Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI **10.31110/fmo2024.v39i1-02** УДК **372.851**

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ GEOGEBRA

Марина ВІРА ✉
Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, Україна
vyramaryna@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-9781-5211
Петро САМУСЕНКО
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна
psamusenko@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-4241-6173

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Перехід до дистанційного навчання змусив вчителів широко використовувати засоби комп'ютерного навчання, які мають необмежений спектр можливостей при вивченні математики. Практична значущість цих засобів надзвичайно велика. Поряд із їх безпосереднім застосуванням, вони також спонукають до практичного застосування здобутих теоретичних знань. Проте варто дотримуватись балансу в питанні використання даних засобів. Адже вони являють собою ефективний допоміжний засіб навчання і не здатні самостійно сформувати цілісну систему знань учня.

В даній статті розглядаються задачі лінійного програмування з використанням програмного сервісу GeoGebra, вивчається проблема ефективного поєднання традиційних методів та засобів комп'ютерного навчання до опанування зазначеної тематики.

Матеріали і методи. У дослідженні використовувалися методи наукового пізнання: порівняльний аналіз для з'ясування різних поглядів на проблему та визначення напрямку дослідження; систематизація та узагальнення для формулювання висновків та рекомендацій.

Результати. Запропоновано низку задач лінійного програмування, розв'язання яких передбачає поєднання традиційних методів з можливістю демонстрації динамічної моделі розглядуваної задачі в середовищі GeoGebra.

Висновки. Запропоновані задачі безумовно будуть корисними учням для усвідомлення практичної значущості математики і тим самим сприятимуть активізації пізнавальної діяльності здобувача.

Матеріал статті може бути використаний для підготовки та проведення факультативних занять, оскільки дозволяє зорієнтуватися в сучасній методичній літературі з даної тематики та зазирнути в творчу майстерню провідних науковців в галузі методики навчання математики.

Стаття містить методичні рекомендації і адресована вчителям, студентам-математикам вишів, розробникам шкільних навчальних програм з математики, підручників з курсу алгебри і початків аналізу, аспірантам, науковцям в галузі теорії та методики навчання математики.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *лінійне програмування; задачі оптимізації; алгоритм розв'язання; GeoGebra.*

Для цитування:	Віра М., Самусенко П. Розв'язання задач лінійного програмування із застосуванням програмного засобу Geogebra. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 1. С. 14-20. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i1-02
	Віра, М., & Самусенко, П. (2024). Розв'язання задач лінійного програмування із застосуванням програмного засобу Geogebra. *Фізико-математична освіта*, *39*(1), 14-20. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-02
For citation:	Vira, M., & Samusenko, P. (2024). Solving the linear programming problems using Geogebra software. *Physical and Mathematical Education*, *39*(1), 14-20. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-02
	Vira, M., & Samusenko, P. (2024). Rozviazannia zadach liniinoho prohramuvannia iz zastosuvanniam prohramnoho zasobu Geogebra [Solving the linear programming problems using Geogebra software]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(1), 14-20. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-02

✉ Corresponding author

SOLVING THE LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS USING GEOGEBRA SOFTWARE

Maryna VIRA✉
Nizhyn Mykola Gogol State University, Ukraine
vyramaryna@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-9781-5211
Petro SAMUSENKO
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine
psamusenko@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-4241-6173

ABSTRACT

Formulation of the problem. The transition to distance learning has forced teachers to use widely computer-based learning tools, which have an unlimited range of possibilities in the study of mathematics. The practical significance of these means is highly significant. Along with their direct application, they also encourage the practical application of acquired theoretical knowledge. However, it is worth maintaining a balance in the issue of using these tools. After all, they cannot independently form a complete system of student knowledge and are an auxiliary means of learning. The article examines the problems of linear programming using the GeoGebra software service, particularly the problem of an effective combination of traditional and modern approaches to the study of the specified subject.

Materials and methods. We also used methods of scientific knowledge: comparative analysis to clarify different views on the problem and determine the direction of the research, systematization, and generalization for formulating conclusions and recommendations.

Results. The authors of this article propose to consider a set of linear programming problems, the solutions of which are combined with traditional methods with the possibility of demonstrating a dynamic model of the considered problem in the GeoGebra environment.

Conclusions. The proposed tasks will help students realize the practical significance of mathematics and thereby contribute to activating their cognitive activity. The article's material can be used for the preparation and conducting of optional classes, as it allows you to orient yourself in the modern methodical literature on this topic and to look into the creative workshop of leading scientists in mathematics teaching methods. The article contains methodological recommendations and is addressed to teachers, mathematics students of higher education institutions, developers of school mathematics curricula, textbooks on the course of algebra and beginnings of analysis, graduate students, scientists in the field of theory, and methods of teaching mathematics.

KEYWORDS: *linear programming; optimization problems; solution algorithm; GeoGebra.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасна шкільна освіта стоїть перед багатьма викликами. Одним з найбільш серйозних викликів є проблема мотивації учня до вивчення математичного матеріалу в умовах дистанційного навчання і військового стану, оскільки лише мотивований учень здобуватиме знання свідомо та активно. На нашу думку, навчальний матеріал має бути тісно пов'язаний із практичними потребами сьогодення. Тому доцільно розглядати задачі практичного змісту, зокрема задачі на оптимізацію, що приводять до задач лінійного програмування. І незважаючи на те, що розв'язування таких задач не входить до програмового матеріалу з математики, він є важливим засобом формування дослідницької компетентності здобувача.

Наочність, практичність і системність – важливі принципи дидактики, які мають бути реалізовані для активізації пізнавальної діяльності учнів при вивченні математики. Дотримання цих принципів можливе завдяки використанню засобів комп'ютерного навчання, зокрема комп'ютерного середовища GeoGebra. Середовище GeoGebra дозволяє проілюструвати складні та незрозумілі поняття. Однак слід дотримуватись збалансованого використання традиційних підходів та сервісу GeoGebra.

Дана стаття присвячена дослідженню можливості розв'язування задач лінійного програмування шляхом поєднання раціональних обчислювальних прийомів та використання програмного сервісу GeoGebra. Вважаємо, що досліджувана тематика є актуальною, оскільки демонструє можливості застосування ІКТ (зокрема GeoGebra) до розгляду ряду оптимізаційних задач та їх ефективного поєднання.

Аналіз актуальних досліджень. На сьогодні існує велика кількість програм факультативів, в яких розглядаються задачі лінійного програмування («Прикладні задачі на екстремум», «Економіко-математичне моделювання», «Задачі лінійного програмування») (Прокопенко та ін., 2011). Проте вивчення цих задач школярами потребує ґрунтовних знань і навичок використання лінійних функцій, рівнянь і нерівностей в нестандартних ситуаціях як засобів математичного моделювання реальних процесів і явищ. Саме тому спершу важливо ознайомитися із теоретичними аспектами розв'язування задач лінійного програмування, наприклад, у навчальних посібниках (Іващук, 2008; Білоцерківський та ін., 2010; Цегелик, 1995), в яких крім теоретичних положень також наведено низку прикладів. Слід відмітити, що більшість задач лінійного програмування, які виникають в економіці, мають «незручні дані» (багато нерівностей, що обмежують область допустимих розв'язків або наявність коефіцієнтів лінійних рівнянь, що вимагають вибору певного масштабу на координатній площині). Саме тому в більшості випадків традиційний метод розв'язування подібних задач забирає багато часу і не є раціональним. Для вирішення таких проблем використовують різні програмні засоби, зокрема, графічні калькулятори. У зв'язку з цим актуальним є питання вибору прикладного програмного забезпечення навчального призначення до дослідження оптимізаційних задач. Ряд вітчизняних вчених досліджували це питання. Зокрема, у статті

(Горошко & Цибко, 2015) розглядаються особливості методики навчання розв'язування задач лінійного програмування з використанням вільно поширюваних програмних засобів LibreOffice Calc та Maxima. А у (Пасічник & Ріжняк, 2020) досліджується проблема методики формування умінь у старшокласників розв'язування та дослідження математичних задач інтегративного змісту засобами інформаційно-комунікаційних технологій (мобільного варіанту графічного калькулятора Desmos). У роботі (Ракута, 2011) наголошується на універсальності системи динамічної математики GeoGebra, функціональні можливості якої дозволяють ефективно використовувати її при вивченні більшості тем шкільного курсу математики і оптимізаційних задач зокрема. Ряд статей закордонних авторів аналізує методичні аспекти навчання математики з використанням цього сервісу. Зокрема, у статтях (Hutkemri et al., 2017; Olsson, 2019; Granberg & Olsson, 2015; Velikova & Petkova, 2019; Chan et al., 2014) обґрунтовано той факт, що використання динамічної програми GeoGebra дозволяє розвивати творчі здібності студентів під час розв'язування математичних задач дослідницького характеру.

У попередній статті авторів (Віра & Самусенко, 2023) розглядаються методичні аспекти використання сервісу GeoGebra до дослідження розв'язності рівнянь та нерівностей з параметром. У даній статті акцентуємо увагу на доцільності застосування цього ж сервісу до аналізу розв'язності задач лінійного програмування графічним методом.

Мета статті. Ознайомити читача із геометричним методом розв'язування задач лінійного програмування; обґрунтувати доцільність поєднання традиційного підходу із можливостями динамічного моделювання розв'язку задачі в середовищі GeoGebra.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Під час роботи над публікацією використовувалися методи теоретичного аналізу, синтезу та узагальнення положень означеної проблеми.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В даній статті розглянемо деякі задачі лінійного програмування, які часто пропонуються на факультативних курсах, розв'язання яких виконується двома методами: графічним методом та із використанням графічного калькулятора динамічної системи GeoGebra. При цьому спершу слід ознайомити учнів із загальною задачею лінійного програмування, поняттями «цільова функція» та «область допустимих розв'язків», «лінія рівня цільової функції», «екстремальні точки». Вважаємо, що знайомство із подібними задачами слід розпочати із демонстрації графічного методу розв'язування задач лінійного програмування. Також доцільно акцентувати увагу на визначенні алгоритму розв'язання задач лінійного програмування:

1. Побудувати графіки граничних прямих на площині.
2. Виділити область допустимих розв'язків нерівностей системи.
3. Побудувати область допустимих розв'язків.
4. Побудувати вектор-градієнт та лінію рівня цільової функції.
5. Визначити екстремальні точки.
6. Обчислити значення цільової функції в отриманих точках.

У разі обмеженості області допустимих розв'язків можна обчислити значення цільової функції у всіх вершинах області: мінімальне значення – мінімум цільової функції, максимальне значення – максимум цільової функції.

Наведемо приклади.

Задача 1. Визначити такі невід'ємні значення x та y, при яких цільова функція $F(x,y) = 3x + 2y$ досягає свого максимального значення в області, що задається системою нерівностей:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 4; \\ x - y \leq 1; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання: розв'яжемо задачу геометричним методом. Розглянемо пряму $x + 2y = 4$. Легко переконатися, що ця пряма проходить через точки (0,2) і (4,0). Побудуємо цю пряму за двома точками. Відомо, що лінійна нерівність на площині визначає півплощину. Аби визначити яку з двох півплощин вибрати слід підставити у відповідну нерівність координати певної точки на площині, наприклад, (0;0). Отримаємо правильну нерівність $0 \leq 4$. А це означає, що всі точки із вибраної півплощини задовольняють нерівність (всі точки, що лежать нижче прямої $x + 2y = 4$). Аналогічно побудуємо півплощину, що відповідає другій нерівності, а також врахуємо той факт, що значення x та y є невід'ємними. Отримаємо область (опуклий багатокутник), в якій виконуються одночасно всі обмеження – область допустимих розв'язків (в даному випадку маємо опуклий чотирикутник *ABCD,* рис. 1).

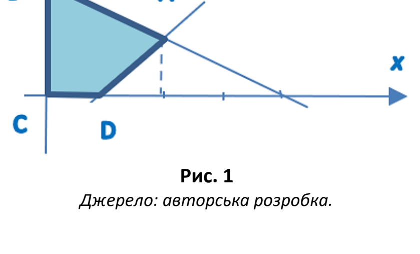

Рис. 1
Джерело: авторська розробка.

Прямі $3x + 2y = w$, де $w = const$, є лініями рівня цільової функції. Надаючи сталій w різних значень, кожного разу отримаємо іншу пряму. Слід вибрати ту точку $(x; y)$, для якої w набуває найбільшого значення в замкненій чотирикутній області. Екстремальні точки знаходяться у вершинах чотирикутника. Знайдемо координати вершини A як перетин двох ліній $x + 2y = 4$ та $x - y = 1$. Отримаємо $A(2; 1)$. Координати інших точок чотирикутника відповідно дорівнюють $B(0; 2), C(0; 0), D(1; 0)$. Обчисливши значення цільової функції у вершинах цього чотирикутника дістанемо:

$$F(A) = 8, F(B) = 4, F(C) = 0, F(D) = 3.$$

Отже, цільова функція набуває максимального значення в точці A.

Після розв'язування цієї задачі традиційним методом у зошиті варто продемонструвати можливості системи GeoGebra до аналізу цієї задачі. Введемо всі рівняння ліній та нерівностей, що обмежують область; позначимо вершини многокутника як точки перетину відповідних прямих. В окремому рядку слід ввести рівняння ліній рівня у вигляді $y = -1{,}5x + w$, а в наступному рядку ввести повзунок для параметра w. Слід відрегулювати повзунок для числа w так, щоб лінія рівня проходила через всю область допустимих розв'язків. Зрештою, пряма повинна пройти через одну точку перетину ліній, де цільова функція досягає максимального значення. Ця точка і є оптимальним розв'язком (рис. 2).

https://www.geogebra.org/calculator/j97rdubz

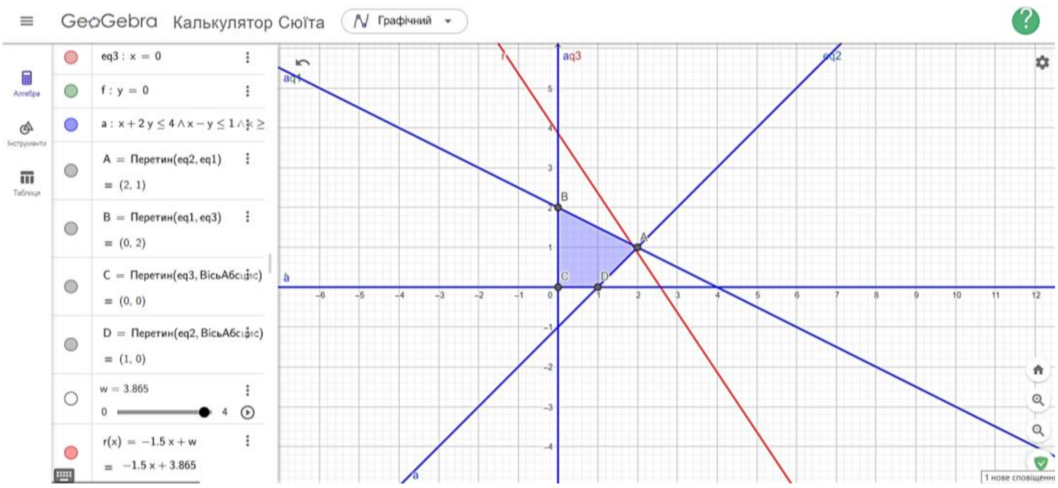

Рис. 2

Джерело: авторська розробка.

Відповідь: цільова функція набуває максимального значення в точці $A(2; 1)$.

Задача 2. Для збереження нормальної життєдіяльності людина повинна споживати білків не менше 120 умовних одиниць (ум. од.), жирів — не менше 70 і вітамінів — не менше 10 ум. од. Вміст їх в кожній одиниці продуктів П1 і П2 дорівнює відповідно (0,2; 0,075; 0) і (0,1; 0,1; 0,1) ум. од. Вартість 1 од. продукту П1 – 2 грн., П2 – 3 грн. Потрібно так організувати харчування, щоб організм отримав необхідну кількість поживних речовин при мінімальній вартості продуктів.

Розв'язання: побудуємо математичну модель даної задачі лінійного програмування. Нехай людина споживає x та y одиниць продукту П1 і П2 відповідно. Побудуємо таблицю

	П1	П2	Обмеження на споживання
Білки	0,2	0,1	не менше 120 у.о.
Жири	0,075	0,1	не менше 70 у.о.
Вуглеводи	0	0,1	не менше 10 у.о.
Ціна одиниці продукту	2 грн.	3 грн.	

Джерело: авторська розробка.

Тоді функція вартості раціону, яка має досягати мінімуму, набуває вигляду

$$F(x, y) = 2x + 3y \ \rightarrow min.$$

А систему обмежень можна записати у вигляді системи нерівностей

$$\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}1y \geq 120; \\ 0{,}075x + 0{,}1y \geq 70; \\ 0 \cdot x + 0{,}1y \geq 10; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

У випадку розв'язування цієї задачі доцільно застосовувати GeoGebra (рис. 3). Ввівши всі нерівності, що утворюють область допустимих розв'язків, робимо висновок, що область необмежена зверху. Досліджуючи цю задачу на мінімум, неважко помітити, що лінія рівня проходить через точку C$(800; 100)$ і цільова функція досягає мінімального значення порівняно із сусідніми точками A$(400; 400)$, $B(0; 1200)$. Отже, $F(C) = 1900, F(A) = 2000, F(B) = 3600$.

https://www.geogebra.org/calculator/fysedsqh

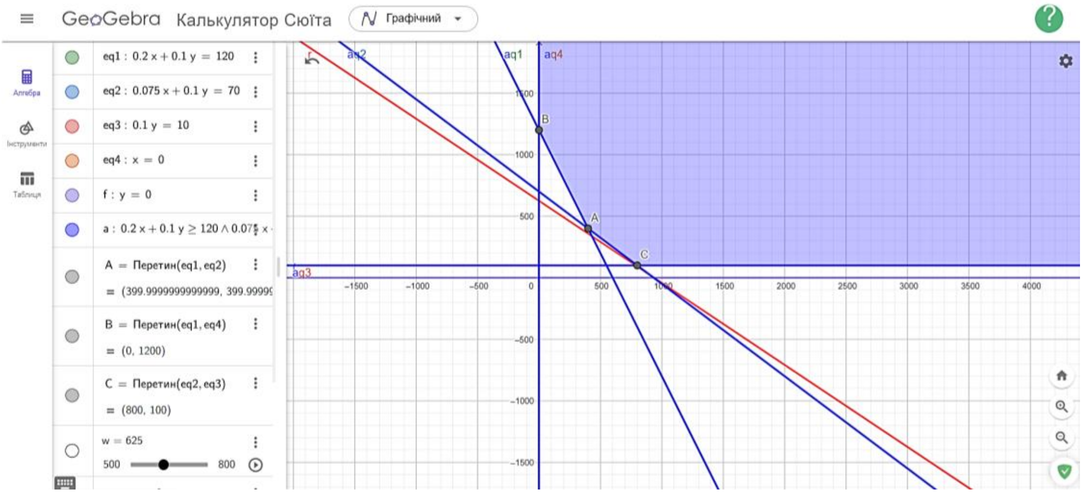

Рис. 3

Джерело: авторська розробка.

Відповідь: споживаючи 800 одиниць продукту П1 і 100 одиниць продукту П2 людина забезпечує нормальну життєдіяльність організму, при цьому мінімізуючи вартість раціону, витрачаючи лише 1900 грн.

Задача 3. Визначити такі невід'ємні значення x та y, при яких цільова функція $F(x,y) = 2x + 3y$ досягає свого максимального значення в області, що визначається системою нерівностей

$$\begin{cases} x + 3y \geq 6; \\ 4x - 5y \geq -20; \\ y \geq 1; \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання: ввівши рівняння прямих і систему нерівностей, що обмежують область в полі графічного калькулятора Сюїта системи GeoGebra, побачимо, що область допустимих розв'язків є необмеженою. Ввівши сім'ю ліній рівня $y = \frac{4}{3}x + w$, де w пробігає множину значень від 0 до 4, із аналізу динамічної картини можемо побачити, що цільова функція набуває мінімального значення в точці з координатами $(0; 2)$, а найбільшого значення немає (рис. 4).
https://www.geogebra.org/calculator/p8zvg9ze

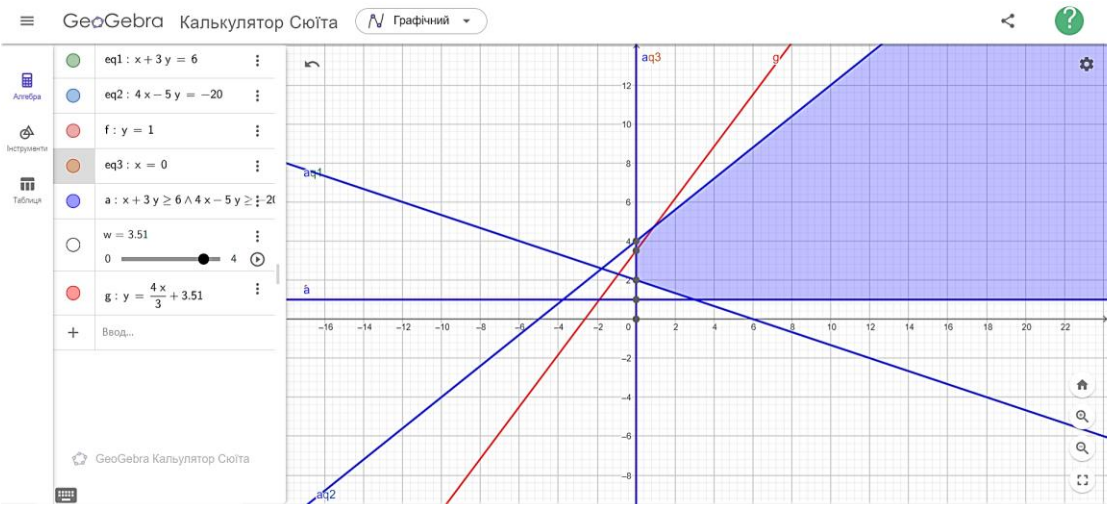

Рис. 4

Джерело: авторська розробка.

Відповідь: найбільшого значення функції у заданій області не існує.

Задача 4. Визначити такі невід'ємні значення x та y, при яких цільова функція $F(x,y) = 14x + 20y$ досягає свого максимального значення в області, що визначається системою нерівностей

$$\begin{cases} x + 3y \geq 6; \\ 7x + 10y \leq 70; \\ 4x - 5y \geq -20; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання: побудувавши множину точок площини, координати яких задовольняють систему нерівностей, побачимо, що область допустимих розв'язків – п'ятикутник $ABCDE$. Побудувавши лінії рівня виду $y = -0{,}7x + w$, де w

набуває значень із відрізка від 2 до 7, створимо динамічну картину. Очевидно, що лінія рівня паралельна прямій ED . Тому цільова функція набуває свого найбільшого значення у всіх точках відрізка ED і дорівнює 140 (рис.5).
https://www.geogebra.org/calculator/kf67hbzx

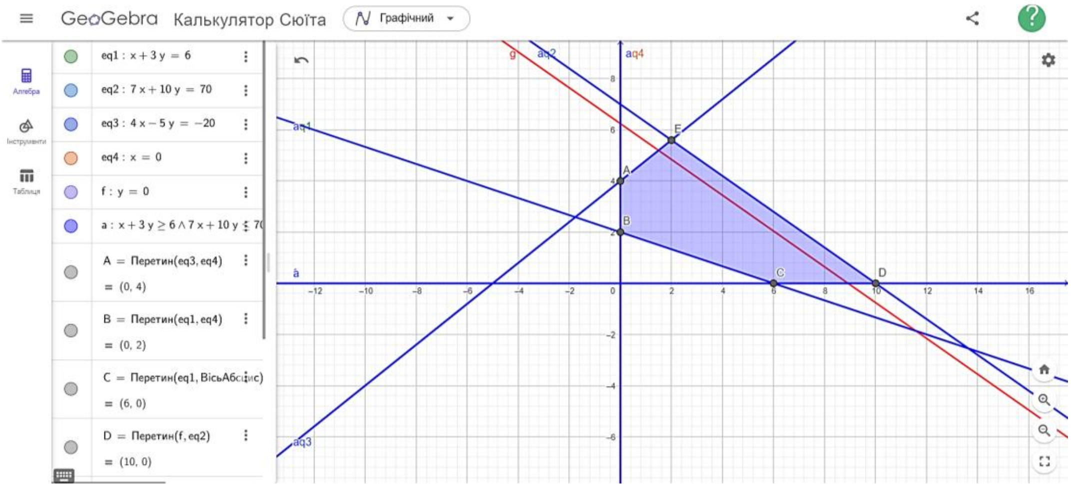

Рис. 5

Джерело: авторська розробка.

Відповідь: задача має безліч розв’язків (всі точки відрізка ED)

ОБГОВОРЕННЯ

Зазначимо, що ефективне формування математичних компетентностей засобами лінійного програмування можливе лише за умови поетапності навчання. Зокрема, перший етап - опанування фактичного матеріалу (понять, властивостей, взаємних зв’язків). Тут можуть виникати труднощі, по’вязані із незвичною концепцією побудови об’єкта вивчення (н-д, графічне зображення області допустимих розв’язків). При цьому слід дотримуватися принципу наступності навчання та подання матеріалу в «зоні найближчого розвитку учня» аби створити ситуацію успіху і тим самим мотивувати учня до активної діяльності. На цьому етапі провідна роль належить неухильному дотриманню принципу наочності навчання. Реалізувати це можна, звичайно, традиційним чином, на уроці, демонструючи всі перетворенняна дошці. Але, звісно, значно якісніше можна це здійснювати, використовуючи можливості навчання з використанням інформаційно-комп’ютерних технологій (зокрема GeoGebra).

Успішне проходження першого етапу навчання, дає змогу переходити до другого етапу – відтворення знань, а вже потім до третього етапу – застосування. Це насамперед передбачає формування вміння розв’язувати задачі на оптимізацію, яке може бути реалізоване лише за умови діяльнісного підходу до навчання. Тут бажано розглянути задачі, які приводять до різних результатів (існує єдиний розв’язок, безліч розв’язків, відсутній оптимальний розв’язок). Четвертий і п’ятий етапи – це відповідно аналіз і порівняння. Щоб забезпечити цей перехід, слід продемонструвати ефективність традиційного методу та методу із використанням GeoGebra до розв’язування однієї і тієї ж задачі з метою порівняння їх затратності по часу, складності перетворень тощо. На цих етапах реалізовується принцип системності навчання, демонструючи тісний зв’язок між різними поняттями шкільної математики. На сьогодні, найвищою ціллю навчання (на шостому етапі) є розвиток креативності. Така ціль може бути досягнута за умови використання сервісу GeoGebra до розв’язування нестандартних задач, наприклад, підбір умови задачі на оптимізацію за відомим розв’язком.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Наведені в статті вправи демонструють можливості використання програмного сервісу GeoGebra до дослідження задач лінійного програмування графічним методом. Розглянуто особливості поєднання традиційного методу викладання і демонстрації динамічної картини розв’язку за допомогою програмного засобу GeoGebra. Слід відмітити, що використання засобу GeoGebra дозволяє досягти таких цілей: структуризація навчального матеріалу; доцільність застосування ІКТ у навчальній діяльності; можливість економії часу, необхідного для подачі матеріалу без втрат у фактичній інформації; результативність; формування предметної компетенції здобувача. Зазначимо, що розв’язування запропонованих задач лінійного програмування є важливим чинником формування структурних елементів математичної компетентності (процедурна компетентність, логічна компетентність, технологічна компетентність, дослідницька компетентність, методологічна компетентність).

Сподіваємося, що наведений огляд літературних джерел та підібрані вправи стануть у нагоді практикуючим вчителям математики для використання в освітньому процесі.

Перспективними вважаємо наукові дослідження у контексті визначення методів роботи над задачами лінійного та цілочисельного програмування з метою активізації дослідницької діяльності учнів засобами програмного сервісу GeoGebra, що є надзвичайно важливим завданням в контексті реформи НУШ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Білоцерківський, О. Б., Ширяєва, Н. В., & Замула, О. О. (2010). *Економіко-математичне моделювання:* Текст лекцій. Харків, НТУ "ХПІ".
2. Віра, М., & Самусенко, П. (2023). Застосування програмного засобу GeoGebra до розв'язування задач алгебраїчним методом. *Фізико-математична освіта,* 38(1), 7–13. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-1-001.
3. Горошко, Ю. В., & Цибко, Г. Ю. (2015). Застосування вільно поширюваного програмного забезпечення до розв'язування задач лінійного програмування. *Комп'ютер у школі та сім'ї,* 3, 11-14.
4. Іващук, О. Т. (2008). *Економіко-математичне моделювання:* Навчальний посібник. Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка».
5. Пасічник, Н. О., & Ріжняк, Р. Я. (2020). Розв'язування математичних задач з реалізацією поліпредметних (економіка, інформатика, математика) інтегративних компонентів. *Фізико-математична освіта,* 2(24), 113-122. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2020-024-2-016.
6. Прокопенко, Н. С., Вашуленко, О. П., & Єргіна, О. В. (2011). *Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. ІІ. Профільне навчання. (Факультативи та курси за вибором).* Харків, вид-во «Ранок».
7. Ракута, В. М. (2011). Бібліотека комп'ютерних моделей як необхідна складова сучасного навчального середовища. *Наукові записки, серія: Педагогічні науки, 98.* Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 246-249.
8. Цегелик, Г. Г. (1995). *Лінійне програмування.* Львів: Світ.
9. Chan, M. K., Seung, W. P., & Joe C. (2014). Affective and motivational factors of learning in online mathematics courses. *British Journal of Educational Technology, 45* (1), 171–185. https://doi.org/10.1111/j.1467-8535.2012.01382.x.
10. Granberg, C., & Olsson, J. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. *Journal of Mathematical Behavior, 37*, 48-62.
11. Hutkemri, Z., & Sharifah, Z. (2017). The Effectiveness of the GeoGebra Software: The Intermediary Role of Procedural Knowledge On Students' Conceptual Knowledge and Their Achievement in Mathematics. *EURASIA J Math Sci Tech Ed, 13*(6), 2155-2180.
12. Olsson, J. (2019). Relations between task design and students' utilization of GeoGebra. *Digital experiences in mathematics education, 5*, 223-251.
13. Velikova, E., & Petkova, M. (2019). Analysing Students' Creativity in Integrating GeoGebra Applets in Solving Geometrical Problems. *Baltic J. Modern Computing, 7*(3), 419-429. https://doi.org/10.22364/bjmc.2019.7.3.08

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bilotserkivskyi, O. B., Shyriaieva, N. V., & Zamula, O. O. (2010). *Ekonomiko-matematychne modeliuvannia [Economic and mathematical modeling]*. Kharkiv, NTU "KhPI". (in Ukrainian).
2. Vira, M., & Samusenko, P. (2023). Zastosuvannia prohramnoho zasobu GeoGebra do rozviazuvannia alhebraichnykh zadach z parametrom [The application of geogebra software for solving algebraic problems with a parameter]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education, 38*(1), 7-13. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-1-001. (in Ukrainian).
3. Horoshko, Yu. V., & Tsybko, H. Yu. (2015). Zastosuvannia vilno poshyriuvanoho prohramnoho zabezpechennia do rozviazuvannia zadach liniinoho prohramuvannia [Application of freely distributed software for solving linear programming problems]. *Kompiuter u shkoli ta simi – Computer in school and family, 3*, 11-14. (in Ukrainian).
4. Ivashchuk, O. T. (2008). *Ekonomiko-matematychne modeliuvannia [Economic and mathematical modeling]*. Ternopil: TNEU «Ekonomichna dumka». (in Ukrainian).
5. Pasichnyk, N. O., & Rizhniak, R. Ya. (2020). Rozviazuvannia matematychnykh zadach z realizatsiieiu polipredmetnykh (ekonomika, informatyka, matematyka) intehratyvnykh komponentiv [Solving of mathematical problems with the implementation of multipricultural (economics, informatics, mathematics) integrative components]. Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education, 2(24), 113-122. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2020-024-2-016. (in Ukrainian).
6. Prokopenko, N. S., Vashulenko, O. P., & Yerhina, O. V. (2011). *Zbirnyk prohram z matematyky dlia doprofilnoi pidhotovky ta profilnoho navchannia (u dvokh chastynakh). Ch. II. Profilne navchannia. (Fakultatyvy ta kursy za vyborom) [A collection of mathematics programs for pre-professional training and specialized training (in two parts). Part II. Profile training. (Electives and optional courses)]*. Xarkiv, vyd-vo «Ranok». (in Ukrainian).
7. Rakuta, V. M. (2011). Biblioteka kompiuternykh modelei yak neobkhidna skladova suchasnoho navchalnoho seredovyshcha [The library of computer models as a necessary component of the modern educational environment]. *Naukovi zapysky, seriia: Pedahohichni nauky – Scientific notes, series: Pedagogical sciences*, *98*, Kirovohrad: RVV KDPU im. V. Vynnychenka, 246-249. (in Ukrainian).
8. Tsehelyk, H. H. (1995). *Liniine prohramuvannia [Linear programming]*. Lviv: Svit. (in Ukrainian).
9. Chan, M. K., Seung, W. P., & Joe C. (2014). Affective and motivational factors of learning in online mathematics courses. *British Journal of Educational Technology, 45* (1), 171–185. https://doi.org/10.1111/j.1467-8535.2012.01382.x.
10. Granberg, C., & Olsson, J. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. *Journal of Mathematical Behavior, 37*, 48-62.
11. Hutkemri, Z., & Sharifah, Z. (2017). The Effectiveness of the GeoGebra Software: The Intermediary Role of Procedural Knowledge On Students' Conceptual Knowledge and Their Achievement in Mathematics. *EURASIA J Math Sci Tech Ed, 13*(6), 2155-2180.
12. Olsson, J. (2019). Relations between task design and students' utilization of GeoGebra. *Digital experiences in mathematics education, 5*, 223-251.
13. Velikova, E., & Petkova, M. (2019). Analysing Students' Creativity in Integrating GeoGebra Applets in Solving Geometrical Problems. *Baltic J. Modern Computing, 7*(3), 419-429. https://doi.org/10.22364/bjmc.2019.7.3.08.

Матеріал надійшов до редакції 27.12.2023р.