



*Ivchenko V.V. Про межі застосування закону Кулона. Фізико-математична освіта. 2021. Випуск 1(27). С. 57-61.*

*Ivchenko V. On the applicability limits of Coulomb's law. Physical and Mathematical Education. 2021. Issue 1(27). P. 57-61.*

DOI 10.31110/2413-1571-2021-027-1-009

УДК 378.147:53

**В.В. Івченко**

Херсонська державна морська академія, Україна  
reterty@gmail.com

ORCID: 0000-0001-7367-3669

## ПРО МЕЖІ ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОМУ КУЛОНА

### АНОТАЦІЯ

**Формулювання проблеми.** При вивченні закону Кулона, зазвичай, акцент робиться на його застосуванні при вирішенні учбових задач. При цьому межі застосування цього закону майже не обговорюються, що призводить до його надмірного використання та «абсолютизації». У зв'язку з цим постає необхідність у виокремленні та висвітленні критеріїв застосування такого закону. З метою уникнення «абсолютизації» слід також дібрати та розглянути разом із студентами якісно нові ефекти, що виникають у разі порушення таких умов.

**Матеріали і методи.** Узагальнення та системний аналіз літературних джерел з обраної тематики; метод електричних зображень, системний підхід, задачний підхід.

**Результати.** Індукційні та поляризаційні ефекти по-різному впливають на спотворення поля точкового заряду. В першому випадку таке спотворення спостерігається на малих відстанях від нього, причому навіть може мати місце ефект «інверсії взаємодії». Ефект екранування заряду призводить до зникнення поля точкового заряду на відстанях більших за Дебайвський радіус. При русі точкового заряду відбувається як «деформація» і виникнення вихрової компоненти електричного поля так і виникнення магнітного поля.

**Висновки.** Виокремлено наступні чотири умови коректності використання закону Кулона: 1) заряди мають бути наближено точковими (відстань між зарядженими тілами повинна бути набагато більшою за їх розміри) або повинні мати сферично-симетричний розподіл у просторі; 2) заряди не повинні «перетинатися»; 3) заряди мають бути розташовані у вакуумі або в будь-якому іншому безмежному ізотропному середовищі; 4) Заряди мають бути нерухомими відносно системи відліку, в якій розглядається їх взаємодія. Розглянутий в даній роботі кількісний та якісний аналіз впливу відхилень від наведених умов, повинен допомогти читачам дослідити межі застосовності модельного закону Кулона.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** курс фізики закладу вищої освіти, Закон Кулона, межі застосування.

### ВСТУП

**Постановка проблеми.** Модельний характер фізичних законів полягає у тому, що вони є справедливими лише за певних умов. Проведений за таких умов фізичний експеримент повинен підтвердити або спростувати правочинність математичної моделі, що використовується для виведення даного закону. Одним із таких модельних законів є відкритий у 1785 році Шарлем Кулоном закон взаємодії двох електричних зарядів. Аналіз численної науково-методичної літератури з цього питання показує, що критерії (межі застосування) наближеної застосовності цього закону в реальних фізичних ситуаціях сформульовано недостатньо чітко та повно. Більш того, зовсім не розглянуто на кількісному та якісному рівні нові ефекти, що виникають у разі порушення таких умов. Ці ефекти повинні становити не лише фундаментальний інтерес але й мати велике методичне та методологічне значення.

**Аналіз актуальних досліджень.** У роботі (Ivchenko, 2020) проаналізовано вплив несферичної форми та скінчених розмірів зарядженого об'єкту на відхилення від моделі точкового заряду, яка є необхідною умовою виконання закону Кулона. Саранін (Saranin, 1999) та Lekner (Lekner, 2016) детально вивчили відхилення від закону Кулона, які можуть мати місце, коли дві однойменно заряджені провідні сфери взаємодіють між собою електростатично. Обчислюючи сили їх взаємодії як функцію відносної відстані між сферами, вони знайшов, що на малих відстанях відбувається перехід від відштовхування до притягання. Виявляється, однак, що з методичної точки зору та в умовах нестачі аудиторного часу доцільніше та простіше розглядати цей ефект на прикладі взаємодії зарядженої сфери з точковим зарядом. У цьому випадку ми повинні мати скінчену кількість зарядів-зображень, що значно спрощує кількісний та якісний аналіз проблеми. Такий детальний аналіз буде наведено в основній частині даної статті.

**Мета статті.** Метою статті є презентація та системний аналіз меж застосування закону Кулона та висвітлення якісно нових ефектів, що виникають у разі його невиконання.

### МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Узагальнення та системний аналіз літературних джерел з обраної тематики; метод електричних зображень, системний підхід.

### РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У сучасному формулюванні закон Кулона стверджує, що сила взаємодії двох точкових зарядів спрямована вздовж прямої, що з'єднує ці заряди, та пропорційна їх величинам і обернено пропорційна квадрату відстані між ними. Цей експериментально знайдений закон може бути виведений з суто теоретичних міркувань, використовуючи методи квантової теорії поля (Peskin & Schroeder, 2018, p. 123-125). Закон Кулона також можна дістати, застосувавши теорему Гауса.

Для справедливості закону Кулона потрібно виконати чотири умови:

1. Заряди мають бути наближено точковими (відстань між зарядженими тілами повинна бути набагато більшою за їх розміри) або повинні мати сферично-симетричний розподіл у просторі;
2. Заряди не повинні «перетинатися»;
3. Заряди мають бути розташовані у вакуумі або в будь-якому іншому безмежному ізотропному середовищі;
4. Заряди мають бути нерухомими відносно системи відліку, в якій розглядається їх взаємодія.

У роботі (Ivchenko, 2020) показано, що найбільші відхилення від закону обернених квадратів повинні мати місце для зарядженого кільця та системи, що складається з системи двох однакових точкових зарядів. Цікаво, що для цих обох систем напруженість електричного поля обертається в нуль в центрі заряду. Нижче ми проаналізуємо вплив інших факторів на ступінь відхилення від закону Кулона.

**Індукційні ефекти.** Розглянемо взаємодію точкового заряду  $q$  що знаходиться на відстані  $l$  від центра ізольованої металевої кулі (сфери) із зарядом  $q_k$  та радіусом  $R < l$  (рис. 1). Користуючись методом електричних зображень, можна показати [Сивухин, 2004, стор. 88-89], що електричне поле такої кулі може бути представлене як суперпозиція точкових зарядів  $q' = -qR/l$  (розташованого на відстані  $R^2/l$  від центра кулі, на лінії, що сполучає її центр із зарядом-оригіналом  $q$ ) та  $q_k - q'$  (який можна вважати розташованим в її центрі, внаслідок рівномірного розподілу по поверхні). Заряд  $q'$  є електричним зображенням зарядів, індукованих на найближчому до  $q$  боці поверхні кулі. Знак цих зарядів є, вочевидь, протилежним знаку заряду  $q_k$ . Заряд  $-q'$  є електричним зображенням однойменних з  $q$  зарядів. Таким чином, в присутності пробного заряду  $q$  порушується сферично-симетричний (рівномірний) розподіл зарядів на поверхні кулі.

З урахуванням вищевикладених міркувань модуль сили взаємодії зарядженої кулі з точковим зарядом знайдеться за формулою

$$F = F_0 \left| 1 - yx^3 \frac{2-x^2}{(1-x^2)^2} \right|, \quad (1)$$

де  $F_0 = k|q_k||q|/l^2$  – модуль взаємодії між провідною кулею та точковим зарядом при нехтуванні ефекту перерозподілу зарядів на поверхні;  $x = R/l$ ;  $y = q/q_k$ . З виразу (1) слідує, що при  $x \rightarrow 1$   $F \rightarrow \infty$ . У випадку  $y > 0$  (однойменні заряди) позитивному знаку підмодульного виразу відповідає відштовхування зарядів, а негативному знаку – притягання. При  $y < 0$  (різноїменні заряди) знак підмодульного виразу є завжди позитивним і йому відповідає притягання зарядів. Таким чином, у випадку однойменних зарядів, при зміні відстані між ними, може спостерігатися зміна типу їх взаємодії. Такий ефект, навіть якісно, не може бути пояснений в межах моделі точкового заряду. Якщо

$$yx^3 \frac{2-x^2}{(1-x^2)^2} = 1, \quad (2)$$

то сила взаємодії між однойменно зарядженими об'єктами обертається в нуль. Варто відзначити, що таке положення рівноваги є нестійким.

На рис. 2 показано криву (2), побудовану в площині  $xu$  при  $0 < x < 1$ ,  $y > 0$ . Область, що розташована ліворуч від неї, відповідає відштовхуванню однойменних зарядів, праворуч – їх притягання. З рис. 2 чітко видно, що ефект притягання має місце у випадках, коли об'єкти розташовані достатньо близько один до одного та (або) величина точкового заряду на багато разів перевищує заряд сфери. Так, наприклад, якщо  $q = 10q_k$  притягання буде мати місце приблизно при  $l < 3R$ ; якщо ж  $q = q_k$ , розглянутий ефект буди наближено досягатися при  $l < 1.5R$  (в обох випадках, звичайно,  $l$  слід вважати більшим за  $R$ ).

Вираз (1) дозволяє виділити на площині  $xu$  область, для якої наближення точкового заряду є коректним. На рис. 3 наведено результати числових розрахунків ліній рівня вздовж відносна похибка  $\varepsilon_F = |F - F_0|/F$  складає 5%. Области, які відповідають більшим значенням цієї величини, зафарбовано у сірий колір. Видно, що за великих значень  $y$  мінімальна відстань  $l_{\min}$ , починаючи з якої стверджується закон Кулона, повинна бути великою (наприклад, якщо  $y = 10$ , то  $l_{\min} \approx 10R$ ). По мірі спадання  $y$ , величина  $l_{\min}$  також зменшується. Так, при  $q = q_k$  заряджену кулю можна вважати точковим зарядом аж до відстані  $l_{\min} \approx 3R$ .

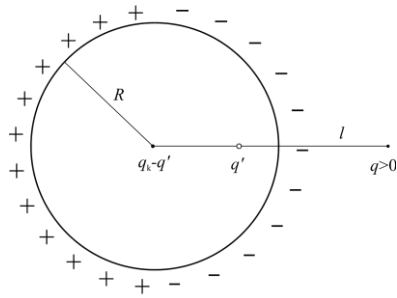


Рис. 1. До задачі про взаємодію зарядженої провідної кулі з точковим зарядом

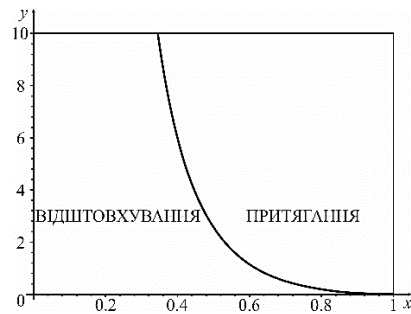


Рис. 2. Крива (2), побудована в площині ху

При  $l < R$  (точковий заряд  $q$  знаходиться всередині сфери, тобто заряди «перетинаються») слід враховувати лише взаємодію заряду-оригіналу  $q$  із зарядом-зображенням  $q'$ , який тепер знаходиться поза сферою (як і в попередньому випадку, заряд  $q_k - q'$  є рівномірно розподіленим по поверхні сфери і, отже, не створює поле всередині сфери). У такому разі

$$F = \frac{kq^2}{R^2} \frac{x^3}{x^2 - 1}. \tag{3}$$

З виразу (3) слідує, що в даному випадку модуль сили взаємодії зарядженої кулі з точковим зарядом не залежить від її заряду (для випадку непровідної сфери з рівномірно розподіленим зарядом ця сила взагалі обертається в нуль)! Крім того, ця сила, незалежно від знаків зарядів кулі й точкового заряду, завжди спрямована радіально до поверхні кулі. Ці ефекти також, навіть якісно, не можуть бути пояснені в межах моделі точкового заряду, якщо його розташувати в центрі кулі. Відзначимо також, що центру кулі відповідає положення нестійкої рівноваги заряду  $q$ . Як і в попередньому випадку, сила взаємодії обертається в нескінченність на поверхні кулі.

**Поляризаційні ефекти.** Розглянемо тепер відхилення від закону Кулона, що виникають за рахунок поляризації середовища. Такі відхилення мають місце для полів окремих заряджених частинок в сильно провідних середовищах (плазма, сильні розчини електролітів, метали) і виникають за рахунок самовільної поляризації середовища навколо них всередині сфери з радіусом, що має порядок Дебаївської довжини  $r_D$  (наприклад, для металів величина  $r_D$  має порядок 10 см). Поза сферою електричне поле окремої частинки майже повністю «екранується» (практично зникає) частинками протилежного знака, що притягуються до неї, утворюючи сферично-симетричну «хмару».

Вираз для екранованого кулонівського потенціалу в наближенні  $q\phi \ll kT$  має наступний вигляд [Сивухин, 2004, стор. 510-512]:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_D} \frac{\exp(-z)}{z},$$

де  $r$  – відстань від точки де міститься точковий заряд  $q$  до досліджуваної точки;  $z = r/r_D$ . Завдяки сферичній симетрії потенціалу відмінною від нуля є лише «радіальна» проекція  $E_r$  напруженості електричного поля, причому

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_D^2} \frac{\exp(-z)(z+1)}{z^2}, \tag{4}$$

На рис. 4 наведено залежність відносної похибки  $\epsilon_{E_r} = (E_{r0} - E_r)/E_r$  ( $E_{r0} = q/4\pi\epsilon_0 r_D^2 z^2$ ) від безрозмірної відстані  $z$ , побудовану з урахуванням виразу (4). Видно, що ця величина не перевищує 5% при  $r < 0.35r_D$ .

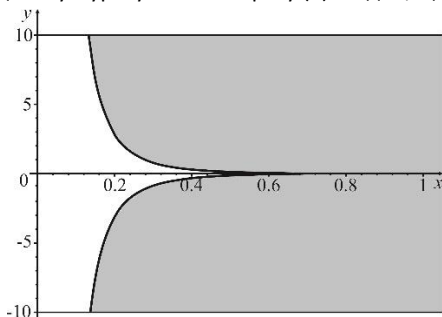


Рис. 3. Області коректності (біла) та некоректності (сіра) при  $\epsilon_r = 5\%$

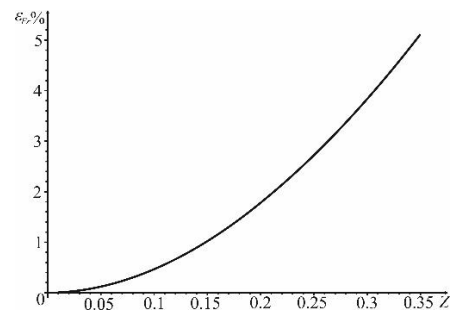


Рис. 4. Залежність відносної похибки  $\epsilon_{E_r}$  від безрозмірної відстані  $z = r/r_D$

Відхилення від закону Кулона, що виникають за рахунок поляризації середовища, мають місце й в анізотропних кристалах. Знайдемо, наприклад, величину та напрямок напруженості електричного поля нерухомого заряду у випадку одновісного кристалу. Використовуючи лінійний зв'язок між компонентами векторів електричного зміщення та

напруженості електричного поля ( $D_x = \epsilon_0 \epsilon_x E_x, D_y = \epsilon_0 \epsilon_y E_y, D_z = \epsilon_0 \epsilon_z E_z$ ), в системі координат, де тензор діелектричної проникності є діагональним, матимемо:

$$E_x = E_0 \sin \theta \cos \varphi / \epsilon_x, E_y = E_0 \sin \theta \sin \varphi / \epsilon_y, E_z = E_0 \cos \theta / \epsilon_z, \quad (5)$$

Тут  $E_0 = kq/r^2$  – напруженість поля точкового заряду у вакуумі. Вирази (5) записано у сферичній системі координат, Для одновісних кристалів  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_{\perp}, \epsilon_z = \epsilon_{\parallel}$ . Тоді, з урахуванням виразів (5), модуль напруженості електричного поля знайдеться як

$$E = E_0 \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{\perp}^2} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\parallel}^2}}.$$

Напрямок поля може бути визначений з наступного співвідношення:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}{E_z} = \frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}} \operatorname{tg} \theta.$$

Тут  $\alpha$  – кут між вектором напруженості та віссю  $Oz$ . Таким чином, для ізотропних речовин ( $\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\parallel} = \epsilon$ ) у порівнянні з полем у вакуумі змінюється лише модуль напруженості (зменшується в  $\epsilon$  раз). При цьому поле лишається спрямованим радіально від точкового заряду і можна вважати, що закон Кулона формально продовжує виконуватися. У випадку анізотропного середовища додатково змінюється напрямок поля (сила взаємодії точкових є центральною лише вздовж головних осей кристалу; при довільному розташуванні пробного точкового заряду сила взаємодії стає нецентральною). Причиною виникнення цих ефектів є виникнення додаткової сили з боку поляризованого середовища, що діє на пробний заряд, розміщений у досліджуваній точці середовища.

**Електричне поле рухомого заряду.** У найпростішому випадку руху точкового заряду  $q$  зі сталою швидкістю  $\vec{v}$ , напруженість електричного поля створеного ним може бути знайдена за лоренц-інваріантною формулою (Jefimenko, 1994):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \frac{1 - v^2/c^2}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \beta]^{3/2}}, \quad (6)$$

де  $\vec{E}_0 = kq\vec{r}/r^3$  – напруженість поля за умови нехтування його рухом (тобто отримана безпосередньо із закону Кулона);  $\vec{r}$  – радіус-вектор досліджуваної точки поля, отриманий в системі координат, пов'язаної із зарядом  $q$ ;  $\beta$  – кут між векторами  $\vec{r}$  і  $\vec{v}$ .

Окрім електричного, рухомий заряд створює також магнітне поле з індукцією  $\vec{B} = \vec{v} \times \vec{E}/c^2$ . При виведенні виразу (6) враховуються два фактори: 1) скінченна швидкість розповсюдження електричного поля (ефект «запізнення» поля); 2) виникнення вихрового електричного поля за рахунок зміни в часі магнітного поля.

На рис. 5 наведено полярні графіки кутового розподілу (залежно від кута  $\beta$ ) відносної напруженості електричного поля  $\vec{E}/\vec{E}_0$  в довільній точці простору, що знаходиться на відстані  $r$  від миттєвого положення точкового заряду (тобто на сфері), побудовані при різних значеннях величини відносної швидкості  $v/c$ . Видно, що найменше (найбільше) значення цієї величини повинно мати місце вздовж (перпендикулярно до) напрямку руху. Електричне поле ніби «стискається» вздовж напрямку руху і «розширюється» у напрямі перпендикулярному до напрямку руху. При  $v \rightarrow c$  і  $\beta = 0$ ,  $E \rightarrow 0$ . Якщо ж  $v \rightarrow c$  і  $\beta = \pi/2$ ,  $E \rightarrow 0$ . Аналіз виразу (6) показує, що найбільша відносна похибка  $\epsilon_E = |E - E_0|/E$ , що виникає в разі заміни рухомого заряду нерухомим, повинна мати місце вздовж напрямку руху заряду ( $\beta = 0$ ). Графік її залежності від величини відносної швидкості  $v/c$  наведено на рис. 6. Видно, що ця величина не перевищує 5% при  $v < 0.2c$ .

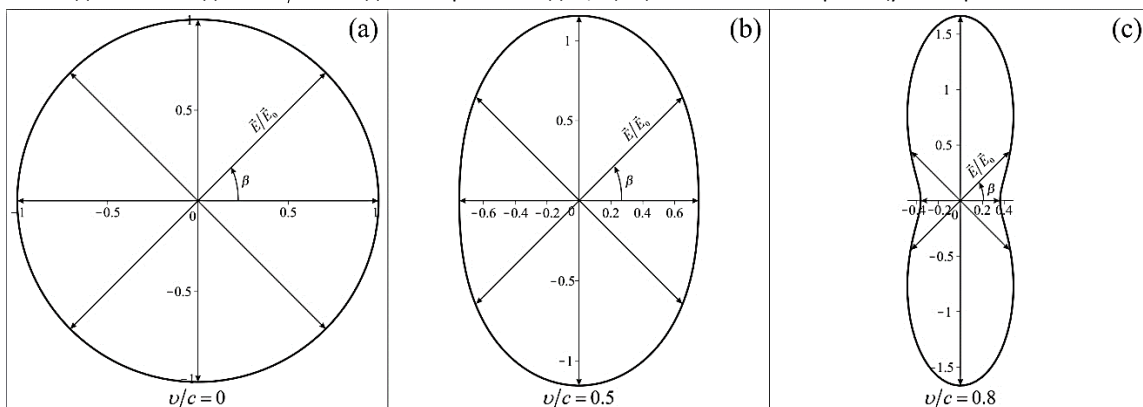
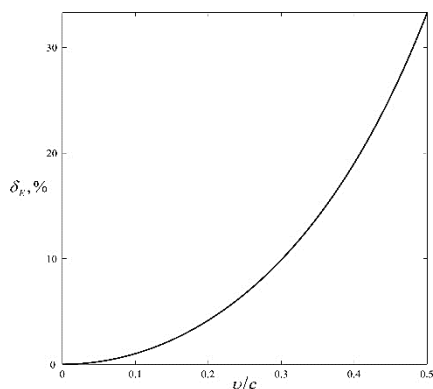


Рис. 5. Полярні графіки кутового розподілу відносної напруженості електричного поля рухомого заряду, побудовані при різних значеннях величини його відносної швидкості

Закон Кулона має також порушуватися на дуже малих відстанях (порядку комптонівської довжини хвилі електрона) за рахунок ефектів, пов'язаних із властивостями вакууму (поляризація вакууму; генерація пар віртуальних мікрочастинок; пробій вакууму та ін.).

**ОБГОВОРЕННЯ**

Індукційні та поляризаційні ефекти по-різному впливають на спотворення поля точкового заряду. В першому



**Рис. 6. Залежність відносної похибки  $\varepsilon_E$  від безрозмірної відстані  $v/c$  для  $\theta = 0$**

випадку таке спотворення спостерігається на малих відстанях від нього, причому навіть може мати місце ефект «інверсії взаємодії». Ефект екранування заряду призводить до зникнення поля точкового заряду на відстанях більших за Дебаївський радіус. При русі точкового заряду відбувається як «деформація» і виникнення вихрової компоненти електричного поля так і виникнення магнітного поля. Особистий внесок автора, зокрема, полягає у числових розрахунках похибок, що виникають у разі невиконання закону Кулона, у візуалізації аберації електричного поля рухомого заряду та у виведенні узагальненого закону Кулона для анізотропного середовища.

**ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ**

Як бачимо, існують чотири основних фактори, що обумовлюють відхилення від закону Кулона. Така його «обмеженість» має бути обов'язково усвідомлена здобувачами вищої освіти. Запропоновані автором статті приклади можуть бути впроваджені в учбовий процес у закладі вищої освіти під час поглибленого вивчення законів електростатики та дозволять студентам фізикам сформулювати уявлення про фізичні наслідки до яких може приводити невиконання основного закону електростатики. Подальші дослідження планується присвятити висвітленню меж застосування інших стрижневих модельних законів у фізиці.

**Список використаних джерел**

1. Ivchenko V. V. What is the most “non-point” gravitating or electrically charged object? *Rev. Mex. Fis. E.* 2020. 17(1) 69-72. DOI: 10.31349/RevMexFisE.17.69.
2. Jefimenko Oleg D. Direct calculation of the electric and magnetic fields of an electric point charge moving with constant velocity. *Am. J. Phys.* 1994. 62(1) 79-85. DOI: 10.1119/1.17716.
3. Lekner J. Regions of attraction between like-charged conducting spheres. *Am. J. Phys.* 2016. 84(6) 474-477. DOI: 10.1119/1.4942449.
4. Peskin Michael E. & Schroeder Daniel V. *An Introduction To Quantum Field Theory.* Westview Press; CRC Press, 2018. 865 p.
5. Saranin V. A. On the interaction of two electrically charged conducting balls. *Phys.-Usp.* 1999. 42(4) 385-390. DOI: 10.1070/PU1999v042n04ABEH000584.
6. Сивухин Д. В. *Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. Т. 3 Электричество.* М.: «Физматлит», 2004. 656 с.

**References**

1. Ivchenko V. V. (2020). What is the most “non-point” gravitating or electrically charged object? – *Rev. Mex. Fis. E.*, 2020. 17(1), 69-72. DOI: 10.31349/RevMexFisE.17.69. [in English].
2. Jefimenko Oleg D. (1994). Direct calculation of the electric and magnetic fields of an electric point charge moving with constant velocity. – *Am. J. Phys.*, 1994. 62(1), 79-85. DOI: 10.1119/1.17716. [in English].
3. Lekner J. Regions of attraction between like-charged conducting spheres. – *Am. J. Phys.*, 2016. 84(6), 474-477. DOI: 10.1119/1.4942449. [in English].
4. Peskin Michael E. & Schroeder Daniel V. *An Introduction To Quantum Field Theory.* Westview Press; CRC Press, 2018. 865 p. [in English].
5. Saranin V. A. On the interaction of two electrically charged conducting balls. – *Phys.-Usp.*, 1999. 42(4), 385-390. DOI: 10.1070/PU1999v042n04ABEH000584. [in English].
6. Sivuhin D. V. (2004). *Obschiiy kurs fiziki. Ucheb. posobie: Dlya vuzov. T. 3 Elektrichestvo* [General course of physics. For universities. Vol. 3 Electricity]. М.: «Fizmatlit» [in Russian].

**ON THE APPLICABILITY LIMITS OF COULOMB’S LAW**

**Ivchenko Vladimir**

*Kherson State Maritime Academy, Ukraine*

**Abstract. Formulation of the problem.** *In the study of Coulomb's law, the emphasis is usually made on its application in solving educational problems. At the same time, the applicability limits of this law are almost not discussed, which leads to its excessive use and "absolutization". In this regard, there is a necessity to identify and clarify the criteria for the application of such a law. In order to avoid "absolutization", it is also necessary to select and consider with students qualitatively new effects that arise in case of violation of such conditions.*

**Materials and methods.** *Generalization and systematic analysis of literary primary sources on selected topics; the image method, system approach, problem solving.*

**Results.** *Induction and polarization effects affect the distortion of the point charge field in different ways. In the first case, such distortion is observed at small distances from it, and there may even be an effect of "interaction inversion". The effect of charge screening leads to the disappearance of the point charge field at distances greater than the Debye radius. When a point charge moves, both the "deformation" and the occurrence of the vortex component of the electric field and the occurrence of the magnetic field appear.*

**Conclusions.** *The following four conditions for the correct use of Coulomb's law are identified: 1) the charges can be approximately considered as the point charges (the distance between the charged bodies should be much larger than their sizes) or should have a spherically symmetrical distribution in space; 2) the charges should not "intersect" with each other; 3) charges should be located in a vacuum or in any other boundless isotropic medium; 4) the charges should be fixed relative to the reference frame in which their interaction is considered. The quantitative and qualitative analysis of the influence of deviations from the given conditions considered in this work should help readers to investigate the limits of applicability of Coulomb's model law.*

**Key words:** *university physics education, Coulomb's law, applicability limits.*

