and methods. To study high-order derivatives of multidimensional mappings, the method of tensor (Kroneker) matrix products is widely used. At the same time, the derivative of an arbitrary order of the vector function is defined as the tensor degree of the formal differential operator of the first order - the transposed gradient vector. The action of such tensor expressions on a vector function gives its derivative of the appropriate order. This makes it possible to describe the construction of derivatives in the language of matrices, which is qualitatively different from finding partial derivatives of each component of a multidimensional mapping.

The results. Formulas for the first and second derivatives of vector functions are proved and written out in detail by using tensor products of matrices, and it is also indicated how the derivative of arbitrary order is found. In classical courses of mathematical analysis, as a rule, the Jacobian matrix of the multidimensional mapping and the Hessian matrix (second derivative) of the scalar-valued function of the multidimensional argument are written out. The proposed article shows the algorithm for finding an arbitrary derivative as an operator acting in the tensor product of linear spaces, which allows a better understanding of this important construction of mathematical analysis.

Conclusions. Wide application of tensor operations, in which the formal vector operator of the first-order derivative also works, turns out to be very effective. Moreover, in this way, it is possible to show the structure and find out which elements of linear spaces are the derivatives. In this way, it is possible to obtain all derivatives of the desired order at once instead of each partial derivative separately.

KEYWORDS: derivative; differential; linear space; linear operator; vector function; matrix; tensor product.

ВСТУП

Тензорний аналіз – добре розвинений математичний апарат, що широко використовується в різних розділах математики. З ним і його застосуваннями у алгебрі, аналізі на многовидах, диференціальній геометрії можна познайомитись у монографіях і статтях (Abraham et al., 1988; Aja-Fernandez et al., 2009; Bokhonov, 2022; Hardy, 2019; Itskov, 2009; Madill, 1998; Nguyen-Schäfer et al., 2014). З іншого боку, наскільки відомо автору, застосуванню його у диференціальному численні багатовимірних відображень не приділялось уваги. Автору (Bokhonov, 2021) вдалось мовою матричного числення викласти деякі відомі факти, широко використовуючи матрицю Якобі, тощо. Зараз при подібному аналізі пропонується методика тензорних добутків матриць як основний апарат.

Мета статті. Запропонувати знаходження похідних довільного порядку від скалярнозначних і векторнозначних функцій багатьох змінних у вигляді матриць, які можна одержати в результаті дії на функції тензорних степенів оператора Гамільтона.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретичними основами дослідження є апарат тензорних добутків лінійних просторів і матриць, що діють в цих просторах.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Нехай \mathbb{R}^n – n -вимірний простір векторів-стовпчиків, $(\mathbb{R}^n)^*$ – спряжений до нього, тобто n -вимірний простір векторів-рядків (ковекторів), тобто, лінійних функціоналів на \mathbb{R}^n . Далі будемо використовувати позначення: $M_{m,n}$ – простір матриць, що мають m рядків і n стовпчиків, $I_{n,n} \in M_{n,n}$ – одинична матриця. Зауважимо, що елементи матриць, як правило, не відділяють комами, але ми будемо це робити для більшої наочності, наприклад, для матриць розміру $1 \times n$. Простір лінійних операторів, що діють з лінійного простору U у лінійний простір V , традиційно позначається $L(U,V)$. Білінійне відображення з $U \times U$ у V позначається $L_2(U,U;V)$. Відомо також, що

$$L(U, L(U,V)) = L_2(U,U;V). \quad (1)$$

Позначатимемо через $\nabla^T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, а інколи для більшої визначеності ∇_x^T , ковектор, транспонований до вектора-градієнта (стовпчика). Він діє на диференційовну функцію як лінійний оператор першої похідної за законом:

$$\nabla^T : u(x) \rightarrow \nabla^T u(x) = u'(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) u(x) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right).$$

Інакше кажучи, $\nabla^T u(x)$ - матриця Якобі функції $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, обчислена у точці x . $\nabla^T u(x)$ часто називають оператором Гамільтона і позначають без знака транспонування, але ми вважаємо, маючи підстави, що $\nabla u(x)$ – вектор-стовпчик. Далі будемо вважати функції неперервно диференційовними стільки разів, скільки потрібно. Для двох векторів-стовпчиків $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m: x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_m)$ їхній тензорний добуток визначається наступним чином:

$$x \otimes y = (x_1 y_1, \dots, x_1 y_m, \dots, x_n y_1, \dots, x_n y_m) \in \mathbb{R}^{mn}.$$

Нехай $A \in M_{m,n}, B \in M_{p,q}$. Тензорним (кронекерівським) добутком $A \otimes B$ цих матриць називається блочна матриця повного розміру $mp \times nq$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Вона складається з mn блоків і кожен її (i, j) -й блок має вигляд: $a_{ij}B \in M_{p,q}$.

Важливий приклад, який далі буде використовуватись:

$$I \otimes A = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix}.$$

Будемо вважати, що для матриці розміру 1×1 , тобто, числа $t \in \mathbb{R}^1$ тензорний добуток $t \otimes A = tA$, інакше кажучи, є звичайним множенням даного числа на матрицю A . Тензорні добутки матриць мають різноманітні властивості і застосування. Більш детально можна познайомитись з ними у (Lancaster et al., 1985; Marcus, 1992).

Як відомо, для лінійних просторів U, V має місце ізоморфізм:

$$U^* \otimes V \simeq L(U, V).$$

II. Знаходження похідних від функцій

Для функцій $\mathbb{R}^n \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}^1$ за означенням

$$f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1) = (\mathbb{R}^n)^*, f'(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(x) = \nabla^T \otimes f(x) = \nabla^T f(x). \quad (2)$$

Друга похідна за подібним правилом є елементом наступного простору:

$$\mathbb{R}^n \ni x \rightarrow f''(x) = (f'(x))' \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)) = L(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n)^*).$$

Згідно з (1)

$$f''(x) \in L(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n)^*) = (\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^* = (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)^* = L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1).$$

Звідси

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\nabla^T \otimes \nabla^T) f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \otimes \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) \right) = \\ &= \left(\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \right), \dots, \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Зауваження. Використання внутрішніх дужок для деяких блоків матриці не є загальноживаним позначенням, але воно дає змогу зберегти інформацію про те, від яких блоків взято похідну, що робить конструкцію більш зрозумілою.

Розглядаючи $f''(x)$ як елемент $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1)$, зіставимо квадратичній формі

$$d^2 f(x) = f''(x)(dx) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n dx_i \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_j = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f(x)$$

матрицю (Гессе) і одержимо відомий вигляд другого диференціала функції:

$$d^2 f(x) = (dx)^T f''(x) dx = (dx_1 \dots dx_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix}.$$

Третю похідну визначимо як результат застосування оператора ∇^T до другої похідної, $f'''(x) \in (\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^*$:

$$f'''(x) = \nabla^T \otimes (f''(x)) = \nabla^T \otimes \nabla^T \otimes \nabla^T \otimes f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f''(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f''(x) \right) = \\ = \left(\left(\left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1^3}, \dots, \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1^2 \partial x_n} \right), \dots, \left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_n^3} \right) \right), \dots, \left(\left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_n \partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_n \partial x_1 \partial x_n} \right), \dots, \left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_n^2 \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_n^3} \right) \right) \right).$$

Третій диференціал має вигляд:

$$d^3 f(x) = f'''(x) dx \otimes dx \otimes dx = \left(\nabla^T \otimes \nabla^T \otimes \nabla^T f(x) \right) (dx \otimes dx \otimes dx).$$

Взагалі

$$f^{(p)}(x) \in \bigotimes_{j=1}^p (\mathbb{R}^n)^*, f^{(p)}(x) = \bigotimes_{j=1}^p \nabla^T f(x), d^p f(x) = f^{(p)}(x) \bigotimes_{j=1}^n dx \tag{4}$$

Диференціювання векторних функцій багатьох змінних

Розглянемо диференційовну вектор-функцію

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, u(x) = (u_1(x), \dots, u_p(x))^T.$$

Формули для її похідних можна одержати з відповідних формул для скалярнозначних функцій, якщо за допомогою ковектора $s = (s_1, \dots, s_p) \in (\mathbb{R}^p)^*$ утворити скалярнозначну функцію $f(x) = su(x) = s_1 u_1(x) + \dots + s_p u_p(x)$. З (2) маємо:

$$f'(x) = su'(x) = s \left(\nabla^T \otimes u(x) \right) = s_1 \left(\nabla^T \otimes u_1(x) \right) + \dots + s_p \left(\nabla^T \otimes u_p(x) \right) = \\ = s_1 \left(\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} \right) + \dots + s_p \left(\frac{\partial u_p(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_n} \right) = (s_1, \dots, s_p) \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Одержали відому матрицю Якобі відображення u і її інтерпретацію мовою тензорного добутку:

$$u'(x) = \nabla^T \otimes u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \dots \\ u_p(x) \end{pmatrix}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \dots \\ u_p(x) \end{pmatrix} \right).$$

Диференціюючи вектор-рядок $s \left(\nabla^T \otimes u(x) \right)$ за формулою (3):

$$f''(x) = \nabla^T \otimes (su'(x)) = \left(\frac{\partial (su'(x))}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial (su'(x))}{\partial x_n} \right),$$

прийдемо до другої похідної матриці Якобі, яку запишемо у вигляді тензорного добутку.

$$u''(x) = \nabla^T \otimes u'(x) = \nabla^T \otimes \nabla^T \otimes u(x) = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right).$$

Остаточно:

$$u''(x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \right) \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_n^2} \right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_n^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Як і для скалярнозначних функцій похідна і диференціал довільного порядку для вектор-функцій визначається за формулою (4). Треба тільки враховувати, що перша похідна багатовимірного відображення – це матриця.

Приклад 1. Друга похідна декартових змінних за полярними змінними. $\begin{pmatrix} x(\rho, \varphi) \\ y(\rho, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}$. Звідси

$$\frac{D^2(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Другу похідну знайдемо за формулою (4):

$$\begin{aligned} \frac{D^2(x, y)}{D(\rho, \varphi)^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \otimes \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x(\rho, \varphi)}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 x(\rho, \varphi)}{\partial \rho \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 y(\rho, \varphi)}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 y(\rho, \varphi)}{\partial \rho \partial \varphi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x(\rho, \varphi)}{\partial \varphi \partial \rho} & \frac{\partial^2 x(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} \\ \frac{\partial^2 y(\rho, \varphi)}{\partial \varphi \partial \rho} & \frac{\partial^2 y(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \otimes \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \right) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\rho \cos \varphi \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Приклад 2. Нехай

$$x \in \mathbb{R}^n, u^T(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x)) \in (\mathbb{R}^m)^*, v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \dots \\ v_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Знайти похідну від скалярної функції $u^T(x)v(x) = \sum_{j=1}^m u_j(x)v_j(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Маємо: } (u^T(x)v(x))' &= \left((u_1(x), \dots, u_m(x)) \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \dots \\ v_m(x) \end{pmatrix} \right)' = \left(\frac{\partial(u(x))}{\partial x_1} v(x), \dots, \frac{\partial(u(x))}{\partial x_n} v(x) \right) + \\ &+ \left((u_1(x), \dots, u_m(x)) \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \dots \\ v_m(x) \end{pmatrix}, \dots, (u_1(x), \dots, u_m(x)) \frac{\partial}{\partial x_n} \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \dots \\ v_m(x) \end{pmatrix} \right) = \\ &= \left(\nabla^T \otimes u^T(x) \right) \begin{pmatrix} (v_1(x), \dots, v_m(x))^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (v_1(x), \dots, v_m(x))^T \end{pmatrix} + (u_1(x), \dots, u_m(x)) \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial v_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\nabla^T \otimes u^T(x) \right) v(x) + u^T(x) \left(\nabla^T \otimes v(x) \right). \end{aligned}$$

Остаточно:

$$\begin{aligned} (u^T(x)v(x))' &= \left(\nabla^T \otimes u^T(x) \right) \left(I_{n,n} \otimes v(x) \right) + u^T(x) \left(\nabla^T \otimes v(x) \right) = \\ &= \left(\frac{\partial u^T(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u^T(x)}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} (v_1(x), \dots, v_m(x))^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (v_1(x), \dots, v_m(x))^T \end{pmatrix} + (u_1(x), \dots, u_m(x)) \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial v_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Узагальнимо попередній приклад. Нехай

$$x \in \mathbb{R}^n, A(x) \in M_{p,m}, B(x) \in M_{m,q} \Rightarrow C(x) = A(x)B(x) \in M_{p,q} \text{ (Bokhonov, 2021).}$$

Знайдемо похідну від добутку вказаних матричних функцій. Діючи за попередньою схемою, одержимо:

$$\begin{aligned} (A(x)B(x))' &= (\nabla^T \otimes A(x)) (I_{n,n} \otimes B(x)) + A(x) (\nabla^T \otimes B(x)) = \\ &= \left(\frac{\partial A(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial A(x)}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} B(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & B(x) \end{pmatrix} + A(x) \left(\frac{\partial B(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial B(x)}{\partial x_n} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

Диференціювання композиції відображень

Нехай $u(x) \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^n, x = x(t), t \in \mathbb{R}^m$. Як відомо,

$$u'_t(x(t)) = \nabla_x^T \otimes u(x(t)) = (\nabla_x^T \otimes u(x)) (\nabla_t^T \otimes x(t)) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(t)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1(t)}{\partial t_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n(t)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n(t)}{\partial t_m} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо другу похідну по t .

$$\begin{aligned} u''_{t^2}(x(t)) &= \nabla_t^T \otimes (\nabla_t^T \otimes u(x(t))) = \\ &= \nabla_x^T \otimes \left((\nabla_x^T \otimes u(x)) (\nabla_t^T \otimes x(t)) \right) (I_{m,m} \otimes \nabla_t^T \otimes x(t)) + (\nabla_x^T \otimes u(x)) (\nabla_t^T \otimes \nabla_t^T \otimes x(t)) = \\ &= \left(\left(\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \right), \dots, \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n^2} \right) \right) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \\ &+ \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_m} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

При одержанні формули використовувалось загальне правило диференціювання композиції відображень і формулою (6). Тут у першому множнику першого доданку використано множення блочних матриць.

ЗАУВАЖЕННЯ

Диференціюючи для перевірки кожен елемент матриці Якобі, одержимо такий самий результат. Через громіздкі вирази ми не наводимо тут ці значення.

ОБГОВОРЕННЯ

Знаходження похідних багатовимірних відображень – стандартна задача математичного аналізу. Як правило, похідні довільного порядку знаходять, диференціюючи кожну компоненту відображення. При цьому не видно структуру, втрачається інформація про те, якому лінійному простору належить похідна самого відображення як вектора. Широке застосування матричного числення, зокрема тензорних добутків, в яких до того ж діє формальний вектор-оператор першої похідної, робить знаходження похідних зрозумілою і прозорою. Такий підхід відповідає сучасному тлумаченню похідної як лінійного оператора у відповідних просторах, які, як відомо, ізоморфні тензорним добуткам пов'язаних з ними просторів.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Застосування матричного підходу в задачах диференціювання є ефективним апаратом. Можна побажати, щоб ця техніка впроваджувалась у стандартні курси, принаймні на факультетах з поглибленим вивченням математики, наприклад, на механіко-математичних факультетах університетів, ІПСА, Фізико-технічному інституті та Фізико-математичному факультеті КПІ, тощо. Така можливість обумовлена тим, що в цих навчальних підрозділах математичний аналіз і лінійна алгебра читаються окремо, і є можливість узгодження в часі вказаних тем. Автору вдається у курсі лінійної алгебри при вивченні тензорних добутків матриць дати огляд застосування викладених конструкцій у аналізі, як важливого прикладу.

Цікаво було б застосувати запропоновану методику у нескінченновимірному випадку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Abraham, R., Marsden, J.E., & Ratiu, T. (1998). Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, 2nd edition, SpringerVerlag, N.Y. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1029-0>
2. Aja-Fernandez, S., García, R. L., Tao, D., Li, X. (ed.) (2009). Tensors in Image Processing and Computer Vision. Series: Advances in Pattern Recognition, Springer-Verlag, London (e.g. see : A review of tensors and tensor signal processing, by L. Cammoun et al.) <https://doi.org/10.1007/978-1-84882-299-3>
3. Бохонов, Ю. Є. (2022). Лінійна алгебра: Курс лекцій: курс лекц. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ.
4. Бохонов, Ю. Є. (2021). Математичний аналіз. Частина 2. Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтеграл, що залежить від параметра: навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ.
5. Hardy, Y., & Steeb, W. (2019). Matrix Calculus, Kronecker Product And Tensor Product. A Practical Approach To Linear Algebra, Multilinear Algebra And Tensor Calculus With Software Implementations.
6. Itskov, M. (2009). Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-93907-8>
7. Lancaster, P., & Tismenersky, M. (1985). The Theory of Matrices with Applications. Academic Press, New York.
8. Madill, D.R. (1998). Tensor Products and Matrix Calculus. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Waterloo.
9. Marcus, M., & Minc, H. (1992). A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Courier Corporation.
10. Nguyen-Schäfer, H., & Schmidt, J-Ph. (2014). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43444-4>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Abraham, R., Marsden, J.E., & Ratiu, T. (1998). Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, 2nd edition, SpringerVerlag, N.Y. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1029-0>
2. Aja-Fernandez, S., García, R. L., Tao, D., Li, X. (ed.) (2009). Tensors in Image Processing and Computer Vision. Series: Advances in Pattern Recognition, Springer-Verlag, London (e.g. see : A review of tensors and tensor signal processing, by L. Cammoun et al.) <https://doi.org/10.1007/978-1-84882-299-3>
3. Bokhonov, Yu. (2022). Liniyna alhebra: Kurs lektsiy: kurs lekts. dlya stud. spetsial'nosti 122 «Komp'yuterni nauky» / KPI im. Ihorya Sikors'koho. Kyiv. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/47625>
4. Bokhonov, Yu. (2021). Matematychnyy analiz. Chastyna 2. Dyferentsial'ne chyslennya funktsiy kil'kokh diysnykh zminnykh. Intehraly, shcho zalezhat' vid parametra: navch. posib. dlya stud. spetsial'nosti 122 «Komp'yuterni nauky» / KPI im. Ihorya Sikors'koho. Kyiv . <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/56825>
5. Hardy, Y., & Steeb, W. (2019). Matrix Calculus, Kronecker Product And Tensor Product. A Practical Approach To Linear Algebra, Multilinear Algebra And Tensor Calculus With Software Implementations.
6. Itskov, M. (2009). Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-93907-8>
7. Lancaster, P., & Tismenersky, M. (1985). The Theory of Matrices with Applications. Academic Press, New York.
8. Madill, D.R. (1998). Tensor Products and Matrix Calculus. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Waterloo.
9. Marcus, M., & Minc, H. (1992). A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Courier Corporation.
10. Nguyen-Schäfer, H., & Schmidt, J-Ph. (2014). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43444-4>

Матеріал надійшов до редакції 04.04.2024р.

