Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X
DOI: 10.31110/2413-1571
https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/2413-1571-2022-035-3-008 УДК 378.147

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТА ІДЕЙ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ: НЕОБХІДНІСТЬ УСВІДОМЛЕННЯ МАЙБУТНІМИ ВЧИТЕЛЯМИ МАТЕМАТИКИ

Тетяна ЛУКАШОВА
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Суми, Україна
tanya.lukashova2015@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1465-9530
Марина ДРУШЛЯК ✉
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Суми, Україна
marydru@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0002-9648-2248
Інна ШИШЕНКО
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Суми, Україна
shiinna@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-1026-5315
Олена ПОКІДЬКО
Прилуцька гімназія №1 ім. Георгія Вороного, Прилуки, Україна
helen.pokidko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1363-6326

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Курс алгебри і теорії чисел упродовж багатьох десятиліть займає провідне місце у системі підготовки майбутніх вчителів математики. Зважаючи на його важливість та тісні взаємозв'язки з шкільним курсом алгебри та змістом цілої низки факультативних курсів та гуртків з математики, в системі підготовки майбутніх учителів математики важливо акцентувати увагу на усвідомлення паралелей між ідеями та категоріями вищої алгебри та шкільного курсу математики.*

Матеріали і методи. *Системний аналіз наукової, навчальної та методичної літератури; порівняння та синтез теоретичних положень; узагальнення власного педагогічного досвіду.*

Результати. *Система підготовки майбутніх учителів математики має бути побудована так, щоб акцентувати увагу на використанні ідей та методів теорії чисел як у шкільному курсі алгебри, так і у змісті шкільних математичних гуртків. Зазначена проблема може бути вирішена у кількох напрямках: при вивченні відповідних тем та методів в курсі алгебри і теорії чисел; в рамках курсів за вибором («Вибрані питання олімпіадної математики», «Вибрані питання теорії чисел» тощо); на заняттях математичного гуртка при вивченні відповідних тем; при реалізації міжпредметних зв'язків (наприклад, з курсом дискретної математики при вивченні правил комбінаторики, методу включень та виключень тощо).*

Здійснено порівняльний аналіз змісту навчальної програми курсу «Алгебра і теорія чисел» за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика) та Програми для класів з поглибленим вивченням, що стосуються питань теорії чисел, а також методи, які при цьому використовуються. Розглянуто деякі аспекти застосування властивостей конгруенцій при розв'язуванні задач теорії чисел: доведення подільності, знаходження остачі від ділення, встановлення умов простоти чисел, розв'язування невизначених рівнянь у цілих числах тощо.

APPLICATION OF METHODS AND IDEAS OF NUMBER THEORY IN THE SCHOOL COURSE OF ALGEBRA: THE NEED FOR AWARENESS BY PRE-SERVICE TEACHERS MATHEMATICS

Tetiana LUKASHOVA
Makarenko Sumy State Pedagogical University, Sumy, Ukraine
tanya.lukashova2015@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1465-9530
Marina DRUSHLYAK ✉
Makarenko Sumy State Pedagogical University, Sumy, Ukraine
marydru@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0002-9648-2248
Inna SHYSHENKO
Makarenko Sumy State Pedagogical University, Sumy, Ukraine
shiinna@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-1026-5315
Olena POKIDKO
George Voronyi Pryluky gymnasium №1, Pryluky, Ukraine
helen.pokidko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1363-6326

ABSTRACT

Formulation of the problem. *The course of algebra and number theory has been at the forefront of pre-service mathematics teachers' training for many decades. Given its importance and close relationship with the algebra school course and the content of several electives and math classes, it is important to focus on understanding the parallels between higher algebra ideas and categories and the math school course in the pre-service mathematics teachers' training.*

Materials and methods. *System analysis of scientific, educational, and methodical literature; comparison and synthesis of theoretical positions; generalization of own pedagogical experience.*

Results. *The system of pre-service mathematics teachers' training should focus on the use of ideas and methods of number theory in the school course algebra, and the content of school math classes. This problem can be solved in several ways: in the study of relevant topics and methods in the course of algebra and number theory; in the framework of elective courses ("Selected issues of Olympic mathematics", "Selected issues of number theory", etc.); in the classes of the mathematical circle in the study of relevant topics; in the implementation of interdisciplinary links (for example, with the course of discrete mathematics in the study of the rules of combinatorics, the method of inclusion and exclusion, etc.).*

A comparative analysis of the content of the curriculum of the course "Algebra and Number Theory" in the specialty 014 Secondary Education (Mathematics) and the curriculum for classes with in-depth study on issues of number theory, as well as the methods used. Some aspects of the application of congruence properties in solving problems of number theory are considered: proving divisibility, finding the remainder of the division, establishing conditions for simplicity of numbers, solving indefinite equations in integers, etc.

Conclusions. *The proposed system of exercises can be implemented both in classes on algebra and number theory in the study of numerical congruences and their properties, and in the course "Selected issues of Olympic mathematics" and meetings of the mathematical circle in the*

Для цитування:
Лукашова Т., Друшляк М., Шишенко І., Покідько О. Застосування методів та ідей теорії чисел в шкільному курсі алгебри: необхідність усвідомлення майбутніми вчителями математики. *Фізико-математична освіта*, 2022. Том 35. № 3. С. 59-64. DOI: 10.31110/2413-1571-2022-035-3-008
Лукашова, Т., Друшляк, М., Шишенко, І., & Покідько, О. (2022). Застосування методів та ідей теорії чисел в шкільному курсі алгебри: необхідність усвідомлення майбутніми вчителями математики. *Фізико-математична освіта*, 35(3), 59-64. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-035-3-008

For citation:
Lukashova, T., Drushlyak, M., Shyshenko, I., & Pokidko, O. (2022). Application of methods and ideas of number theory in the school course of algebra: the need for awareness by pre-service teachers mathematics. *Physical and Mathematical Education*, 35(3), 59-64. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-035-3-008
Lukashova, T., Drushlyak, M., Shyshenko, I., & Pokidko, O. (2022). Zastosuvannia metodiv ta idei teorii chysel v shkilnomu kursi alhebry: neobkhidnist usvidomlennia maibutnimy vchyteliamy matematyky [Application of methods and ideas of number theory in the school course of algebra: the need for awareness by pre-service teachers mathematics]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 35(3), 59-64. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-035-3-008

✉ Corresponding author

Висновки. *Запропонована система вправ може бути реалізована як на заняттях з алгебри і теорії чисел при вивченні числових конгруенцій та їх властивостей, так і на заняттях курсу «Вибрані питання олімпіадної математики» і засіданнях математичного гуртка при вивченні застосувань теорії чисел до розв'язування завдань евристичного характеру, що сприяє усвідомленню майбутніми вчителями математики зв'язків між курсом алгебри і теорії чисел та шкільним курсом алгебри.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: майбутні вчителів математики, підготовка майбутніх учителів математики, алгебра, теорія чисел, шкільний курс алгебри.

study of applications of number theory to solve heuristic problems, which helps pre-service mathematics teachers to understand the relations between the course of algebra and number theory and the school course of algebra.

KEYWORDS: pre-service mathematics teachers, pre-service mathematics teachers' training, algebra, number theory, school course of algebra.

ВСТУП

Постановка проблеми. Курс алгебри і теорії чисел упродовж багатьох десятиліть займає провідне місце у системі підготовки майбутніх вчителів математики. На його важливості та тісних взаємозв'язках із шкільним курсом алгебри та змістом цілої низки факультативних курсів та гуртків з математики наголошують як зарубіжні (Bair & Rich, 2011; Mendoza Álvarez & White, 2018; Qiu & Liu, 2010; Zazkis, 2007; Zazkis & Campbell, 1996), так і вітчизняні науковці (Лукашова & Друшляк, 2022; Требенко & Требенко, 2010; Требенко, 2012; Требенко & Требенко, 2017). Зокрема, американське математичне товариство рекомендує, щоб курси вищої алгебри у системі підготовки майбутніх учителів математики були зорієнтовані за змістом на шкільний курс математики, що, з одного боку, буде мотивувати студентів на вивчення вказаних курсів, а, з іншого, – сприяти розумінню наукових основ шкільного курсу алгебри. Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS) у доповіді «The Mathematical Education of Teachers (MET)» зазначали, що більшість майбутніх учителів математики не усвідомлюють зв'язків між абстрактною алгеброю чи теорією чисел і темами шкільної алгебри (https://www.cbmsweb.org/archive/MET2/met2.pdf). Цю ситуацію у системі професійної підготовки майбутніх учителів математики підтверджують також дослідження T. Cofer (2015) та E. Bukova-Güzel, I. Ugurel, Z. Özgür & S. Kula (2010).

Зважаючи на світові та вітчизняні тенденції важливості усвідомлення зв'язків між ідеями та категоріями вищої алгебри та шкільного курсу математики майбутніми вчителями математики (наприклад, встановлення зв'язків між поняттями теорії груп (Pramasdyahsari et al., 2020) чи абстрактної алгебри (Suominen, 2018) та поняттями шкільного курсу математики, автори зосередили власні пошуки у напрямку з'ясування моментів використання ідей та методів теорії чисел як у шкільному курсі алгебри, так і в змісті шкільних математичних гуртків. Тому **метою** даної статті є порівняльний аналіз змісту нормативного курсу «Алгебра і теорія чисел», що є складовою системи підготовки майбутніх вчителів математики, та програми з математики для закладів загальної середньої освіти шкіл та класів з поглибленим вивченням математики саме з питань теорії чисел, а також демонстрація можливостей та застосувань окремих методів теорії чисел як в курсі вищої алгебри, так і в шкільному курсі математики.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення мети були використані методи теоретичного рівня наукового пізнання: аналіз наукової літератури, синтез, формалізація наукових джерел, опис, зіставлення, узагальнення власного досвіду.

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Курс алгебри і теорії чисел є одним з найважливіших у системі професійної підготовки майбутніх вчителів математики. Це пов'язано, перш за все з тим, що більшість теорій, які складають зміст даного курсу, мають прямий зв'язок зі шкільним курсом математики (зокрема, це теорія подільності та теорія конгруенцій, теорії многочленів від однієї та кількох змінних тощо). Вивчення ідей та методів курсу алгебри і теорії чисел забезпечує необхідну теоретичну та практичну підготовку майбутнього вчителя математики та сприяє розумінню наукових основ шкільного курсу математики.

Значна увага в курсі алгебри і теорії чисел традиційно приділяється питанням класичної теорії чисел, більшість тем якої дублюються на елементарному рівні у шкільному курсі математики. Наприклад, теми «Подільність цілих чисел», «Ділення цілих чисел з остачею», «Найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне цілих чисел» представлені в програмах з математики для 6 класу ЗЗСО та 8 класу для класів з поглибленим вивченням математики. Без ґрунтовного оволодіння цим навчальним матеріалом неможливим є вивчення дій над дробовими числами, насамперед, зведення чисел до спільного знаменника. З іншого боку, змістове наповнення тем «Подільність цілих чисел», «Ділення цілих чисел з остачею», «Числові функції» та «Системні числа» лежать в основі цілої низки програм факультативних курсів та математичних гуртків (зокрема, це теми «Ціла і дробова частини числа», «Алгоритм Евкліда», «Діофантові рівняння», «Системи числення» тощо), а відповідні задачі широко використовуються на математичних олімпіадах, конкурсах і турнірах різних рівнів. Нарешті, під час вивчення теорії чисел студенти вивчають та відпрацьовують такі потужні загально математичні методи як метод математичної індукції, метод остач і метод конгруенцій, метод включень та виключень, які широко застосовуються не лише в теорії чисел, а й інших фундаментальних математичних курсах та основах інформатики.

У таблиці 1 наведено порівняльний аналіз змісту навчальної програми курсу «Алгебра і теорія чисел» за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика) Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка та Програми для класів з поглибленим вивченням математики (авторський колектив М.І.Бурда, М.Ф.Городній, Д.А.Номіровський, А.В.Паньков, Н.А.Тарасенкова, М.В.Чемерис, В.О.Швець, М.С.Якір), що стосуються питань теорії чисел, а також методи, які при цьому використовуються (в квадратних дужках вказано поняття та методи, що не є обов'язковими до вивчення) (https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf).

Таким чином, змістове наповнення і методи, що використовуються для розв'язування задач та доведення ключових тверджень з тем «Теорія подільності в кільці цілих чисел» та «Основи теорії подільності» в навчальній програмі з алгебри і теорії чисел та шкільній програмі для класів з поглибленим вивченням математики, є майже ідентичним. Проте, зрозуміло, що в курсі алгебри і теорії чисел відповідні поняття і твердження вивчаються ґрунтовніше та на більш глибокому рівні. З теорії конгруенцій у шкільну програму для класів з поглибленим вивченням математики включено поняття числової конгруенції, властивості конгруенцій за даним модулем та їх застосування до встановлення ознак подільності (метод Паскаля) та знаходження остач від ділення.

Таблиця 1

Змістове наповнення теоретико-числової лінії в навчальній програмі курсу «Алгебра і теорія чисел» та шкільній програмі для класів з поглибленим вивченням математики (8-9 класи)

Зміст навчальна програма дисципліни «Алгебра і теорія чисел»	Зміст програми для класів з поглибленим вивченням математики (8-9 класи)
Теорія подільності у кільці цілих чисел	**Основи теорії подільності**
Подільність цілих чисел. Теорема про ділення з остачею	Подільність цілих чисел. Основні властивості подільності. Ділення з остачею.
Найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне. Алгоритм Евкліда.	Найбільший спільний дільник (НСД) і найменше спільне кратне (НСК). Взаємно прості числа. Алгоритм Евкліда
Прості і складені числа. Теорема Евкліда. Основна теорема арифметики. Канонічний розклад числа. Розподіл простих чисел у натуральному ряді.	Прості й складені числа. Основна теорема арифметики. [Числа-близнюки. Досконалі числа. Прості числа Мерсенна і Ферма. Мала теорема Ферма]
Числові функції. Ціла і дробова частини числа. Мультиплікативні функції. Сума та кількість дільників натурального числа. Функція Ейлера.	–
Системні числа	–
Основні методи	
метод математичної індукції метод остач метод послідовного ділення (алгоритм Евкліда) [метод нескінченного спуску]	
Теорія конгруенцій у кільці цілих чисел	
Числові конгруенції та їх застосування до встановлення ознак подільності на задане число, знаходження остач	Конгруенції за модулем. Ознаки подільності на 3, 9, 11, 2^n, 5^n, $n \in N$.
Конгруенції з невідомою величиною	–
Показник числа та класу лишків за даним модулем. Індекси	
Основні методи	
застосування властивостей конгруенцій	

Слід зазначити, що тема «Основи теорії подільності» є однією з найскладніших для вивчення у 8 класі та потребує, з одного боку, володіння цілою низкою загально математичних та спеціальних методів теорії чисел, що дозволяють розв'язувати задачі за певним алгоритмом, а з іншого – уміння мислити нестандартно та виходити за рамки готових шаблонів. Згідно з програмними вимогами в ході вивчення вказаної теми відбувається знайомство з ключовими поняттями і твердженнями теорії чисел (формулюється й доводяться основна теорема арифметики, теорема Евкліда про нескінченність множини простих чисел та мала теорема Ферма, формується поняття про розбиття множини натуральних чисел на класи еквівалентності за заданим модулем, детально розглядаються поняття, пов'язані з простими числами тощо), узагальнюються і розширюються отримані у попередніх класах знання з теорії подільності (в тому числі, доводяться деякі ознаки подільності), відбувається розширення математичного світогляду, ознайомлення з історією теорії чисел й дослідженнями в цій галузі.

У той же час, ситуація із рівнем студентів на математичних спеціальностях педагогічних ЗВО в останні роки є такою, що більшість зі студентів не навчалися у класах з поглибленим вивченням математики і знайомство з левовою частиною понять та методів теорії чисел, які використовуються для розв'язування задач як у курсі алгебри, так і в інших фундаментальних математичних курсах, відбувається лише в університеті під час вивчення курсу алгебри. Саме тому систему професійної підготовки майбутніх учителів математики з теорії чисел слід побудувати таким чином, щоб відбувалося багаторазове повторення основних понять і тверджень курсу та відпрацювання методів, які використовуються при розв'язуванні задач на подільність, знаходженні остач, розв'язуванні невизначених рівнянь в цілих числах тощо.

Зазначена проблема може бути вирішена у кількох напрямках:

– при вивченні відповідних тем та методів в курсі алгебри і теорії чисел,

– в рамках курсів за вибором («Вибрані питання олімпіадної математики», «Вибрані питання теорії чисел» тощо),

– на заняттях математичного гуртка при вивченні відповідних тем,

– при реалізації міжпредметних зв'язків (наприклад, з курсом дискретної математики при вивченні правил комбінаторики, методу включень та виключень тощо).

У якості прикладу наведемо систему завдань, що дозволяють продемонструвати можливості та відпрацювати один із найефективніших методів теорії чисел – застосування властивостей конгруенцій. Цей метод ґрунтується на означенні та властивостях конгруенцій і полягає у заміні числа (виразу) конгруентним йому за вибраним модулем.

Приклад 1. Довести подільність $(15^{3n+1}-22) \vdots 7, n \in N$.

Розв'язання

Замінимо числа, що входять у вираз $15^{3n+1}-22$, конгруентними по модулю 7:

$$15 \equiv 1(mod\,7) \Rightarrow\ 15^{3n} \equiv 1(mod\,7) \Rightarrow 15^{3n+1} \equiv 15 \equiv 1(mod\,7),$$

$$22 \equiv 1(mod\,7) \Rightarrow 15^{3n+1}-22 \equiv 1-1 \equiv 0(mod\,7).$$

Отже, вказаний вираз при діленні на 7 дає в остачі 0 і тому $(15^{3n+1}-22) \vdots 7$.

Приклад 2. Знайти остачу від ділення $13 \cdot 2^{100} + 2 \cdot 13^{200}$ на 3.

Розв'язання

Як відомо, довільне ціле число a конгруентне зі своєю остачею r від ділення на m: $a \equiv r\ (mod\ m)$. Замінимо числа конгруентними по модулю 3 та скористаємось властивостями конгруенцій:

$$2 \equiv -1(mod\,3) \Rightarrow\ 2^{100} \equiv (-1)^{100} \equiv 1(mod\,3) \Rightarrow\ 13 \cdot 2^{100} \equiv 13 \equiv 1(mod\,3);$$

$$13 \equiv 1(mod\,3) \Rightarrow\ 13^{200} \equiv 1^{200} \equiv 1(mod\,3) \Rightarrow\ 2 \cdot 13^{200} \equiv 2(mod\,3).$$

Отже, $13 \cdot 2^{100} + 2 \cdot 13^{200} \equiv 1 + 2 \equiv 0(mod\,3)$ і остача r від ділення на 3 дорівнює 0.

Зазначимо, що більш цікаві застосування властивостей конгруенцій та арифметичні розрахунки за модулем розглядалися в роботі (Лукашова & Марченко, 2018).

У багатьох випадках застосування властивостей конгруенцій передбачає розбиття множини натуральних (цілих) чисел на класи еквівалентності за певним модулем, що вибирається, виходячи з умов задачі, та доведенні твердження задачі для чисел кожного класу (у цьому випадку цей метод є узагальненням методу остач). Найпростіше розбиття такого роду – поділ чисел на парні та непарні (у даному випадку за модулем 2). Нерідко вдале розбиття є ключем до розв'язування цілої низки задач про цілі числа.

Приклад 3. При яких натуральних n вказані числа є одночасно простими:

1) $n + 1$ та $n + 12, n \in \mathbb{N}$;

2) $n, n + 2$ та $n + 16, n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання

1) Числа 1 та 12 мають різну парність, тому таку ж властивість мають числа $n + 1$ та $n + 12$. Отже, якесь із них парне і ділиться на 2. Серед простих чисел таку властивість має лише 2. Тому менше число дорівнює 2, тобто $n + 1 = 2$ і $n = 1$. При цьому $n + 12 = 13$ – просте число.

Слід зазначити, що при розв'язуванні було використане розбиття чисел на парні (ті, що при ділення на 2 дають остачу 0) і непарні (числа, що при діленні на 2 дають остачу 1), тобто розбиття за модулем 2.

2) У цьому випадку усі числа мають однакову парність і застосоване у попередньому пункті розбиття чисел на парні і непарні неефективне. Спробуємо використати модуль 3. Числа 0, 2 і 16 при діленні на 3 дають остачі 0, 2 та 1 відповідно, тобто, належать різним класам лишків по модулю 3. Тому задані числа $n,\ n + 2$ та $n + 16$ також мають ту ж властивість. З цього випливає, що одне з них кратне 3. Єдиним простим числом з такою властивістю є 3. Тому $n = 3$, відповідно $n + 2 = 5$ і $n + 16 = 19$.

Приклад 4. Знайти усі такі прості числа p, щоб число $8p^2 + 1$ також було простим.

Розв'язання

Розіб'ємо усі прості числа на класи: $p = 3k + 1, p = 3k + 2\ i\ p = 3k, k \in \mathbb{N}$.

Якщо $p = 3k + 1$, то $8p^2 + 1 = 8(3k + 1)^2 + 1 = 72k^2\ + 48k + 9 = 3(24k^2\ + 16k + 3) \vdots 3$ і тому є складеним числом.

Якщо $p = 3k + 2$, то $8p^2 + 1 = 8(3k + 2)^2 + 1 = 72k^2 + 96k + 33 = 3(24k^2 + 32k + 11) \vdots 3$ і також не є простим. Нехай $p = 3k$. Враховуючи, що p – просте, маємо $p = 3$. Тоді $8p^2 + 1 = 73$ – просте. Отже, єдиним число з вказаною властивістю є $p = 3$.

Зазначимо, що наведені міркування значно простіше записувати на мові конгруенцій:

якщо $p = 3k + 1$, то $p \equiv 1\ (mod\ 3)$ і $8p^2 + 1 \equiv 8 \cdot 1 + 1\ \equiv 0(mod\,3)$;

якщо $p = 3k + 2$, то $p \equiv 2\ (mod\ 3)$ і $8p^2 + 1 \equiv 8 \cdot 4 + 1\ \equiv 33 \equiv 0(mod\,3)$.

Тобто, в обох випадках при діленні на 3 маємо остачу 0 і числа не можуть бути простими (бо вони більші за 3).

Розглянемо тепер задачу, яка є опорною при розв'язуванні цілої низки найрізноманітніших прикладів (в тому числі, й олімпіадного характеру).

Приклад 5. Довести, що квадрати цілих чисел при діленні на 4 та на 3 дають в остачі лише 0 або 1.

Розв'язання

1) Доведемо твердження для 4. Якщо $n = 4k$ або $n = 4k + 2$, то $n^2 = 16k^2 \vdots 4$ і $n^2 = (4k + 2)^2 = 16k^2 + +16k + 4 \vdots 4$ відповідно. Тобто, квадрати чисел вказаного виду при діленні на 4 дають остачу 0.

Нехай $n = 4k + 1$ або $n = 4k + 3$. Тоді для чисел з першого класу маємо:

$$n^2 = (4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1.$$

Відповідно, для чисел з класу лишків $n = 4k + 3$: $n^2 = (4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 6k + 2) + 1$. Тобто, у цих випадках квадрати цілих чисел при діленні на 4 маємо остачу 1.

Зазначимо, що у даному випадку ефективним є поділ чисел на класи лишків по модулю 2 (тобто, на парні і непарні).

2) Доведемо тепер, що квадрати цілих чисел при діленні на 3 дають в остачі 0 або 1. Запишемо тепер класи лишків у вигляді конгруенцій за модулем 3:

$$n = 3k \Leftrightarrow\ n \equiv 0\ (mod\ 3), n = 3k + 1 \Leftrightarrow\ n \equiv 1\ (mod\ 3) \text{ і } n = 3k + 2 \Leftrightarrow\ n \equiv 2\ (mod\ 3).$$

Тоді якщо $n \equiv 0\ (mod\ 3)$, то $n^2 \equiv 0\ (mod\ 3)$, якщо $n \equiv 1\ (mod\ 3) \Rightarrow n^2 \equiv 1\ (mod\ 3)$ і якщо $n \equiv 2\ (mod\ 3) \Rightarrow n^2 \equiv 4 \equiv 1\ (mod\ 3)$. Отже, квадрати цілих чисел при діленні на 3 дають остачі 0 або 1.

З останнього прикладу випливає, зокрема, що квадрати цілих чисел при діленні на 3 не можуть давати остачу 2, а при діленні на 4 – остачі 2 та 3 відповідно.

Розглянемо тепер застосування доведеного у прикладі 5 твердження.

Приклад 6. Чи може дискримінант квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами дорівнювати 2022?

Розв'язання

Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c – цілі числа. Його дискримінант $D = b^2 - 4ac$. Нехай $b^2 - 4ac$=2022. Проаналізуємо остачі, які дають ліва і права частини останньої рівності по модулю 4:

$$4ac \equiv 0\ (mod\ 4),\ b^2 \equiv \left[\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.(mod\ 4), \text{ тобто } b^2 - 4ac \equiv \left[\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.(mod\ 4), \text{ в той же час } 2022 \equiv 2(mod\ 4).$$

Отже, остачі від ділення лівої і правої частин на 4 різні і тому вказана рівність неможлива. Тобто, дискримінант не може бути рівним 2022.

Приклад 7. Чи є число $1\underbrace{00\ldots0}_{2022}2022\underbrace{00\ldots0}_{2022}1$ точним квадратом?

Розв'язання

Відомо, що число при діленні на 3 дає ту ж саму остачу, що й сума його цифр. Сума цифр даного числа дорівнює 8. Тоді при діленні на 3 воно дає остачу 2 ($8 \equiv 2(mod\ 3)$). З іншого боку, число, що є точним квадратом, при діленні на 3 не може давати в остачі 2. Протиріччя. Отже, дане число не є точним квадратом.

Приклад 8. Розв'язати рівняння в цілих числах $20x^2 + 21y^2 = 2022$.

Розв'язання

Скористаємось тим же прийомом, що і в попередньому прикладі, та порівняємо остачі, які при діленні на 4 дають ліва і права частини рівняння:

$$20x^2 \equiv 0(mod\ 4), y^2 \equiv \left[\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.(mod4), \text{ тому } 21y^2 \equiv \left[\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.(mod4).$$

Отже, $20x^2 + 21y^2 \equiv \binom{1}{0}(mod4)$. З іншого боку, $2022 \equiv 2(mod\ 4)$. Отже, остачі при діленні на 4 лівої і правої частин рівняння різні. Це означає, що дане рівняння не має цілих розв'язків.

Приклад 9. Нехай P_n – добуток перших n простих чисел ($n > 1$). Довести, що числа $P_n - 1$ і $P_n + 1$ не можуть бути точними квадратами.

Розв'язання

1) Оскільки $n > 1$, то $P_n - 1 = 3k - 1 \equiv -1(mod3) \equiv 2(mod\ 3)$. Отже, за твердженням прикладу 5 дане число не є точним квадратом.
2) Оскільки P_n – добуток перших n простих чисел, то P_n $=2k$, причому $(k, 2) = 1$. Тоді $P_n \equiv 2(mod\ 4)$ і $P_n + 1 \equiv 3(mod\ 4)$. Отже, при діленні на 4 вираз $P_n + 1$ дає в остачі 3 і тому точним квадратом бути не може.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Майбутні вчителі математики повинні усвідомлювати зв'язки між змістом фундаментальних математичних курсів, зокрема, теорією чисел, та шкільним курсом математики. Через це система їх підготовки повинна акцентувати увагу на моментах використання ідей та методів теорії чисел як у шкільному курсі алгебри, так і в змісті шкільних математичних гуртків. Зазначена проблема може бути вирішена у кількох напрямках: при вивченні відповідних тем та методів в курсі алгебри і теорії чисел; в рамках курсів за вибором («Вибрані питання олімпіадної математики», «Вибрані питання теорії чисел» тощо); на заняттях математичного гуртка при вивченні відповідних тем; при реалізації міжпредметних зв'язків (наприклад, з курсом дискретної математики при вивченні правил комбінаторики, методу включень та виключень тощо).

Розглянуто деякі аспекти застосування властивостей конгруенцій при розв'язуванні задач теорії чисел: доведення подільності, знаходження остачі від ділення, встановлення умов простоти чисел, розв'язування рівнянь у цілих числах тощо. Окрім розглянутих прикладів, можна розширити область застосувань цього методу, зокрема, до встановлення ознак подільності за алгоритмом Паскаля, знаходження останньої цифри числа, перевірки правильності арифметичних дій, знаходження довжини періоду при перетворенні звичайного дробу у десятковий, розв'язування невизначених рівнянь у цілих числах.

Запропонована система вправ може бути реалізована як на заняттях з алгебри і теорії чисел при вивченні числових конгруенцій та їх властивостей, так і на заняттях курсу «Вибрані питання олімпіадної математики» і засіданнях математичного гуртка під час розгляду застосувань основних ідей та методів теорії чисел для розв'язування завдань евристичного характеру, що сприяє усвідомленню майбутніми вчителями математики зв'язків між курсом алгебри і теорії чисел та шкільним курсом алгебри.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bair, S.L., & Rich, B.S. (2011). Characterizing the Development of Specialized Mathematical Content Knowledge for Teaching in Algebraic Reasoning and Number Theory. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(4), 292-321. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.608345.
2. Bukova-Güzel, E., Ugurel, I., Özgür, Z., & Kula, S. (2010). The review of undergraduate courses aimed at developing subject matter knowledge by mathematics student teachers. *Procedia: Social and Behavioral Sciences*, 2, 2233-2238.
3. Cofer, T. (2015). Mathematical explanatory strategies employed by prospective secondary teachers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 63-90.
4. Mendoza Álvarez, J. A., & White, D. (2018). *Making Mathematical Connections Between Abstract Algebra and Secondary Mathematics Explicit: Implications for Curriculum, Research, and Faculty Professional Development*. In N. H. Wasserman (Ed.), Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers (pp. 175-185). Springer.

5. Pramasdyahsari, A.S., Setyawati, R.D., & Albab, I.U. (2020). How group theory and school mathematics are connected: an identification of mathematics in-service teachers. *Journal of Physics: Conference Series,* 1663, 012068. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1663/1/012068.
6. Qiu, S.Y., & Liu, L.A. (2010). On Teaching Reform of Elementary Number Theory in Colleges. *International Conference on Education and Sports Education*, Wuhan, China, 1, 246-248.
7. Suominen, A. L. (2018). *Abstract Algebra and Secondary School Mathematics Connections as Discussed by Mathematicians and Mathematics Educators*. In: N. H. Wasserman (Ed.), Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers. Springer, 149-173.
8. Zazkis, R. (2007). Number Theory in Mathematics Education: Queen and Servant. *SEMT 07: International Symposium Elementary Maths Teaching*, Prague, Czech Republic, 46-59.
9. Zazkis, R., & Campbell, S. (1996). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (5), 540-563. https://doi.org/10.2307/749847.
10. Лукашова, Т. Д., & Марченко К.В. (2018). Модульні арифметики. *Фізико-математична освіта,* 1(15), 246-251. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-015-1-046.
11. Лукашова, Т. Д., & Друшляк, М. Г. (2022). Про роль і місце курсу «Алгебра і теорія чисел» в системі підготовки майбутнього вчителя математики. *Фізико-математична освіта*, 33(1), 20-25. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-033-1-003.
12. Требенко, Д. (2012). Аналіз сучасної міжнародної практики конструювання курсу вищої алгебри. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини*, 1, 291-297.
13. Требенко, Д.Я, & Требенко, О.О. (2010). Теория чисел как необходимый компонент профессиональной подготовки будущего учителя математики. *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Філософія. Політологія*, 94-96, 158-161.
14. Требенко, Д.Я, & Требенко, О.О. (2017). Про структуру і зміст курсів «Лінійна алгебра» та «Алгебра і теорія чисел» для спеціальностей «Математика» і «Середня освіта (Математика)» в педагогічному університеті. *Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики,* 224.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bair, S.L., & Rich, B.S. (2011). Characterizing the Development of Specialized Mathematical Content Knowledge for Teaching in Algebraic Reasoning and Number Theory. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(4), 292-321. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.608345.
2. Bukova-Güzel, E., Ugurel, I., Özgür, Z., & Kula, S. (2010). The review of undergraduate courses aimed at developing subject matter knowledge by mathematics student teachers. *Procedia: Social and Behavioral Sciences*, 2, 2233-2238.
3. Cofer, T. (2015). Mathematical explanatory strategies employed by prospective secondary teachers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 63-90.
4. Mendoza Álvarez, J. A., & White, D. (2018). *Making Mathematical Connections Between Abstract Algebra and Secondary Mathematics Explicit: Implications for Curriculum, Research, and Faculty Professional Development*. In N. H. Wasserman (Ed.), Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers (pp. 175-185). Springer.
5. Pramasdyahsari, A.S., Setyawati, R.D., & Albab, I.U. (2020). How group theory and school mathematics are connected: an identification of mathematics in-service teachers. *Journal of Physics: Conference Series,* 1663, 012068. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1663/1/012068.
6. Qiu, S.Y., & Liu, L.A. (2010). On Teaching Reform of Elementary Number Theory in Colleges. *International Conference on Education and Sports Education*, Wuhan, China, 1, 246-248.
7. Suominen, A. L. (2018). *Abstract Algebra and Secondary School Mathematics Connections as Discussed by Mathematicians and Mathematics Educators*. In: N. H. Wasserman (Ed.), Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers. Springer, 149-173.
8. Zazkis, R. (2007). Number Theory in Mathematics Education: Queen and Servant. *SEMT 07: International Symposium Elementary Maths Teaching*, Prague, Czech Republic, 46-59.
9. Zazkis, R., & Campbell, S. (1996). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (5), 540-563. https://doi.org/10.2307/749847.
10. Lukashova, T., & Marchenko, K. (2018). Modulni aryfmetyky [Modular arithmetic]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical andMathematical Education*, 1(15), 246-251. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-015-1-046. (in Ukrainian).
11. Lukashova, T., & Drushlyak, M. (2022). Pro rol i mistse kursu «Alhebra i teoriia chysel» v systemi pidhotovky maibutnoho vchytelia matematyky[On the role and place of the course «Algebra and number theory» in the system of the pre-service mathematics teacher training]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical andMathematical Education*, 33(1), 20-25. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-033-1-003. (in Ukrainian).
12. Trebenko, D. (2012). Analiz suchasnoi mizhnarodnoi praktyky konstruiuvannia kursu vyshchoi alhebry [Analysis of modern international practice of constructing a course in higher algebra]. *Zbirnyk naukovykh prats Umanskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni Pavla Tychyny –Collection of scientific works of Uman State Pedagogical University named after Pavel Tychyna*, 1, 291-297. (in Ukrainian).
13. Trebenko, D. Ia, & Trebenko, O. O. (2010). Teoryia chysel kak neobkhodymыi komponent professyonalnoi podhotovky budushcheho uchytelia matematyky [Number theory as a necessary component of the training of future mathematics teachers]. *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu im. Tarasa Shevchenka. Filosofiia. Politolohiia–Bulletin of Kyiv National University. Taras Shevchenko. Philosophy. Politology*, 94-96, 158-161. (in Ukrainian).
14. Trebenko, D. Ia, & Trebenko, O. O. (2017). Pro strukturu i zmist kursiv «Liniina alhebra» ta «Alhebra i teoriia chysel» dlia spetsialnostei «Matematyka» i «Serednia osvita (Matematyka)» v pedahohichnomu universyteti [On the structure and content of the courses "Linear Algebra" and "Algebra and Number Theory" for the specialties "Mathematics" and "Secondary Education (Mathematics)" at the Pedagogical University]. *Aktualni problemy teorii i metodyky navchannia matematyky –Current issues of theory and methods of teaching mathematics*,224. (in Ukrainian).