Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X
DOI: 10.31110/2413-1571
https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-4-004 УДК 512.7

ФОРМУЛА-ТРІЙЦЯ ЯК РЕЗУЛЬТАТ ЕМОЦІЙНОГО ПОШУКУ НОВИХ ФОРМУЛ ГЕОМЕТРІЇ

Людмила ГЕТМАНЕНКО ✉
Київський університет імені Бориса Грінченка, Україна
l.hetmanenko@kubg.edu.ua
https://orcid.org/0009-0006-9601-3288

THE TRINITY FORMULA AS A RESULT OF EMOTIONAL SEARCH FOR NEW GEOMETRY FORMULAS

Lyudmyla HETMANENKO ✉
Borys Grinchenko Kyiv University, Ukraine
l.hetmanenko@kubg.edu.ua
https://orcid.org/0009-0006-9601-3288

АНОТАЦІЯ

У статті автор розглядає важливість вивчення елементів формульної геометрії в процесі математичної освіти та пропонує оригінальні методи розв'язування класичних та авторських задач, що побудовані на нових, не відомих до цього часу залежностях; знайомить з авторською формулою-трійцею.

Формулювання проблеми. *У сучасному шкільному курсі геометрії для середньої та старшої школи фактично відсутні відомості про елементи формульної геометрії. Хибним уявленням деяких математиків, які не мали досвіду викладання, була теза, що в класичній геометрії кількість формул має бути мінімальною, а елементарні тригонометричні функції повністю відкидалися. Аналіз сучасних досліджень та особистий досвід роботи переконливо доводять недостовірність такої позиції.*

Матеріали і методи. *Проведено системний аналіз наукових джерел щодо наявної інформації стосовно теоретичних понять та практичних можливостей застосування формульної геометрії. У ході підготовки статті були використані такі методи та засоби дослідження: порівняльний аналіз теоретичних положень, розкритих у науковій та навчально-методичній літературі; математичний аналіз та математична логіка; спостереження за навчально-виховним процесом учнів закладів загальної середньої освіти.*

Результати. *У результаті дослідження було систематизовано підхід до способів розв'язування геометричних задач за допомогою формул. Розкрито особливості застування формульного методу до розв'язування великої кількості класичних та авторських геометричних задач різного ступеню складності. Основні результати дослідження отримані з використанням методів формульної геометрії. Результати роботи були апробовані у Науковій школі Кушніра І.А. «Краща авторська задача з геометрії», у Київському університеті імені Бориса Грінченка, а також пропонуються учням при підготовці до олімпіад з математики.*

Висновки. *Розв'язування геометричних задач формульним способом суттєво зменшує розмір доведення. Використання формул, властивостей геометричних фігур та алгоритмів допомагає сконцентруватись на основних ідеях задачі та виконати розрахунки швидше та ефективніше. Розв'язування геометричних задач формульним способом має також важливу емоційну складову для школярів, що вивчають математику. Цей підхід сприяє створенню почуття впевненості у власних знаннях. Раціональне використання формул та алгоритмів у розв'язанні геометричних задач спонукає учнів до логічного мислення та розуміння зв'язків між різними геометричними об'єктами. Крім того, успішне розв'язування задач стимулює позитивні емоції, такі як радість від досягнення результату і задоволення від власної компетентності.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *формульна геометрія; формула-трійця; рівновеликість; геометричні олімпіадні задачі; алгебра в геометрії.*

ABSTRACT

This article explores the importance of studying elements of formulaic geometry in the process of mathematical education and proposes original methods for solving classical and authorial problems based on new, previously unknown dependencies. The author introduces the author's triple formula.

Formulation of the problem. *The modern school curriculum for middle and high school geometry lacks information about elements of formulaic geometry. Some mathematicians, who lacked teaching experience, mistakenly believed that the number of formulas in classical geometry should be minimal, and elementary trigonometric functions were completely discarded. Analysis of current research and personal experience convincingly prove the unreliability of such a position.*

Materials and methods. *A systematic analysis of scientific sources regarding the available information on theoretical concepts and practical applications of formulaic geometry was conducted. The following research methods and tools were used in preparing the article: comparative analysis of theoretical positions disclosed in scientific and educational literature, mathematical analysis and mathematical logic, observations of the educational process of general secondary education students.*

Results. *The research resulted in the systematization of approaches to solving geometric problems using formulas. The peculiarities of applying the formulaic method to solve a large number of classical and authorial geometric problems of varying complexity were revealed. The main research results were obtained using the methods of formulaic geometry. The findings were tested in the scientific school of I.A. Kushnir's "Best Authorial Problem in Geometry" at Borys Grinchenko Kyiv University and are also recommended to students preparing for mathematics Olympiads.*

Conclusions. *Solving geometric problems using the formulaic approach significantly reduces the size of the proof. The use of formulas, properties of geometric figures, and algorithms helps focus on the main ideas of the problem and perform calculations faster and more efficiently. Solving geometric problems using the formulaic approach also has an important emotional component for students studying mathematics. This approach contributes to building confidence in their knowledge. Rational use of formulas and algorithms in solving geometric problems encourages students' logical thinking and understanding of the connections between different geometric objects. Additionally, successful problem solving stimulates positive emotions such as joy in achieving results and satisfaction from one's own competence.*

KEYWORDS: *formulaic geometry; trinity formula; equisize; geometric Olympiad problems; algebra in geometry.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Увага до рівня математичної освіти серед школярів стає все актуальнішою в наші дні. Не лише педагогічна спільнота регулярно піднімає питання про зниження якості навчання математики в школах. Як вчитель з багаторічним стажем, я пропоную деякі кроки для розв'язання цієї проблеми та покращення рівня математичної підготовки учнів.

Для цитування:
Гетманенко Л. Формула-трійця як результат емоційного пошуку нових формул геометрії. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 4. С. 31-35. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-4-004
Гетманенко, Л. (2023). Формула-трійця як результат емоційного пошуку нових формул геометрії. *Фізико-математична освіта*, 38(4), 31-35. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-004

For citation:
Hetmanenko, L. (2023). The trinity formula as a result of emotional search for new geometry formulas. *Physical and Mathematical Education*, 38(4), 31-35. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-004
Hetmanenko, L. (2023). Formula-triitsia yak rezultat emotsiinoho poshuku novykh formul heometrii [The trinity formula as a result of emotional search for new geometry formulas]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(4), 31-35. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-004

✉ Corresponding author

Одним із найважливіших аспектів, який слід враховувати, є увага до учнів, які мають бажання навчатися математики. Важливо не обмежуватися тільки олімпіадними "бійцями", оскільки їх кількість невелика, але також виявляти інтерес до тих учнів, які отримують наукове задоволення від вивчення математики. З цієї точки зору, особливо варто звернути увагу на геометрію, оскільки вона володіє унікальним поєднанням доступності та емоційності. Проте, навіть вчителі, які плідно та із задоволенням навчають геометрії, припускаються багаторічної помилки – нехтуванням методом застосування алгебри у геометрії, а саме – формульною геометрією. Більшість вчителів оминають цей спосіб розв’язувань навіть при роботі із сильними учнями та з матеріалом, де застосування формульного способу розв'язування геометричних задач є природнім.

У даній роботі пропонується концепція формування понять формульної геометрії серед учнів загальної середньої освіти шляхом застосування авторської формули-трійці. Цей підхід рекомендується використовувати на уроках геометрії, під час підготовки до олімпіад і в позакласній роботі з математики.

Аналіз актуальних досліджень. Хибним уявленням деяких математиків, які не мали досвіду викладання, була теза, що в класичній геометрії кількість формул має бути мінімальною, а елементарні тригонометричні функції повністю відкидалися. Аналіз сучасних досліджень та особистий досвід роботи переконливо доводять недостовірність такої позиції.

Одним з перших математиків, хто виділив поняття, які дали поштовх для розвитку формульної геометрії, був Фурсенко В. Б. У 1937 році в журналі "Математика в школі" №5 та №6 була опублікована його знакова стаття про побудову трикутника за трьома елементами. У цій статті автор розташував усі задачі на побудову трикутника в лексикографічному порядку, вирішив усі задачі, які мають розв'язок та перерахував усі задачі, які не мають розв'язку, наводячи в усіх випадках умови, при яких розв'язок поставленої задачі можливий, при цьому понад 70% задач вперше були представлені на розгляд читача.

Математиками Готман Е.Г та Скопець З.А. (1979) був виданий збірник з докладними вказівками та коментарями, де були представлені геометричні задачі, розв'язання яких базується на застосуванні аналітичних методів. Запропоновані авторами задачі демонстрували єдність геометрії, алгебри і математичного аналізу.

У педагогічній практиці відомі ще задачі на відновлення трикутника за трьома заданими точками. У 1982 році Вільям Верник у своїй статті "Triangle Constructions with Three Located Points (Побудова трикутників за трьома заданими точками)" так само, як і В. Б. Фурсенко в 1937 році, склав лексикографічний список задач на відновлення трикутника. Ось вибрані ним найпопулярніші точки геометрії трикутника:

A, B, C, O — вершини трикутника та центр описаного кола;

M_a, M_b, M_c, G — середини сторін трикутника та центр мас;

H_a, H_b, H_c, H — основи висот трикутника та ортоцентр;

T_a, T_b, T_c, I — основи бісектрис трикутника та центр вписаного кола.

Після цього він склав список, який називається список Верника, в якому з 139 принципово відмінних задач лексикографічного списку мають розв'язок трохи більше половини — 72 задачі. Задачі зі списку Верника до сих пір знаходять свої розв’язки.

Український математик-методист Бевз Г. П. (2009) звів у систему найвідоміші й найважливіші факти із сучасної геометрії трикутника і виклав їх доступно навіть для учнів закладів загальної середньої освіти.

Винахідником формульної геометрії в тому вигляді, як вона існує зараз, є видатний український педагог-новатор Кушнір І.А. Новому розділу геометрії науковець присвятив декілька збірників (1991, 1994, 2003) та запропонував до розгляду геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників (2002). Автору також вдалося знайти інші рішення деяких завдань зі списку Верника і продовжити цей список списком Кушніра (2019).

Метою статті є знайомство читачів з авторською формулою-трійцею та демонстрація особливостей застосування формульного методу до розв’язування великої кількості класичних та авторських геометричних задач.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У ході підготовки статті були використані такі методи та засоби дослідження: порівняльний аналіз теоретичних положень, розкритих у науковій та навчально-методичній літературі; математичний аналіз та математична логіка; спостереження за навчально-виховним процесом здобувачів загальної середньої освіти. Проведено системний аналіз наукових джерел щодо наявної інформації стосовно теоретичних понять та практичних можливостей застосування формульної геометрії.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі наведено конкретні приклади використання формульної геометрії на уроках у середній та старшій школі. Проілюстровано конкретні задачі з геометрії, в процесі розв’язку яких ці методи та формули можна успішно використовувати. На відміну від методів, які рекомендують підручники, пропонуються нові оригінальні розв'язки, які до цього часу не публікувалися. Рекомендованими методами можна розв'язувати задачі різного рівня.

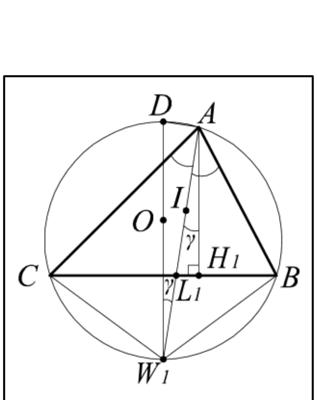

рис. 1

Ті, хто цікавляться геометрією, знайомі з точкою $\mathrm{W_i}$ $(\mathrm{i} = 1, 2, 3)$ – серединою дуги кола, описаного навколо трикутника ABC (рис. 1).

Домовимося про позначення:

O – центр описаного кола,

R – радіус описаного кола,

I – центр вписаного кола,

r – радіус вписаного кола,

$\mathrm{l_a}$ – бісектриса кута BAC $(\mathrm{l_a} = \mathrm{AL_1})$

AH_1 – висота h_a трикутника ABC

a, b, c – сторони BC, AC, AB

Звертаємо увагу на «формульне коло», за допомогою якого буде одержано декілька теорем і нових формул.

Сформулюємо і доведемо першу частину формули-трійці:

$$\boxed{bc = AW_1 l_a} \quad (1)$$

Застосуємо формулу Брахмагупти $bc = 2R \cdot h_a$ (у школі вона доводилася ще у збірнику задач Рибкіна (1956))

Позначимо $\angle L_1AH_1$ як γ.

Маємо: $bc = 2R \cdot h_a \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma}$ або $bc = 2R \cdot \cos\gamma \cdot \frac{h_a}{\cos\gamma} = AW_1 \cdot l_a$ (трикутника ADW_1 і AL_1H_1).

З самої формули можна вивести, так звану, формулу Лагранжа: $l_a{}^2 = bc - b_1c_1$ $(c_1 = BL_1,\ b_1 = CL_1)$.

Доведення. Маємо: $bc = AW_1l_a = (l_a + L_1W_1)l_a = l_a{}^2 + l_aL_1W_1$ або $l_a{}^2 = bc - b_1c_1$, бо $b_1c_1 = L_1W_1 \cdot l_a$ (як добуток відрізків хорд).

Доведемо другу частину формули-трійці:

$$\boxed{bc = AI \cdot AI_a} \quad (2)$$

де I_a – центр зовнівписаного кола (рис. 2)

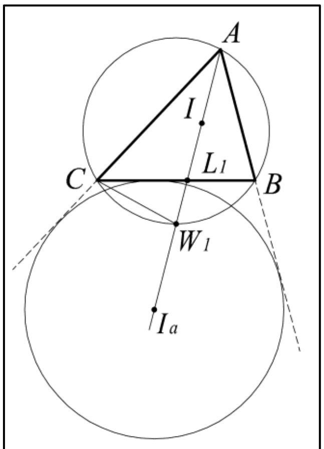

рис. 2

Оскільки $l_a = AW_1 - L_1W_1$,

то $bc = AW_1 \cdot l_a = AW_1 \cdot (AW_1 - L_1W_1) = (AW_1)^2 - AW_1 \cdot L_1W_1$.

З подібності трикутників AW_1C і CW_1L_1 випливає, що

$AW_1 \cdot L_1W_1 = (CW_1)^2 = (IW_1)^2$ (теорема-тризуб).

Отже, $bc = AW_1{}^2 - IW_1{}^2 = (AW_1 - IW_1) \cdot (AW_1 + IW_1) = AI \cdot AI_a$.

Отже, формула-трійця має вигляд

$$\boxed{bc = AW_1 \cdot l_a = AI \cdot AI_a}$$

або

$$\boxed{S = \frac{1}{2}AW_1l_a \sin A = \frac{1}{2}AI \cdot AI_a \sin A} \quad (*)$$

Задача 1. Довести, що $S = r \cdot p$ (S – площа трикутника ABC, p – півпериметр трикутника ABC).

Доведення. Маємо: $bc = AI \cdot AI_a$, $\frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2}AI \cdot AI_a \cdot \sin\angle A$;

$\frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A = AI \cdot AI_a \cdot \sin\frac{\angle A}{2} \cdot \cos\frac{\angle A}{2}$.

Оскільки $AI_a \cdot \cos\frac{A}{2} = p$, $AI \cdot \sin\frac{A}{2} = r$, то $S = r \cdot p$.

Задача 2. Довести, що $S = r_a(p - a)$.

Доведення. Доведення аналогічне задачі 1, враховуючи, що $AI_a \cdot \sin\frac{\angle A}{2} = r_a$; $AI \cdot \cos\frac{\angle A}{2} = p - a$.

Задача 3. Довести, що $S = \frac{abc}{4R}$.

Доведення. Маємо: $abc = a \cdot AI \cdot AI_a = 2R(\sin A \cdot bc) = 2R \cdot 2S = 4SR$, звідки $S = \frac{abc}{4R}$.

Задача 4. Довести, що $S = \frac{1}{2}U_1U_2l_a$ (U_1 і U_2 – проекції точки W_1 на сторони AC і AB).

Доведення. Будемо змінювати положення множників у формулі (*)

$S = \frac{1}{2}\mathbf{AW_1 \cdot \sin A} \cdot l_a$

Розглянемо множник $AW_1 \cdot \sin A$.

Навколо чотирикутника $AU_1W_1U_2$ опишемо коло (рис. 3).

Тоді, $AW_1 \cdot \sin A = U_1U_2$, отже отримаємо нову, двокомпонентну формулу площі S.

$$\boxed{S = \frac{1}{2}U_1U_2 \cdot l_a}$$

Формула викликає бажання довести рівновеликість чотирикутника $AU_1W_1U_2$ і трикутника ABC. Дійсно, у чотирикутника $AU_1W_1U_2$ і трикутника ABC спільна частина – чотирикутник ABL_1U_1 (рис. 4).

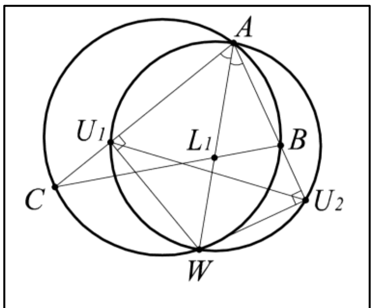

рис. 3

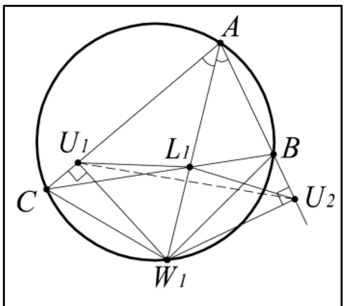

рис. 4

Висоти, що проведені з точки W_1 на прямі AB і AC, рівні.

Залишається довести, що $U_2B = U_1C$.

Але, трикутники W_1BU_2 і W_1CU_1 рівні, оскільки, $W_1B = W_1C$ і $W_1U_1 = W_1U_2$.

Отже, $U_2B = U_1C$ і трикутники L_1BU_2 і L_1U_1C – рівновеликі, що доводить твердження задачі.

Покажемо, як застосування формули-трійці породжує нову авторську задачу.

Задача 5.1. Довести формулу $S = \frac{1}{2}K_2K_3AI_a$ (K_2 і K_3 – точки дотику вписаного у трикутник кола до сторін AC і AB).

Доведення. Навколо чотирикутника AK_2IK_3 опишемо коло (рис. 5).

Маємо: $K_2K_3 = AI \cdot \sin A$.

Користуємося формулою-трійцею $bc = AI \cdot AI_a$.

Тому, $\frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2}AI \cdot AI_a \sin\angle A$;

$S = \frac{1}{2}AI\sin\angle A \cdot AI_a$ або $S = \frac{1}{2}K_2K_3AI_a$.

Задача 5.2. Довести рівновеликість трикутника ABC і чотирикутника $AK_2I_aK_3$.

Доведення. Оскільки у трикутника ABC і чотирикутника $AK_2I_aK_3$ п'ятикутник $AK_2F_1F_2K_3$ – спільний (рис. 6), то доведемо, що $S_{CK_2F_1} + S_{BK_3F_2} = S_{F_1F_2I_a}$.

Обґрунтування: ΔCK_2K_1 – рівнобедрений, кути при основі $\angle CK_2K_1 = \angle CK_1K_2 = 90° - \frac{\angle C}{2}$.

Точка K_1 – точка дотику вписаного кола зі стороною BC.

CI_a – зовнішня бісектриса кута C, тому $\angle F_1CI_a = 90° - \frac{\angle C}{2}$.

Оскільки $\angle CK_2K_3 = 90° - \frac{c}{2} = \angle I_aCK_1$, то $K_2K_1 \parallel I_aC$ і чотирикутник $K_2K_1I_aC$ – трапеція, отже $S_{CK_2F_1} = S_{F_1K_1I_a}$.

Аналогічно доводиться рівновеликість трикутників BK_3F_2 та $K_1F_2I_a$ з трапеції $K_1K_3BI_a$.

Отже, $S_{CK_2F_1} + S_{BK_3F_2} = S_{F_1F_2I_a}$.

Доведено.

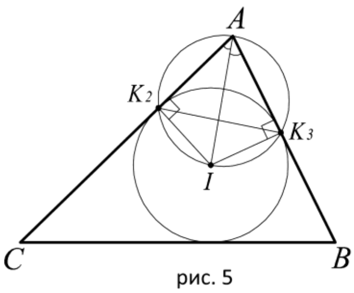

рис. 5

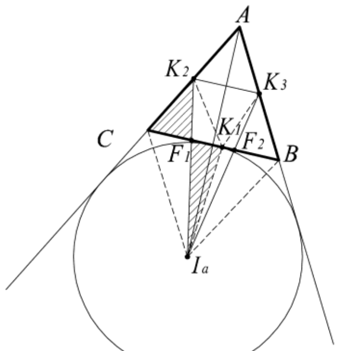

рис. 6

Задача 6. Довести формулу $S = \frac{1}{2}T_2T_3 \cdot AI_a$ (T_2, T_3 – точки дотику зовнівписаного кола з продовженням сторін AC і AB трикутника ABC).

Доведення ідентичне задачі 5.

Наскільки сильно використання формульного методу спрощує і скорочує розв'язування задач, можна зрозуміти на прикладі запропонованої нижче олімпіадної задачі. Дану задачу можна дуже швидко розв'язати за допомогою формули-трійці, спробуйте.

Задача І. А. Кушніра (XVIII Міжнародна Олімпіада, Куба, 1987 рік). Продовження бісектриси AL_1 трикутника ABC перетинає описане коло у точці W_1. З точки L_1 на сторони AB і AC відповідно опущено перпендикуляри L_1N і L_1M. Довести, що площа чотирикутника ANW_1M дорівнює площі трикутника ABC.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Розв'язування геометричних задач формульним способом має важливу емоційну складову для школярів, що вивчають математику. Цей підхід сприяє створенню почуття впевненості у власних знаннях та навичках учнів. Раціональне використання формул та алгоритмів у розв'язуванні геометричних задач спонукає учнів до логічного мислення та розуміння зв'язків між різними геометричними об'єктами. Крім того, успішне розв'язування задач стимулює позитивні емоції, такі як радість від досягнення результату і задоволення від власної компетентності. Такий підхід до вивчення геометрії не лише сприяє розвитку математичних навичок, але й виховує самодисципліну, систематичність та впевненість у власних здібностях учнів.

Розв'язування геометричних задач формульним способом також суттєво зменшує розмір доведення. Використання формул, властивостей геометричних фігур та алгоритмів допомагає учням сконцентруватись на основних ідеях задачі та виконати розрахунки швидше та ефективніше. Зосереджений та точний підхід до вирішення задач з використанням формул, дозволяє учням уникнути непотрібного повторення розрахунків та деталей, що займають багато часу і тим самим значно зменшити обсяг розв'язку. Таким чином, формульний підхід збільшує ефективність та точність розв'язання геометричних задач, одночасно зменшуючи розмір доведення.

Подальші дослідження та розробка нових прийомів та формул мають на меті підвищити якість математичної освіти та забезпечити учням навички, необхідні для успішної подальшої навчання та професійного розвитку. Відповідний матеріал може бути предметом учнівських досліджень та творчих робіт з геометрії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. (2009) *Геометрія трикутника і тетраедра.* Вежа.
2. Готман Э.Г, & Скопец З.А. (1979) *Решение геометрических задач аналитическим методом: Пособие для учащихся 9 и 10 классов.* Просвещение.
3. Кушнір І. А. (1991) *Трикутник і тетраедр у задачах.* Радянська школа.
4. Кушнір І. А. (1994) *Методи розв'язання задач з геометрії.* Абрис.
5. Кушнір І. А. (2002) *Геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників.* Факт.
6. Кушнір І. А. (2003) *Задачі з однією підказкою.* Факт.
7. Кушнір І. А. (2020) *Позиційні задачі. Список Верника. Список Кушніра.* Основа.
8. Рыбкин Н. А. (1956) *Сборник задач по геометрии, часть I. Планиметрия. Для 6-9 классов семилетней и средней школы.* Учпедгиз.
9. Фурсенко В. Б. (1937). Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника. *Математика в школе.* (5-6), 4-45.
10. Wernick W. (1982). Triangle Constructions with Three Located Points. *Mathematics Magazine.* 55(4), 227-230. https://doi.org/10.1080/0025570X.1985.11976988

REFERENCES

1. Bevz, H. P. (2009) *Heometriia trykutnyka i tetraedra [Geometry of the Triangle and Tetrahedron].* Vezha [in Ukrainian].
2. Gotman, Je.G, & Skopec, Z.A. (1979) *Reshenie geometricheskih zadach analiticheskim metodom: Posobie dlja uchashhihsja 9 i 10 klassov [Solving Geometric Problems Using the Analytical Method: Guidebook for 9th and 10th Grade Students].* Prosveshhenie [in Russian].
3. Kushnir, I. A. (1991) *Trykutnyk i tetraedr u zadachakh [Triangle and Tetrahedron in Problem Solving].* Radianska shkola [in Ukrainian].
4. Kushnir, I. A. (1994) *Metody rozviazannia zadach z heometrii [Methods for Solving Geometry Problems].* Abrys [in Ukrainian].
5. Kushnir, I. A. (2002*) Heometrychni formuly, shcho ne vviishly do shkilnykh pidruchnykiv [Geometric Formulas Not Included in School Textbooks].* Fakt [in Ukrainian].
6. Kushnir, I. A. (2003) *Zadachi z odniieiu pidkazkoiu [Problems with a Single Hint].* Fakt [in Ukrainian].
7. Kushnir, I. A. (2020) *Pozytsiini zadachi. Spysok Vernyka. Spysok Kushnira [Positional Problems. Vernik's List. Kushnir's List].* Osnova [in Ukrainian].
8. Rybkin N. A. (1956) *Sbornik zadach po geometrii, chast' I. Planimetrija. Dlja 6-9 klassov semiletnej i srednej shkoly.* Uchpedgiz.
9. Fursenko V. B. (1937). Leksikograficheskoe izlozhenie konstruktivnyh zadach geometrii treugol'nika [Lexicographic Representation of Constructive Problems in Triangle Geometry]. *Matematika v shkole.* (5-6), 4-45 [in Russian].
10. Wernick W. (1982). Triangle Constructions with Three Located Points. *Mathematics Magazine.* 55(4), 227-230. https://doi.org/10.1080/0025570X.1985.11976988