Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X
DOI: 10.31110/2413-1571
https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-2-002 УДК 517.2/.3

НЕРІВНОСТІ КОШІ-БУНЯКОВСЬКОГО І ГЕЛДЕРА ТА ЇХНЄ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Юрій БОХОНОВ ✉
Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, Україна
yubochonoff@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3355-008X
Тетяна БОХОНОВА
Київський природничо-науковий ліцей № 145, Україна
bohonova@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-8186-5238

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Класичним нерівностям присвячена різноманітна математична література. Нерівності Коші-Буняковського та Гелдера лежать в основі геометрії унітарних та нормованих просторів. У статті розглянуто узагальнення цих конструкцій – полілінійні форми і нерівності для них. Зміст узагальнених нерівностей полягає в оцінці полілінійної форми від системи векторів через їхні норми. Сама форма за зовнішнім виглядом є узагальненням скалярного добутку від довільної кількості векторів. Суттєво, що доведення проводяться елементарними методами, без використання засобів математичного аналізу. Відомо, що нерівність Коші-Буняковського є частинним випадком нерівності Гелдера. В роботі показується, що навпаки, другу з цих нерівностей може бути виведено з першої. Застосування доведених нерівностей до конкретних векторів дає одержання відомих результатів, зокрема, нерівності для середніх степеневих і деяких інших, які авторам не зустрічались у математичній літературі. Нерівності можуть бути перенесені на вектори з нескінченновимірних просторів послідовностей. Їх можна застосовувати також для пошуку екстремуму деяких функцій і при підготовці до олімпіад.*

Матеріали і методи. *Для доведення узагальненої нерівності Коші-Буняковського використано нерівність Коші для невід'ємних чисел, що є координатами векторів багатовимірного простору. При певному виборі таких векторів з цієї нерівності доводиться узагальнена нерівність Гелдера. Вибираючи вектори різноманітними способами, можна одержати різні змістовні нерівності.*

Результати. *Доведено узагальнені нерівності Коші-Буняковського, Гелдера, нерівність для середніх степеневих та деякі інші.*

Висновки. *Застосування узагальнених нерівностей Коші-Буняковського і Гелдера до різних систем векторів з невід'ємними координатами дає нерівності – як вже відомі, так і нові і досить змістовні. Їхнє доведення зводиться лише до вибору потрібної системи векторів. На цьому шляху вдається легко доводити нерівності, які можна зустріти на математичних олімпіадах.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *нерівність Коші-Буняковського; нерівність Гелдера; вектор; координати вектора; лінійний простір; норма; нерівність трикутника; середнє степеневе.*

THE INEQUALITIES OF CAUCHY-BUNIAKOVSKY AND HELDER AND THEIR GENERALIZATIONS

Yuriy BOKHONOV ✉
Kyiv Polytechnic Institute, Ukraine
yubochonoff@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3355-008X
Tetyana BOKHONOVA
Kyiv Natural Science Lyceum No. 145, Ukraine
bohonova@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-8186-5238

ABSTRACT

Formulation of the problem. *Various mathematical literature is devoted to classical inequalities. The Cauchy-Buniakowski and Helder inequalities are at the heart of the geometry of unitary and normed spaces. The article considers the generalization of these constructions - polylinear forms and inequalities for them. The content of generalized inequalities consists in estimating a polylinear form from a system of vectors through their norms. The form itself in appearance is a generalization of the scalar product of an arbitrary number of vectors. It is essential that the proofs are carried out by elementary methods, without using means of mathematical analysis. It is known that the Cauchy-Buniakowski inequality is a partial case of Helder's inequality. The paper shows that, on the contrary, the second of these inequalities can be derived from the first. The application of proven inequalities to specific vectors yields well-known results, in particular, inequalities for power averages and some others that the authors did not encounter in the mathematical literature. Inequalities can be transferred to vectors from infinite-dimensional sequence spaces. They can also be used to find the extremum of some functions and in preparation for the Olympics.*

Materials and methods*. To prove the generalized Cauchy-Buniakovsky inequality, the Cauchy inequality was used for non-negative numbers, which are the coordinates of vectors in a multidimensional space. With a certain choice of such vectors, the generalized Helder inequality is proved from this inequality. By choosing vectors in various ways, you can get different meaningful inequalities.*

The results. *The generalized Cauchy-Buniakovsky, Helder inequalities, the inequality for power averages, and some others are proven.*

Conclusions. *The application of the generalized Cauchy-Buniakovsky and Helder inequalities to various systems of vectors with non-negative coordinates gives inequalities - both well-known and new and quite meaningful. Their proof is reduced only to the selection of the desired system of vectors. In this way, it is possible to easily prove inequalities that can be found at mathematical Olympiads.*

KEYWORDS: *Cauchy-Buniakovsky inequality; Helder's inequality; vector; vector coordinates; linear space; norm; triangle inequality; power average.*

ВСТУП

I. Постановка задачі

Нехай $A_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}), k = 1, \dots, m$ – система векторів лінійного простору $\mathbb{R}^n$. Введемо норму в цьому просторі: $\|A_k\| = \sqrt[m]{\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|^m}$. Розглянемо допоміжні вектори $X_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}), k = 1, \dots, m$, де $x_{kj} = \frac{a_{kj}}{\|A_k\|} = \frac{a_{kj}}{\sqrt[m]{\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|^m}}$. З їхнього означення випливає, що $\|X_k\| = \sqrt[m]{\sum_{j=1}^{n} |x_{kj}|^m} = 1$.

Для цитування:
Бохонов Ю., Бохонова Т. Нерівності Коші-Буняковського і Гелдера та їхнє узагальнення. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 2. С. 11-14. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-2-002
Бохонов, Ю., & Бохонова, Т. (2023). Нерівності Коші-Буняковського і Гелдера та їхнє узагальнення. *Фізико-математична освіта*, 38(2), 11-14. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-002

For citation:
Bokhonov, Yu., & Bokhonova, T. (2023). The inequalities of Cauchy-Buniakovsky and Helder and their generalizations. *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 11-14. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-002
Bokhonov, Yu., & Bokhonova, T. (2023). Nerivnosti Koshi-Buniakovskoho i Heldera ta yikhnie uzahalnennia [The inequalities of Cauchy-Buniakovsky and Helder and their generalizations]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 11-14. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-002

✉ Corresponding author

Далі будемо вважати всі a_{kj} невід'ємними, інакше будемо записувати нерівності для модулів. Задача полягає в узагальненні двох класичних нерівностей для $m \geq 2$ векторів:

1) узагальнена нерівність Коші-Буняковського:

$$a_{11}a_{21}...a_{m1} + ... + a_{1n}a_{2n}...a_{mn} \leq \sqrt[m]{\left(a_{11}^m + ... + a_{1n}^m\right)}...\sqrt[m]{\left(a_{m1}^m + ... + a_{mn}^m\right)}\ ; \tag{1}$$

2) узагальнена нерівність Гельдера:

$$\forall p_k > 1, k = 1,...,l,\ \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_l} = 1$$

$$a_{11}a_{21}...a_{l1} + ... + a_{1n}a_{2n}...a_{ln} \leq \left(a_{11}^{p_1} + ... + a_{1n}^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}...\left(a_{l1}^{p_l} + ... + a_{ln}^{p_l}\right)^{\frac{1}{p_l}}.$$

В обох нерівностях рівності мають місце тоді і лише тоді, коли вектори колінеарні.

Нерівності Коші-Буняковського, Гелдера та деякі інші викладено, напр., в [2, 3]. Багато класичних нерівностей в сучасній літературі міститься в цитованих роботах [1-7]. При цьому для доведення в більшості застосовуються методи математичного аналізу.

II. Доведення нерівностей

Для кожного $j = 1,...,n$ утворимо добуток $a_{1j}a_{2j}...a_{mj} = \|A_1\|...\|A_m\| x_{1j}x_{2j}...x_{mj}$ j-их координат цих векторів та скористаємось нерівністю Коші для $x_{1j}, x_{2j},..., x_{mj} \geq 0$:

$$a_{1j}a_{2j}...a_{mj} = \|A_1\|...\|A_m\| x_{1j}x_{2j}...x_{mj} \leq \|A_1\|...\|A_m\| \frac{x_{1j}^m + x_{2j}^m ... + x_{mj}^m}{m}.$$

Як відомо, рівність в нерівності Коші має місце тоді і тільки тоді, коли всі множники рівні між собою: $x_{1j} = x_{2j} = ... = x_{mj}$ $(j = 1,...,n)$. Це означає, що при кожному j має місце: $\frac{a_{1j}}{\|A_1\|} = \frac{a_{2j}}{\|A_2\|} = ... = \frac{a_{mj}}{\|A_m\|}$. Значить, координати векторів $A_k, k = 1,...,m$ пропорційні, тобто, ці вектори колінеарні.

Додаючи всі такі нерівності для $j = 1,...,n$, будемо мати

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{2j}...a_{mj} = a_{11}a_{21}...a_{m1} + ... + a_{1n}a_{2n}...a_{mn} \leq$$

$$\leq \|A_1\|...\|A_m\| \left(\frac{x_{11}^m + x_{21}^m ... + x_{m1}^m}{m} + ... + \frac{x_{1n}^m + x_{2n}^m ... + x_{mn}^m}{m} \right) =$$

$$= \|A_1\|...\|A_m\| \left(\frac{x_{11}{}^m + x_{12}{}^m ... + x_{1n}{}^m}{m} + ... + \frac{x_{m1}{}^m + x_{m2}{}^m ... + x_{mn}{}^m}{m} \right) = \|A_1\|...\|A_m\| = \sqrt[m]{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^m}...\sqrt[m]{\sum_{j=1}^{n} a_{mj}^m}.$$

Остаточно, одержимо узагальнену нерівність Коші-Буняковського:

$$a_{11}a_{21}...a_{m1} + ... + a_{1n}a_{2n}...a_{mn} \leq \sqrt[m]{\left(a_{11}^m + ... + a_{1n}^m\right)}...\sqrt[m]{\left(a_{m1}^m + ... + a_{mn}^m\right)}$$

З цієї нерівності випливає:

$$\left(a_{11}a_{21}...a_{m1} + ... + a_{1n}a_{2n}...a_{mn}\right)^m \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^m\right)...\left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj}^m\right) \tag{2}$$

або у компактному вигляді

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} a_{kj}\right)^m \leq \prod_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^m.$$

Варто повторити, що рівність в цій нерівності має місце тоді і тільки тоді, коли координати векторів $A_k, k = 1,...,m$ пропорційні, тобто, вектори колінеарні.

Доведення узагальненої нерівності Гелдера.

Розглянемо $q_l \in \mathbb{N}$ однакових векторів $\left((a_{11})^{\frac{1}{q_l}}, (a_{12})^{\frac{1}{q_l}}, ..., (a_{1n})^{\frac{1}{q_l}} \right)$, $q_l \in \mathbb{N}$. Позначимо: $q_1 + ... + q_l = m$.

Застосовуючи до цих векторів доведену узагальнену нерівність Коші-Буняковського, одержимо:

$$(a_{11})^{\frac{1}{q_1}}...(a_{11})^{\frac{1}{q_1}}...(a_{l1})^{\frac{1}{q_l}}...(a_{l1})^{\frac{1}{q_l}} + ... + (a_{1n})^{\frac{1}{q_1}}...(a_{1n})^{\frac{1}{q_1}}...(a_{ln})^{\frac{1}{q_l}}...(a_{ln})^{\frac{1}{q_l}} \leq$$

$$\leq \left(a_{11}^{\frac{m}{q_1}} + ... + a_{1n}^{\frac{m}{q_1}} \right)^{\frac{q_1}{m}} ... \left(a_{l1}^{\frac{m}{q_l}} + ... + a_{ln}^{\frac{m}{q_l}} \right)^{\frac{q_l}{m}}.$$

За умови ліва частина нерівності дорівнює $a_{11}a_{21}...a_{l1} + ... + a_{1n}a_{2n}...a_{ln}$.

Введемо позначення: $p_1 = \frac{m}{q_1} > 1, ..., p_l = \frac{m}{q_l} > 1$. Звідси

$$\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_l} = \frac{q_1}{m} + ... + \frac{q_l}{m} = 1.$$

Це дає змогу переписати нерівність у вигляді

$$a_{11}a_{21}...a_{l1}+...+a_{1n}a_{2n}...a_{ln}\le\left(a_{11}^{p_1}+...+a_{1n}^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}...\left(a_{l1}^{p_l}+...+a_{ln}^{p_l}\right)^{\frac{1}{p_l}}.$$

Одержимо деякі наслідки з доведених нерівностей.

III. Приклади

Приклад 1. m=2. Застосуємо нерівність трикутника а потім доведену нерівність (2) для векторів $(a_1,...,a_n)$ і $(b_1,...,b_n)$ з необов'язково невід'ємними координатами:

$$|a_1b_1+\ldots+a_nb_n|\le|a_1||b_1|+\ldots+|a_n||b_n|\le\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n b_j^2}.$$

Це відома нерівність Коші-Буняковського і, як відомо, рівність в цій нерівності має місце тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні, тобто, координати пропорційні.

Приклад 2. Застосуємо нерівність (2) для k однакових векторів $(a_1,...,a_n)$ і для $m-k, m>k$ однакових векторів $(b_1,...,b_n)$:

$$\left(a_1^kb_1^{m-k}+...+a_n^kb_n^{m-k}\right)^m\le\left(a_1^m+...+a_n^m\right)^k\left(b_1^m+...+b_n^m\right)^{m-k} \tag{3}$$

Приклад 3. Застосуємо нерівність (3) для k однакових векторів $(a_1,...,a_n)$ і для $m-k, m>k$ однакових векторів $(1,\ldots,1)$ (тобто, усі $b_j=1, j=1,...,n$). Одержимо відому нерівність

$$\left(a_1^k+...+a_n^k\right)^m\le n^{m-k}\left(a_1^m+...+a_n^m\right)^k. \tag{4}$$

Зокрема, при k = 1

$$\left(a_1+...+a_n\right)^m\le n^{m-1}\left(a_1^m+...+a_n^m\right). \tag{5}$$

З (4) випливає:

$$\left(\frac{a_1^k+...+a_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}\le\left(\frac{a_1^m+...+a_n^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{6}$$

Вирази зліва і справа називаються середніми степеневими відповідно степенів k і m. Отже, доведено відому нерівність для середніх степеневих невід'ємних чисел при $m>k$.

Приклад 4. Застосуємо нерівність (2) для k однакових векторів $(a_1,...,a_n)$ і для $m-k, m>k$ однакових векторів $(a_n,...,a_1)$. Зрозуміло, що їхні норми однакові. Маємо:

$$a_1^ka_n^{m-k}+...+a_n^ka_1^{m-k}\le a_1^m+...+a_n^m.$$

Зауваження. У другому векторі можна взяти будь-яку іншу перестановку координат першого вектора.

Приклад 5. Нехай $m=m_1+m_2$. Застосуємо нерівність (3) для m_1 однакових векторів $(a_1,...,a_n)$ і для m_2 однакових векторів $\left(\frac{1}{a_1},...,\frac{1}{a_n}\right)$. При цьому $b_j=\frac{1}{a_j}, j=1,...,n$:

$$\left(a_1^{m_1-m_2}+...+a_n^{m_1-m_2}\right)^{m_1+m_2}\le\left(a_1^m+...+a_n^m\right)^{m_1}\left(\frac{1}{a_1^m}+...+\frac{1}{a_n^m}\right)^{m_2}.$$

Приклад 6. Застосуємо доведену нерівність (2) до системи векторів $(a_1,...,a_n)$, $(a_1^2,...,a_n^2)$,..., $(a_1^m,...,a_n^m)$:

$$\left(a_1^{\frac{m(m+1)}{2}}+...+a_n^{\frac{m(m+1)}{2}}\right)^m\le\left(a_1^n+...+a_n^n\right)\left(a_1^{2n}+...+a_n^{2n}\right)...\left(a_1^{mn}+...+a_n^{mn}\right).$$

Приклад 7. Нехай $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\left(0,\frac{\pi}{2^m}\right)$. Розглянемо вектори з додатними координатами:

$$\left(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,...,\cos\alpha_n\right),\ \left(\cos2\alpha_1,\cos2\alpha_2,...,\cos2\alpha_n\right),...,\ \left(\cos2^{m-1}\alpha_1,\cos2^{m-1}\alpha_2,...,\cos2^{m-1}\alpha_n\right)$$

І застосуємо до них нерівність (2):

$$\left(\cos\alpha_1\cos2\alpha_1\cos2^{m-1}\alpha_1+\cos\alpha_2\cos2\alpha_2\cos2^{m-1}\alpha_2+...+\cos\alpha_n\cos2\alpha_n\cos2^{m-1}\alpha_n\right)^m\le$$
$$\le\left(\cos^m\alpha_1+\cos^m\alpha_2+...+\cos^m\alpha_n\right)\left(\cos^m2\alpha_1+\cos^m2\alpha_2+...+\cos^m2\alpha_n\right)\times$$
$$\times...\times\left(\cos^m2^{m-1}\alpha_1+\cos^m2^{m-1}\alpha_2+...+\cos^m2^{m-1}\alpha_n\right).$$

Використовуючи відому формулу $\cos\varphi\cos2\varphi\ldots\cos2^{m-1}\varphi=\frac{\sin2^m\varphi}{2^m\sin\varphi}, \varphi\ne\pi k, k\in\mathbb{Z}$, перепишемо одержану нерівність у наступному вигляді:

$$\left(\frac{\sin2^m\alpha_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\sin2^m\alpha_2}{\sin\alpha_2}+...+\frac{\sin2^m\alpha_n}{\sin\alpha_n}\right)^m\le$$

$$\le 2^{m^2}\left(\cos^m\alpha_1+\cos^m\alpha_2+...+\cos^m\alpha_n\right)\left(\cos^m 2\alpha_1+\cos^m 2\alpha_2+...+\cos^m 2\alpha_n\right)\times$$
$$\times...\times\left(\cos^m 2^{m-1}\alpha_1+\cos^m 2^{m-1}\alpha_2+...+\cos^m 2^{m-1}\alpha_n\right).$$

ОБГОВОРЕННЯ

Доведені нерівності мають важливе значення самі по собі, але також є цікавими наслідки з них. По-перше, за допомогою узагальненої нерівності Коші-Буняковського легко доводиться класична нерівність для середніх степеневих. По-друге, вибираючи різні значення для координат векторів $A_k=\left(a_{k1},a_{k2},...,a_{kn}\right),k=1,...,m$, можна одержати різні цікаві нерівності. В такий спосіб авторам вдавалось легко розв'язати деякі олімпіадні задачі.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Серед подальших можливих результатів можливе розповсюдження доведених нерівностей на нескінченновимірні простори послідовностей. Цікаво було б довести аналогічні нерівності для інтегралів методами математичного аналізу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Aldaz, J. M., Barza, S., Fujii, M., & Moslehian, M. S. (2015). Advances in Operator Cauchy—Schwarz inequalities and their reverses. *Annals of Functional Analysis, 6* (3), 275–295, https://doi.org/10.15352/afa/06-3-20.
2. Bokhonov, Yu.Ye. (2021). Математичний аналіз: Диференціальне числення функцій однієї змінної. *КПІ.* Навч. посібник. *Kyiv: KPI named after Igor Sikorskiy.* https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42337
3. Mitrinovic, D. S., & Pecaric, J. E. (1993). *Springer Science+Bisiness Media Dordrecht*, 83-99. https://books.google.ru/books?id=A0XwCAAAQBAJ&pg=PA83&hl=ru&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false
4. Steele, J.M. (2004). The Cauchy_Schwarz Master Class. *Cambridge University Press.*
5. Бохонов, Ю.Є. (2022). Узагальнення нерівностей Коші-Буняковського та Гелдера. Наука в контексті глобальної трансформації суспільства. Матеріали науково-практичної конференції (м. Полтава, 26-27 серпня 2022 р.), *Одеса: Видавництво «Молодий вчений».* https://molodyivchenyi.ua/omp/index.php/conference/catalog/book/8
6. Журавська, Г.В., & Шраменоко, В.М. (2010). Нерівності: Методичні вказівки до курсів лінійної алгебри та математичного аналізу *КПІ.* https://mph.kpi.ua/assets/img/Shramenko-V.M/neravenstva1.pdf
7. Мартиненко, О.В., & Чкана Я.О. (2017). Використання методів математичного аналізу для доведення нерівностей. *Актуальні питання природничо-математичної освіти.* 1(9), 2017 35–44. http://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/0564/1362/2/APPMO_N9_2017.pdf

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Aldaz, J. M., Barza, S., Fujii, M., & Moslehian, M. S. (2015). Advances in Operator Cauchy—Schwarz inequalities and their reverses. *Annals of Functional Analysis, 6* (3), 275–295, https://doi.org/10.15352/afa/06-3-20.
2. Bokhonov, Yu.Ye. (2021). Matematychnyy analiz: Dyferentsial'ne chyslennya funktsiy odniyeyi zminnoyi [Mathematical analysis: Differential calculus of functions of one variable]. *КПІ.* Tutorial. *Kyiv: KPI named after Igor Sikorskiy.* (In Ukrainian).
3. Mitrinovic, D. S., & Pecaric, J. E. (1993). *Springer Science+Bisiness Media Dordrecht*, 83-99. https://books.google.ru/books?id=A0XwCAAAQBAJ&pg=PA83&hl=ru&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false
4. Steele, J.M. (2004). The Cauchy_Schwarz Master Class. *Cambridge University Press*.
5. Bokhonov, Yu.Ye. (2022). Uzahal'nennya nerivnostey Koshi-Bunyakovs'koho ta Heldera [Generalization of the Cauchy-Buniakowski and Helder inequalities]. *Science in the context of global transformation of society. Materials of the scientific and practical conference* (Poltava, August 26-27, 2022), Odesa: "Young Scientist" Publishing House. https://molodyivchenyi.ua/omp/index.php/conference/catalog/book/8 (In Ukrainian).
6. Zhuravs'ka, H.V., & Shramenoko, V.M. (2010). Nerivnosti: Metodychni vkazivky do kursiv liniynoyi alhebry ta matematychnoho analizu [Inequalities: Guidelines for Linear Algebra and Mathematical Analysis Courses.]. *K.: KPI named after Igor Sikorskiy*. https://mph.kpi.ua/assets/img/Shramenko-V.M/neravenstva1.pdf (In Ukrainian).
7. Martynenko, O. V., & Chkana, Ya. O. (2017). Vykorystannya metodiv matematychnoho analizu dlya dovedennya nerivnostey [Using methods of mathematical analysis to prove inequalities]. *Current issues of science and mathematics education, 1*(9), 35–44. http://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/0564/1362/2/APPMO_N9_2017.pdf (In Ukrainian).