

ВИМІРЮВАННЯ КУТА ВІДРИВУ ТІЛ ПІД ЧАС ЇХ РУХУ ПО СФЕРИЧНІЙ ПОВЕРХНІ

Валерій ЗДЕЩИЦ

Криворізький державний педагогічний університет, Україна
valeriy.zdeschits@kdpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-2404-8979>

Анастасія ЗДЕЩИЦ ✉

Науково-дослідний гірничорудний інститут КНУ, Україна
a.v.zdeschchyt@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-5092-6918>

Карина ПИРХОВКА

Криворізький державний педагогічний університет, Україна
pyrhovka@kdpu.edu.ua

АНОТАЦІЯ

Розглянуто методику проведення фізичного експерименту, яка використовує саморобну дослідницьку установку для визначення кута відриву кульки та шайби під час їх руху по сферичній поверхні.

Формулювання проблеми. В задачах класичної механіки, пов'язаних з рухом по поверхні сфери під дією гравітаційної сили матеріальної точки або кульки, пропонується знайти кут, при якому вони відриваються від поверхні. Це завдання відносно легко розв'язується більшістю студентів. Однак ті самі задачі з врахуванням сили тертя викликають труднощі під час їх розв'язання у багатьох обізнаних студентів. Перевірити результати теоретичного розгляду проблеми в експерименті неможливо, особливо дистанційно, через відсутність дослідницьких установок такого типу та методичних рекомендацій до них.

Матеріали і методи. Теоретично розглянуті з тертям і без нього всі можливі варіанти руху матеріальної точки та кульки по поверхні сфери. На основі цих розглядів визначено рівень складності отримання розв'язку такого рода завдань для студентів бакалаврського та магістерського рівня. Визначено оптимальний варіант постановки завдання для бакалаврського рівня з експериментальною перевіркою висновків теорії. Поставлена мета: визначення кута відриву плоского тіла та кульки під час їх руху по сферичній поверхні – вирішувалася за допомогою розробленої дослідницької установки у вигляді двох транспортирів, розділених аркушами паперу для утворення рейкової сферичної дороги. Смартфони студентів у режимі *slow motion* використовувалися під час дистанційного виконання ними шкільного фізичного експерименту як цифрова вимірювальна лабораторія.

Результати. Експериментально визначено кут відриву від поверхні сфери плоского тіла (шайби), який дорівнює 52° та кульки – 57° . Розроблена методика вимірювання кутів відриву та дослідницька установка.

Висновки. Значення кутів відриву, передбачені теорією руху тіл при наявності тертя – 52° для шайби та 57° для кульки підтверджені в експериментах. Доведена незмінність величини кута відриву від сферичної поверхні кульки незалежно від її маси та радіуса. Ці результати доводять той факт, що розроблена методика та дешева дослідницька установка дозволяє бакалаврам високоточно вимірювати кути відриву кульки та її швидкість навіть в дистанційному режимі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: фізичний експеримент; кут відриву; сферична поверхня; рух кульки; шайби.

Для цитування:	Здещич В., Здещич А., Пирховка К. Вимірювання кута відриву тіл під час їх руху по сферичній поверхні. <i>Фізико-математична освіта</i> , 2024. Том 39. № 3. С. 53-60. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i3-07
	Здещич, В., Здещич, А., & Пирховка, К. (2024). Вимірювання кута відриву тіл під час їх руху по сферичній поверхні. <i>Фізико-математична освіта</i> , 39(3), 53-60. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-07
For citation:	Zdeschchyt, V., Zdeschchyt, A., & Pyrhovka, K. (2024). Measurement of the angle of departure of bodies during their motion on a spherical surface. <i>Physical and Mathematical Education</i> , 39(3), 53-60. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-07
	Zdeschchyt, V., Zdeschchyt, A., & Pyrhovka, K. (2024). Vymiruvannia kuta vidryvu til pid chas yikh rukhu po sferychnii poverkhni [Measurement of the angle of departure of bodies during their motion on a spherical surface]. <i>Fiziko-matematichna osvita – Physical and Mathematical Education</i> , 39(3), 53-60. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-07

MEASUREMENT OF THE ANGLE OF DEPARTURE OF BODIES DURING THEIR MOTION ON A SPHERICAL SURFACE

Valeriy ZDESHCHYTS

Kryvyi Rih State Pedagogical University, Ukraine
valeriy.zdeschits@kdpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-2404-8979>

Anastasiia ZDESHCHYTS ✉

Mining Research Institute of KNU, Ukraine
a.v.zdeschchys@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-5092-6918>

Karina PYRHOVKA

Kryvyi Rih State Pedagogical University, Ukraine
pyrhovka@kdpu.edu.ua

ABSTRACT

The method of conducting a physical experiment, which uses a homemade research installation to determine the separation angle of a ball and a puck during their movement on a spherical surface, is considered.

Formulation of the problem. In the problems of classical mechanics, related to the movement of a sphere on the surface under the influence of the gravitational force of a material point or ball, it is proposed to find the angle at which they break away from the surface. This task is relatively easy to solve for most students. However, the same problems with the friction force cause difficulties during their solution for many knowledgeable students. It is impossible to verify the results of the theoretical consideration of the problem in an experiment, especially remotely, due to the lack of research installations of this type and methodological recommendations for them.

Materials and methods. Theoretically, with and without friction, all possible options for the movement of a material point and a ball on the surface of the sphere are considered. Based on these considerations, the level of difficulty of obtaining the solution of this kind of task for students of bachelor's and master's level is determined. The optimal variant of setting the task for the bachelor's level with experimental verification of the conclusions of the theory was determined. The goal: to determine the separation angle of a flat body and a ball during their movement on a spherical surface - was solved with the help of a developed research installation in the form of two protractors separated by sheets of paper to form a rail spherical road. Students' smartphones in slow-motion mode were used as a digital measurement laboratory during their remote performance of a school physics experiment.

Results. The angle of separation from the surface of the sphere of a flat body (puck) was experimentally determined, which is equal to 52° , and the ball - 57° . The technique of measuring separation angles and a research facility were developed.

Conclusions. The values of the separation angles predicted by the theory of the movement of bodies in the presence of friction - 52° for the puck and 57° for the ball - have been confirmed in experiments. The invariance of the separation angle from the spherical surface of the ball is proven, regardless of its mass and radius. These results prove the fact that the developed technique and cheap research equipment allow undergraduates to measure ball separation angles and their speed with high accuracy even in remote mode.

KEYWORDS: *physical experiment; angle of separation; spherical surface; movement of ball; puck.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Одна із задач класичної механіки, яка часто розв'язується в школах та вищих навчальних закладах, пов'язана з матеріальною точкою, яка без тертя ковзає під дією гравітаційної сили по поверхні сфери (Irodov, 2012). Зазвичай студентам-фізикам пропонується знайти кут відриву θ_c , при якому матеріальна точка, яка рухається без азимутальної компоненти, залишає сферичну поверхню (рис. 1 а).

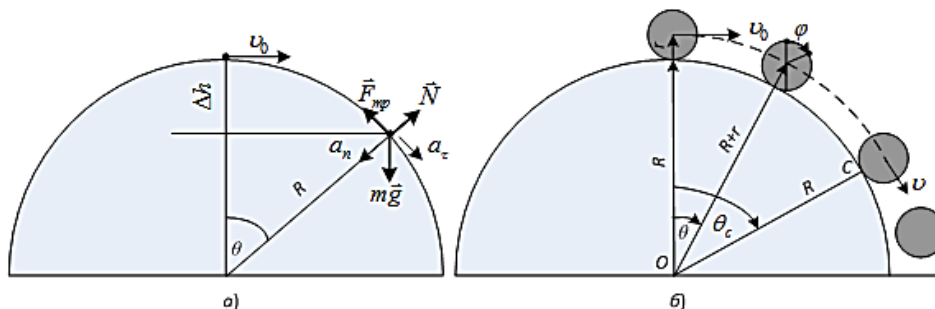


Рис. 1. Схема руху тіла по поверхні сфери радіуса R : а) тіло – матеріальна точка, б) тіло – кулька радіуса r .

Джерело: авторська розробка.

Це завдання відносно легко розв'язується більшістю студентів. Дійсно, за законом збереження енергії $mg\Delta h = \frac{mv^2}{2}$ в точці відриву, де $\Delta h = R(1 - \cos \theta_c)$. Сила реакції опори $N = 0$, $mg \cos \theta_c = \frac{mv^2}{R}$ за другим законом Ньютона і з цих формул отримуємо вираз для $\cos \theta_c = \frac{2}{3}$ та сам кут $\theta_c = 48,19^\circ$.

Однак розв'язок задачі з рухом матеріальної точки по сферичній поверхні з урахуванням тертя є проблемою для багатьох студентів. Ще більш складною є задача, що включає не тільки рух у вертикальній площині, але й азимутальний рух матеріальної точки без тертя та с тертям (Daniel, 2021).

Задача також ускладнюється при заміні матеріальної точки на кульку з врахуванням законів руху твердого тіла, моменту інерції, зміни режиму кочення на ковзання тощо. Якщо ж треба враховувати й можливий азимутальний рух тіл, тоді складність ще більше зростає і ця задача може бути розв'язана тільки на магістерському рівні.

Отже, проста на перший погляд задача стає багаторівневою зі зростаючою складністю її розв'язання. Експериментальне доведення справедливості результатів теоретичного розв'язання подібних задач, наприклад, в рамках шкільного фізичного експерименту, також є проблемою. Виконання шкільних фізичних експериментів, що проводяться дистанційно, стає неможливим через відсутність дослідницьких установок такого типу та методичних рекомендацій до них. Тому поєднання теоретичних викладок та розробка конструкції експериментальної установки для вимірювання кута та швидкості відриву тіл, що рухаються по сферичній поверхні, і є тим напрямком, якому присвячена ця робота.

Аналіз актуальних досліджень. Коли виконання шкільного фізичного експерименту, що реалізується у формі лабораторних робіт, робіт фізичного практикуму, навчальних проєктів, стає можливим тільки дистанційно, стають актуальними технології, при яких на заняттях використовується обладнання, яке є «в кармані» сучасного студента або школяра, а саме, власні смартфони, планшети, ручки, олівці, кульки, іграшки тощо. Такі технології дають можливість кожному студенту самотужки виготовити дослідницьку установку та провести на них наукові дослідження досить високого рівня. Саме смартфон стає тим потужним інструментом, який збільшує можливості навчання, робить лабораторну практику не надто складною; надає можливість проводити досліди як в лабораторії, так й дистанційно.

Що стосується теоретичного та практичного розв'язку проблеми руху тіл по сферичній поверхні, то статті на цю тему в наукових журналах не вичерпуються, починаючи, наприклад, з роботи (Symon, 1961), у якій розглядався рух маленького циліндра, що котиться по більшому, роботах (Prior & Mele, 2007; González-Cataldo et al., 2017). У роботі (Phan-Budd, 2020) наводиться постановка досліду та результати вимірювання кута відриву пофарбованої сталеві кульки від поверхні гімнастичного м'яча з довжиною кола 180,9 см (рис. 2).

У дослідах визначено кут відриву, який дорівнював $52^{\circ} \pm 1^{\circ}$. Авторка статті визнає, що пофарбовані доріжки трохи коротші, ніж передбачає модель без ковзання; робить припущення про те, що кулька ковзає перед тим, як впасти з поверхні великої сфери, спираючись на роботи (Flores et al., 1972; Jayanth et al., 2009), але не на власні спостереження. Зрозуміло, що така постановка вимірювань буде недешевою, досить неточною (хоча автор оцінює похибку в 2%), з невизначеністю відносно точки старту (кута θ_0), початкової швидкості v_0 та впливу фарби на рух кульки, тому для досягнення нашої мети вона не підходить.

Більш вдала конструкція дослідницької установки розглядається в роботі (Souza & Coluc, 2017). Пристрій складався з двох паралельних рейок, які утворюють чверть кола. Кутове положення та швидкість сталеві кульки вимірюють за допомогою рухомої штанги, оснащеної фотодетектором. Ця конструкція добре відповідає меті наших досліджень, але її дороговартість та громоздкість (радіус сферичної доріжки – 487мм) не дозволяє використати її безпосередньо для дистанційного навчання (рис. 3). Електричний метод реєстрації часу перебування кульки на доріжці передбачає ще й цифровий осцилограф. Отримані кути кочення кульки (при наявності тертя з $\mu = 0,21$) $\theta_{\text{коч}} = 28,7 \pm 0,8^{\circ}$, відриву $\theta_{\text{ци}} = 53,4 \pm 0,1^{\circ}$. Автори роботи визнали, що електричний метод реєстрації часу перебування кульки на доріжці та визначення кута відриву не є вдалим й метод візуалізації був би більш доречним.



Рис. 2. Маленька кулька вивільняється з верхньої частини м'яча, залишаючи видимий слід від фарби, який можна виміряти.

Джерело: (Phan-Budd, 2020).

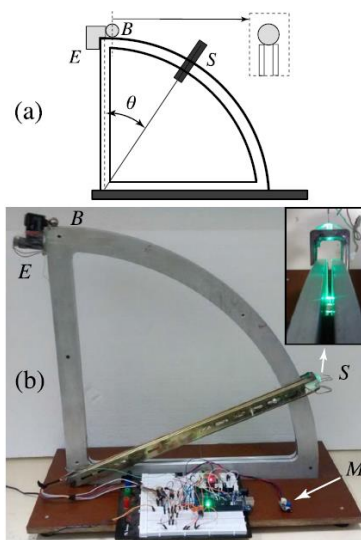


Рис. 3. Пристрій для визначення кута, під яким кулька втрачає контакт із круговою доріжкою: (а) схематична діаграма та (б) фотографія, на якій зображена кулька B , оптичний детектор S , електромагнітний пристрій E для вивільнення кульки, і мікрофон M . На вставці (а) показано окремі пластини, які використовуються для утримання м'яча на круговій траєкторії. На вставці (б) показаний оптичний датчик; світлодіод розташовується під доріжкою, а фотоприймач знаходиться вище.

Джерело: (Souza & Coluc, 2017).

Бакалаврам і магістрам дуже важливо мати ілюстративні приклади, які демонструють розв'язок проблеми з широким діапазоном рівнів складності. Такий аналіз руху матеріальної точки по сфері з тертям, надається в роботах (Daniel, 2021), де теоретично визначається кутове положення, під час якого матеріальна точка залишає сферичну поверхню 1) без азимутального руху та 2) з азимутальним рухом. Це відкриває можливості для побудови багаторівневого аналізу, що включає обчислення, як аналітичні, з застосуванням спеціальних функцій для пошуку розв'язку закритої форми, так і числові.

Результати таких досліджень, підтверджених експериментами, будуть корисними для розширення дискусій у класичній механіці на більш складні теми з використанням підходів Лагранжа та Гамільтона. Ця послідовність тем та рівнів складності дає можливість студентам отримати насолоду від прекрасної сумісності та взаємодоповнюваності фізики та прикладної математики. Такі проблеми можна потім використовувати на багатьох етапах навчальної програми, ефективно використовуючи переваги попереднього знайомства студентів із вступними темами, дозволяючи викладачеві поступово вводити різноманітні точки зору та все більш просунуті методи.

Мета статті. Створення дешевого малогабаритного пристрою та методики вимірювання кута, під яким кулька або шайба втрачає контакт із сферичною доріжкою.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Якщо тіло знаходиться на вершині сфери, тобто в стані нестійкої рівноваги, тоді, отримавши поштовх, воно почне рухатися по поверхні сфери. В залежності від умов тіло може або зупинитися, або збільшити швидкість і відірватися від поверхні. Велику роль у режимі руху відіграє величина коефіцієнта тертя μ . Якщо рухається плоска шайба (матеріальна точка), тоді можливий тільки режим ковзання, якщо кулька – можливий як режим ковзання ($\mu = 0$), так і кочення з переходом до режиму ковзання ($\mu \neq 0$). Розглянемо при яких умовах реалізуються ці режими.

А. Матеріальна точка ковзає по шорсткій поверхні сфери. Розглянемо розв'язок класичної задачі з розділу “Механіка” (Mungan, 2003). Тіло масою m ковзає по шорсткій поверхні сфери радіуса R (рис. 1 а). В деякий момент часу воно розташується під кутом θ до вертикалі. На тіло діють три сили: нормальна N , тяжіння mg і тертя ковзання $F_{\text{тр}} = \mu N$, де μ – коефіцієнт кінетичного тертя. Прискорення тіла розділимо на доцентрову компоненту $a_n = \frac{v^2}{r}$ і тангенціальну a_t . За другим законом Ньютона радіальна складова сил, що діють на тіло, дорівнює:

$$mg \cos \theta - N = ma_n. \quad (1)$$

Тоді сила N буде дорівнювати:

$$N = m \left(g \cos \theta - \frac{v^2}{R} \right), \quad (2)$$

де $v(\theta)$ – швидкість тіла.

Тіло вилітає з поверхні сфери, якщо $N = 0$. Відповідно до (2) це відбувається, коли “нормована” швидкість

$$V^2 = \left(\frac{v}{\sqrt{Rg}} \right)^2 = \cos \theta. \quad (3)$$

Графік залежності V від θ наведений на рис. 4 (графік 1). Оскільки $\cos \theta \leq 1$, V_0 не може бути більше 1, якщо тіло має бути на поверхні сфери. Це надає фізичний сенс швидкості $v \equiv \sqrt{r\bar{g}}$, яка використовується для нормування V .

За другим законом Ньютона, для тангенціальної складової сил, що діють на тіло:

$$ma_t = mg \sin \theta - \mu N, \quad (4)$$

де тангенціальне прискорення $a_t = \frac{dv}{dt}$

З урахуванням рівнянь (2) та (4) отримуємо:

$$g(\sin \theta - \mu \cos \theta) + \frac{\mu v^2}{r} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}, \quad (5)$$

де кутова швидкість $\omega = \frac{v}{R}$.

Використовуючи тотожність $\frac{d(v^2)}{d\theta} = \frac{2vdv}{d\theta}$, $\frac{dv}{d\theta} = \frac{d(v^2)}{2vd\theta}$ з рівняння (5) отримуємо вираз:

$$\frac{d(v^2)}{d\theta} - 2\mu V^2 = 2(\sin \theta - \mu \cos \theta). \quad (6)$$

Чисельний розв'язок цього диференціального рівняння можна отримати за допомогою електронної таблиці Excel для даної безрозмірної початкової швидкості на полюсі сфери $V_0 = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}$ та стартового кута θ_0 . Рівняння (6) також можна розв'язати аналітично (Mungan, 2003). Розв'язок рівняння (6) виглядає так:

$$V^2 = \frac{(2-4\mu^2)(e^{2\mu\theta} - \cos \theta) - 6\mu \sin \theta}{1+4\mu^2} + V_0^2 \cdot e^{2\mu\theta}. \quad (7)$$

Якщо $\mu = 0$, $V_0 = 0$, тоді рівняння (7) буде виглядати так (рис. 4, графік 3):

$$V = \sqrt{2(1 - \cos \theta)}. \quad (8)$$

Оскільки умовою відриву тіла від поверхні сфери є швидкість

$$V = \sqrt{\cos \theta}, \quad (9)$$

тоді, прирівнявши рівняння (8) та (9) отримуємо:

$$2(1 - \cos \theta) = \cos \theta, \quad \cos \theta_{\text{відр}} = 2/3. \quad (10)$$

Отже, кут відриву для цих умов складає величину $\theta_{\text{відр}} = 48,19^\circ$, а швидкість відриву:

$$V_{\text{відр}} = \sqrt{\cos \theta_{\text{відр}}} = \sqrt{2/3} = 0,8165.$$

Результати розрахунків для деяких інших пар μ та V_0 наведені на графіках рис. 4. Так, при $\mu = 0,3$; $V_0 = 0,6$ (графік 5) тіло спочатку зменшує швидкість, а потім швидкість починає зростати завдяки збільшенню нахилу поверхні сфери, і, після досягнення кута $\theta_{\text{відр}} \approx 45^\circ$, відривається від поверхні зі швидкістю $0,85 \text{ м/с}$.

При $\mu = 0,14$; $V_0 = 0,14$ графік 2 на рис. 4 майже торкається горизонтальної осі, тобто початкова швидкість тіла зменшується майже до нуля, коли кут $\theta = 8^\circ$, а потім починає зростати завдяки збільшенню нахилу поверхні сфери, і, після досягнення кута $\theta_{\text{відр}} \approx 52^\circ$, відривається від поверхні.

Кут відриву можна збільшувати за рахунок збільшення величини коефіцієнта тертя. Доведемо це розглянувши рух тіла при $\mu = 1$ та такому значенні V_0 , щоб графік торкався горизонтальної осі ($V \rightarrow 0$, і $\frac{d(V^2)}{d\theta} = 0$) при досягненні кута $\theta_{\text{торк}}$, а після нього тіло прискорювалося і вилітало за межі поверхні сфери при досягненні кута $\theta_{\text{відр}}$. Коли $\theta = \theta_{\text{торк}}$ ліва частина рівняння (6) дорівнює нулю. Це означає, що $\theta_{\text{торк}} = 45^\circ$, і тоді рівняння (7) можна розв'язати саме для цього кута. У результаті отримуємо значення нормованої початкової швидкості:

$$V_0 = \sqrt{0,4(1 + \sqrt{2}e^{-\pi/2})} = 0,719. \tag{11}$$

Згодом тіло залишає поверхню під кутом $\theta = 69,6^\circ$ з безрозмірною швидкістю $V = 0,59$, що відображено графіком 6 на рис. 4. Отже, варіюючи значення μ , тіло можна уповільнити до швидкості, як завгодно близькою до нуля, так що його рух виглядає так, ніби воно «відскакує» від горизонтальної осі (див. криві 2, 6). Можливі сценарії руху, коли тіло зупиниться на поверхні сфери (графік 4, $\mu = 0,6$; $V_0 = 0,5$).

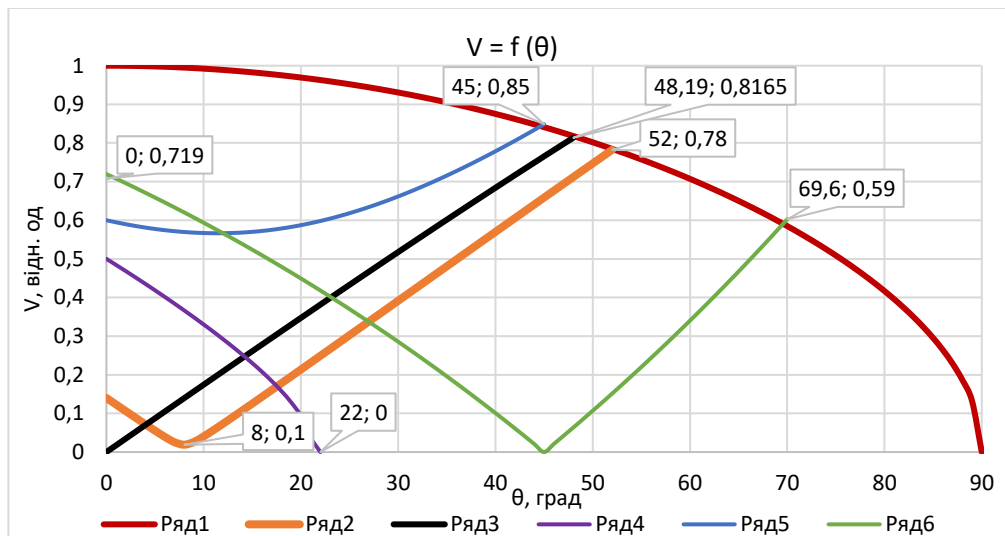


Рис. 4. Графіки залежності нормалізованої швидкості V від азимутального кута θ :
 1 – $V = \sqrt{\cos \theta}$, 2 – $\mu = 0,14$; $V_0 = 0,14$, 3 – $V = \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$, $\mu = 0$, $V_0 = 0$, 4 – $\mu = 0,6$; $V_0 = 0,5$,
 5 – $\mu = 0,3$; $V_0 = 0,6$, 6 – $\mu = 1$; $V_0 = 0,71944$.

Джерело: розраховано авторами на основі (Mungan, 2003).

Таким чином, для шайби, яка ковзає по шорсткій поверхні сфери, можливе велике різноманіття кривих $u(\theta)$. Створення та побудова графіків руху тіла по поверхні сфери є цікавим завданням для студентів.

Б. Кулька рухається по шорсткій поверхні сфери. Розглянемо випадок, коли кулька радіусом r_k і масою m вивільняється зі стану спокою під малим ($< 1^\circ$) кутом θ_0 з вершини кругової доріжки радіуса R (рис. 1 б). Положення кульки задається змінними $r = R + r_k$ і θ , тоді як обертання кульки визначається кутом φ . Доріжка складається з двох паралельних рейок, відстань між якими дорівнює l , тому ефективний радіус кульки $r_{ef} = kR = \sqrt{r_k^2 - (l/2)^2}$ ($k = \sqrt{(r_k/R)^2 - (l/2R)^2}$). Після поштовху, внаслідок тертя між кулькою і доріжкою, кулька починає котитися, збільшуючи свою швидкість. Досягнув кута $\theta_{\text{коч}}$ кулька починає ковзати, і це ковзання продовжується, доки кулька не досягне кута $\theta_C (> \theta_k)$, коли нормальна сила N стає рівною нулю. У цей момент кулька втрачає контакт із доріжкою і вільно падає.

Для отримання рівняння руху та зв'язку між поступальною швидкістю кульки та її кутовим положенням використовується процедура, яка описана у роботі (Супон, 1961) для опису руху циліндра, що котиться по іншому циліндру та (Souza, Coluc; 2017) для руху кульки по сферичній доріжці. Співвідношення між швидкістю та кутовим положенням кульки використовується для визначення режиму кочення кульки та режиму ковзання. Максимальний кут $\theta_{\text{коч}}$, до якого кулька котиться без ковзання, визначається з виразу:

$$\cos \theta_{\text{коч}} = \frac{(150+20\eta)\mu^2 + 2\eta\sqrt{4\eta^2(1+\mu^2) + 60\eta\mu^2 + 125\mu^2}}{4\eta^2(1+\mu^2) + 60\eta\mu^2 + 225\mu^2}, \tag{12}$$

де $\eta = (r_k/kR)^2$.

В межах $\theta_{\text{коч}} < \theta < \theta_C$ кулька починає ковзати. Кут θ_{C0} , під яким кулька злітає з доріжки, дорівнює:

$$\cos \theta_{C0} = \frac{2(5+2\eta \cos \theta_{\text{коч}})}{15+6\eta}. \tag{13}$$

Якщо поверхня сфери гладка (без тертя), тоді кулька негайно почне ковзати (при ненульовому $\theta \ll 1^\circ$), тому для цього випадку $\cos \theta_{\text{коч}} = 1$. Якщо при цьому і зазору між доріжками немає, тобто $l = 0$, $\eta = 1$, тоді маємо стандартну задачу щодо ковзання точкової маси без тертя по сферичній поверхні. У цьому випадку рівняння (13) зводиться до $\cos \theta_{C0} = 2/3$, тобто, кут відриву кульки від поверхні сфери буде дорівнювати $\theta_{C0} = 48,19^\circ$, як раніше і було доведено для матеріальної точки.

Кут відриву $\theta_{C\mu}$, під яким кулька втрачає контакт із доріжкою за наявності тертя, буде дорівнювати:

$$\cos \theta_{C\mu} = \frac{2 [g_1(\eta, \theta_{\text{коч}}) - 3\mu \sin \theta_{\text{коч}} - \mu \sqrt{g_2(\mu, k, \beta, \theta_{\text{коч}})}]}{9 + 4\eta^2}, \quad (14)$$

де $\beta = \frac{5}{(5+2\eta)(1+k)}$, а

$$g_1(\eta, \theta_{\text{коч}}) = 3\cos \theta_{\text{коч}} + 3\beta(1+k)(1 - \cos \theta_{\text{коч}}), \quad (15)$$

$$g_2(\mu, k, \beta, \theta_{\text{коч}}) = 9 + 4(\mu^2 - 1) \cos^2 \theta_{\text{коч}} - 16\beta(1+k) \left[\beta(1+k) \sin^2 \left(\frac{\theta_{\text{коч}}}{2} \right) + \mu \sin \theta_{\text{коч}} \right] \sin^2 \left(\frac{\theta_{\text{коч}}}{2} \right) - 8 \left[2\beta(1+k) \sin^2 \left(\frac{\theta_{\text{коч}}}{2} \right) + \mu \sin \theta_{\text{коч}} \right] \cos \theta_{\text{коч}}. \quad (16)$$

На рис. 5 показано зміну кутів $\theta_{\text{коч}}$ (графік 1) і $\theta_{C\mu}$ (графік 2), коли (максимальний) коефіцієнт статичного тертя μ змінюється від 0 до 1. Для $\mu = 0,14$ фаза кочення кульки буде спостерігатися до кута $\theta_{\text{коч}} = 23,14^\circ$ (рис. 5), потім буде фаза ковзання до кута $\theta_{C\mu} = 57^\circ$, що ми і повинні спостерігати в досліді.

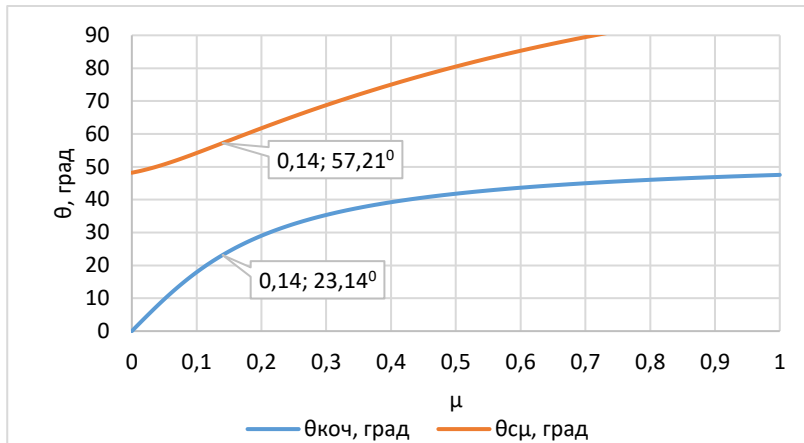


Рис. 5. Залежність кутів $\theta_{\text{коч}}$, $\theta_{C\mu}$ від величини коефіцієнта статичного тертя μ кульки.

Джерело: розраховано авторами на основі (Souza, Coluc, 2017).

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Робота носить теоретичний та прикладний характер. Спочатку теоретично розглянуті всі можливі варіанти руху матеріальної точки (шайби) з тертям і без нього по поверхні сфери. Потім розглянуто рух кульки з тертям і без нього по поверхні сфери. На основі цих розглядів визначено рівень складності отримання розв'язку такого рода завдань для студентів бакалаврського та магістерського рівня. Після цього визначено оптимальний варіант постановки завдання для бакалаврського рівня та експериментальної перевірки результатів теоретичного розгляду з можливістю дистанційного виконання цих дослідів. Технологія отримання високоточних експериментальних результатів на дешевому саморобному дослідному приладі була відпрацьована та перевірена 11 студентами групи ФІ, ФМ-20 Криворізького державного педагогічного університету під час їх проходження у 2024 році навчальної практики "Шкільний фізичний експеримент" у дистанційному режимі. У якості цифрової вимірювальної лабораторії використовувалися смартфони студентів, оснащені застосунками Stopwatch, Physics Toolbox Sensor Suite та Phyphox. Опція slow motion дозволяла реєструвати рух тіл за допомогою деяких смартфонів зі швидкістю 960 кадрів в секунду. Секудомір застосунка Stopwatch вимірював час з точністю 1 мс.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ідея використання сферичних рейок для руху шайби та кульки втілилася й в розроблену нами малогабаритну дешеву дослідницьку установку у вигляді двох шкільних транспортирів радіусом 45 мм, куплених за 8 гривень (0,2 \$), розділених між собою листами аркушів паперу (рис. 6а). Для покращення процесу вимірювання часу руху, кута відриву, а також спостереження за процесами кочення та ковзання використовувалася відеозйомка камерою смартфона в режимі slow motion з частотою 960 кадрів в секунду.

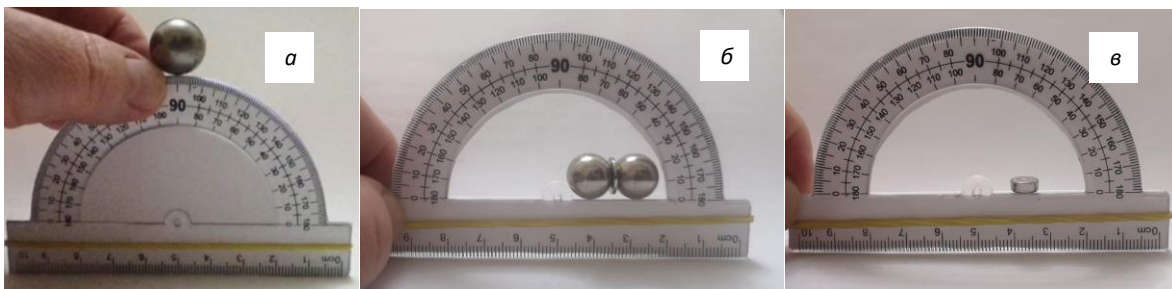


Рис. 6. Фотографія експериментальної установки: положення шайби та кульок для вимірювання коефіцієнта тертя μ .

Джерело: авторське фото.

Спочатку на вершину транспортира (відмітка 90°) встановлювалася кулька (шайба). Перед тим торці транспортирів перевірялися пальцем чи гладеньки вони. Запускалась кулька з того боку транспортирів, де не було задирок. Для збільшення контрасту відеозйомка відбувалася на фоні білого листа паперу. Перед тим торці транспортиру, що направляють кульку, фарбувалися чорним фломастером. На кульці також ставилася мітка, яка дозволяла спостерігати за її обертанням та реєструвати режим кочення або ковзання кульки. “Матеріальною точкою” була невеличка шайба (маленька батарейка на 1,5 В). Радіус сталевий кульки $r = 6,25$ мм, сфери (транспортира) $R = 45$ мм. Невеликий радіус транспортира визначався оптичним методом реєстрації руху, для якого висока швидкість об’єкта протипоказана. Зазор між площинами транспортирів $l = 0,6$ мм, що дозволяло вважати ефективний радіус кульки $r_{\text{еф}} = r_k$ з похибкою 0,25%.

Для визначення коефіцієнта тертя μ дві кульки об’єднувалися в гантельку за допомогою магнітного кільця (або скотча) та поміщалися на горизонтальну доріжку в нижній частині транспортира (рис. 6б). Потім транспортери вертикально встановлювалися на екран смартфона, на якому відображався кут його нахилу. Застосунок, який використовувався для вимірювання кута – “Physics Toolbox Sensor Suite (опція Inclinometer). Аналогічно вимірювався коефіцієнта тертя μ для шайби (рис. 6.в). Як відомо, коефіцієнт тертя $\mu = \tan \varphi_0$, де φ_0 – кут, при якому починається рух тіла (кульок або шайби) по похилій площині. Кульки та шайба починали рухатися, коли $\varphi_0 = 8^\circ$, тобто $\mu = \tan 8^\circ = 0,14$. Для збільшення точності визначення кута α_0 спочатку встановлювався смартфон під деяким кутом нахилу і тільки потім на екран встановлювалися транспортери.

Після вмикання відеокамери смартфона в режимі “Уповільнена зйомка” 960 кадрів в секунду запуск процесу відеозйомки здійснювався автоматично під час потрапляння кульки або шайби в поле зору об’єктива камери смартфона, для чого повільно зрушуючи кульку з вершини змушували її котитися вниз. Кут ϑ_0 , при якому починався рух кульки, дорівнював $\sim 1^\circ$ шайби – $\sim 8^\circ$. Дослід з цією кулькою повторювався ще багато разів. Досліди проводилися також з кульками іншого радіусу та маси для визначення їх впливу на результат вимірювання кута відриву.

Обробка та аналіз результатів вимірювання. Кут відриву кульки від сферичної доріжки визначався за таким алгоритмом: 1. Під час перегляду стоп-кадрів відеозйомки вибирався той, на якому був зафіксований вільний політ кульки біля точки її відриву від сферичної доріжки (рис. 7б); 2. Визначався кут $\theta_{C\mu}$, при якому кулька відривалася від сферичної доріжки. Для чого на стоп-кадрі проводилася дотична до шкали транспортира та кульки так, як наведено на рис. 7б, в. Значення кутів $\theta_{C\mu}$ заносилися в табл. 1 та обчислювалося середнє значення $\bar{\theta}_C$ як середньоарифметичне результатів всіх дослідів. Аналогічно проводилося вимірювання кута відриву шайби від сферичної доріжки. Результати досліджень і розрахунків наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Результати вимірювання.

Тіло	r_k мм	R мм	l мм	k	η	β ,	φ_0 , град	μ	$\theta_{C\mu}^{\text{теор}}$, град	$\theta_{\text{коч}}$, град	$\bar{\theta}_{C\mu}$, град	$\theta_{C\mu}^{\text{студ}}$, град
кулька	6,25	45	0,9	0,139	1,005	0,626	8	0,14	57,2	23,14	57±1	57±2
кулька	4,75	45	0,9	0,106	1,009	0,644	8	0,14	57,2	23,10	57±1	58±2
шайба	10	45					8	0,14	52		52±1	53±2

$\theta_{C\mu}^{\text{студ}}$ – кути відриву, виміряні студентами на виготовлених власноруч дослідницьких установках.

Джерело: результати досліджень авторів.

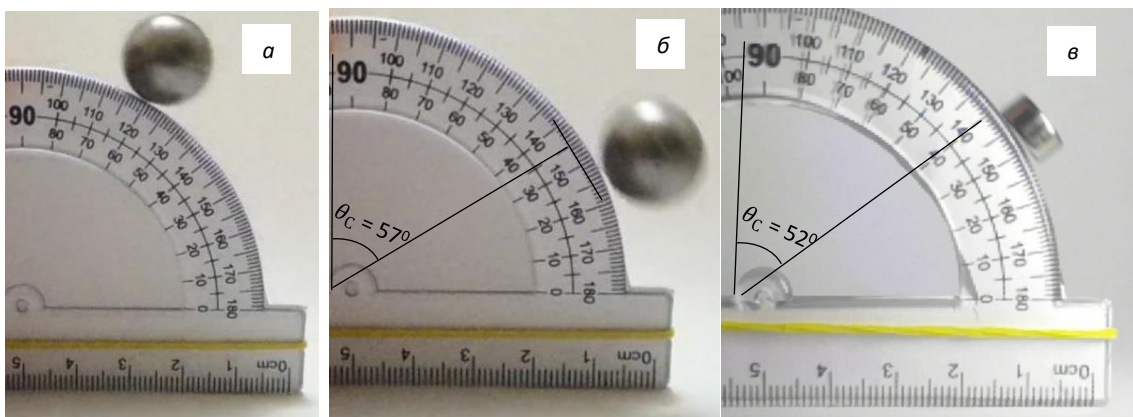


Рис. 7. Стоп-кадри руху кульки та шайби.

Джерело: авторське фото.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Висновки. Кут відриву від сферичної поверхні під час руху шайби дорівнює 52°, а кульки – 57°. Ці значення кутів відриву передбачені теорією руху тіл при наявності тертя. Доведена незмінність величини кута відриву від сферичної поверхні кульки незалежно від її маси та радіусу. Ці результати доводять той факт, що розроблена методика та дешева дослідницька установка дозволяє бакалаврам високоточно вимірювати кути відриву кульки та її швидкість навіть в дистанційному режимі. Таким чином, відкривається можливість експериментально перевіряти результати теоретичного розгляду проблеми руху тіл по сферичній поверхні з тертям.

Перспективи подальших досліджень. Ідею використання рейок для вимірювання кінематичних параметрів тіл, що рухаються по похилій площині, впроваджено у виготовлену нами дешеву експериментальну установку. Результати та методика досліджень у дистанційному режимі будуть опубліковані пізніше.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Irodov, I. E. (1988). *Problems in General Physics*. Mir Publishers.
2. Phan-Budd, S. (2020). Finger paint and physics: a simple demonstration of circular motion and conservation of Energy. *The Physics Teacher*, 58, 66-67. <https://doi.org/10.1119/1.5141979>
3. Flores, J., del Rio, A. G., Calles, A. & Riveros, H. (1972). A simple problem in mechanics: a qualitative approach. *The American Journal of Physics*, 40, 595–598.
4. Jayanth, V., Raghunadan, C., & Biswas, A. (2009). A sphere moving down the surface of a static sphere and a simple phase diagram, <https://arxiv.org/abs/0808.3531>. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0808.3531>
5. Symon, K. R. (1961). *Mechanics, 2nd ed.* Addison-Wesley, Reading, MA.
6. McDaniel, Terry W. (2021). Analysis of the motion of a mass sliding on a sphere with friction. *American Journal of Physics*. 89, 921–926. <https://doi.org/10.1119/10.0005071>
7. McDaniel, Terry W. (2021). Solutions for the motion of a mass sliding on a sphere with friction. *Model Physics, Volcano, CA 95689 USA*
8. González-Cataldo, F., Gutiérrez G; Yáñez J. (2017). Sliding down an arbitrary curve in the presence of friction. *American Journal of Physics*. 85, 108–114. <https://doi.org/10.1119/1.4966628>
9. Prior, T, Mele, E. A. (2007). A block slipping on a sphere with friction: Exact and perturbative solutions. *American Journal of Physics*. 75, 423–426. <https://doi.org/10.1119/1.2410018>
10. Mungan, C. E. (2003). Sliding on the surface of a rough sphere. *The Physics Teacher*. 41, 326–328. <https://doi.org/10.1119/1.1607801>
11. de Souza, D. C, Coluci, V. R. (2017). The motion of a ball moving down a circular path. *American Journal of Physics*. 85, 124. <https://doi.org/10.1119/1.4972177>.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Irodov, I. E. (1988). *Problems in General Physics*. Mir Publishers.
2. Phan-Budd, S. (2020). Finger paint and physics: a simple demonstration of circular motion and conservation of Energy. *The Physics Teacher*, 58, 66-67. <https://doi.org/10.1119/1.5141979>
3. Flores, J., del Rio, A. G., Calles, A. & Riveros, H. (1972). A simple problem in mechanics: a qualitative approach. *The American Journal of Physics*, 40, 595–598.
4. Jayanth, V., Raghunadan, C., & Biswas, A. (2009). A sphere moving down the surface of a static sphere and a simple phase diagram, <https://arxiv.org/abs/0808.3531>. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0808.3531>
5. Symon, K. R. (1961). *Mechanics, 2nd ed.* Addison-Wesley, Reading, MA.
6. McDaniel, Terry W. (2021). Analysis of the motion of a mass sliding on a sphere with friction. *American Journal of Physics*. 89, 921–926. <https://doi.org/10.1119/10.0005071>
7. McDaniel, Terry W. (2021). Solutions for the motion of a mass sliding on a sphere with friction. *Model Physics, Volcano, CA 95689 USA*
8. González-Cataldo, F., Gutiérrez G; Yáñez J. (2017). Sliding down an arbitrary curve in the presence of friction. *American Journal of Physics*. 85, 108–114. <https://doi.org/10.1119/1.4966628>
9. Prior, T, Mele, E. A. (2007). A block slipping on a sphere with friction: Exact and perturbative solutions. *American Journal of Physics*. 75, 423–426. <https://doi.org/10.1119/1.2410018>
10. Mungan, C. E. (2003). Sliding on the surface of a rough sphere. *The Physics Teacher*. 41, 326–328. <https://doi.org/10.1119/1.1607801>
11. de Souza, D. C, Coluci, V. R. (2017). The motion of a ball moving down a circular path. *American Journal of Physics*. 85, 124. <https://doi.org/10.1119/1.4972177>.

Матеріал надійшов до редакції 19.03.2024р.

