Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571
https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/2413-1571-2022-034-2-009 УДК (378.147) [519.1+517.962]

ІНТЕГРАЦІЯ ЗМІСТУ ФАХОВИХ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ПРОФЕСІЙНІЙ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

INTEGRATION OF THE CONTENT OF PROFESSIONAL MATHEMATICAL DISCIPLINES IN THE PROFESSIONAL TRAINING OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS

Інна ШИШЕНКО ✉
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Суми, Україна
shiinna@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-1026-5315
Тетяна ЛУКАШОВА
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Суми, Україна
tanya.lukashova2015@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1465-9530

Inna SHYSHENKO ✉
Makarenko Sumy State Pedagogical University, Sumy, Ukraine
shiinna@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-1026-5315
Tetiana LUKASHOVA
Makarenko Sumy State Pedagogical University, Sumy, Ukraine
tanya.lukashova2015@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1465-9530

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Серед шляхів здійснення інтеграції змісту фахових математичних дисциплін у процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики слід окремо виділити фундаменталізацію навчальних курсів лінійна алгебра та аналітична геометрія, математичний аналіз та аналітична геометрія, диференціальна геометрія через розробку відповідних інтегрованих спецкурсів для майбутніх учителів математики.*

Матеріали і методи. *Системний аналіз наукової, навчальної та методичної літератури; порівняння та синтез теоретичних положень; узагальнення власного педагогічного досвіду та досвіду колег з інших закладів вищої освіти, деякі загально математичні та спеціальні методи різницевого числення.*

Результати. *У статті розглянуто можливості вивчення фахових математичних дисциплін в умовах інтеграції їх змісту у закладі вищої педагогічної освіти математичного профілю. Подання навчального матеріалу в різних навчальних курсах здебільшого не синхронізовано, оскільки їх викладають різні викладачі. Натомість майбутньому вчителю математики необхідно допомогти сформувати у власній свідомості певну систему зі змісту фахових дисциплін. Відповідно нами було розроблено спецсемінари для студентів фізико-математичного факультету ЗВО, в рамках яких кожен викладач намагається забезпечити міжпредметні зв'язки свого курсу з іншими. Узгодження змісту здійснювалося шляхом визначення споріднених і тотожних понять та їхніх дефініцій, послідовності введення первинних та залежних термінів, взаємних посилань у фахових математичних на зв'язки у навчальному матеріалі тощо.*

Висновки. *Формування знаннєвої бази навчання та інших складників системи навчання з урахуванням міждисциплінарних зв'язків, гармонізації змісту навчання та синхронізації процесу навчання в часі можливо реалізувати різними шляхами, зокрема через упровадження системи спецсемінарів для студентів фізико-математичних факультетів ЗВО. Інтеграція змісту навчання у на практичному рівні дає студентам найважливішу з педагогічної точки зору можливість: самостійно формувати особистісну систему знань, додавати нові відомості та формувати нові зв'язки в системі професійних компетентностей.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *підготовка майбутніх учителів математики; фахові математичні дисципліни; професійна підготовка; інтеграція; зміст освіти.*

ABSTRACT

Formulation of the problem. *Among the ways to integrate the content of professional mathematics disciplines in the training of future mathematics teachers should be singled out the fundamentalization of courses linear algebra and analytical geometry, mathematical analysis and analytical geometry, differential geometry through the development of integrated integrated special courses for future teachers.*

Materials and methods*. System analysis of scientific, educational and methodical literature; comparison and synthesis of theoretical positions; generalization of own pedagogical experience and experience of colleagues from other institutions of higher education, some general mathematical and special methods of difference calculus.*

Results*. The article considers the possibilities of studying professional mathematical disciplines in terms of integration of their content in the institution of higher pedagogical education of mathematical profile. The presentation of educational material in different training courses is mostly out of sync, as they are taught by different teachers. Instead, the future teacher of mathematics must be helped to form in his own mind a certain system of content of professional disciplines. Accordingly, we have developed special seminars for students of the Faculty of Physics and Mathematics, in which each teacher tries to provide interdisciplinary links of his course with others. The content was harmonized by defining related and identical concepts and their definitions, the sequence of introduction of primary and dependent terms, mutual references in professional mathematics to connections in the educational material, and so on.*

Conclusions*. The formation of a knowledge base and other components of the learning system, taking into account interdisciplinary links, harmonization of learning content, and synchronization of the learning process over time can be implemented in various ways, including through the introduction of special seminars for students of physics and mathematics faculties. Integrating the content of education at the practical level gives students the most important opportunity from a pedagogical point of view: to independently form a personal knowledge system, add new information and form new connections in the system of professional competencies.*

KEYWORDS: *training of future teachers of mathematics; professional mathematical disciplines; professional training; integration; content of education.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Проблема диференціації та інтеграції в освіті є логічним наслідком процесів розвитку наукового знання, в якому диференціація змісту наук тісно пов'язана з його інтеграцією. Ці дві тенденції нерозривно пов'язані між собою, хоч і протилежні за своєю сутністю. Протягом останніх років, починаючи з кінця минулого століття,

Для цитування:
Шишенко І., Лукашова Т. Інтеграція змісту фахових математичних дисциплін у професійній підготовці майбутніх учителів математики. *Фізико-математична освіта*, 2022. Том 34. № 2. С. 55-62. DOI: 10.31110/2413-1571-2022-034-2-009
Шишенко, І., & Лукашова, Т. (2022). Інтеграція змісту фахових математичних дисциплін у професійній підготовці майбутніх учителів математики. *Фізико-математична освіта*, 34(2), 55-62. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-009

For citation:
Shyshenko, I., & Lukashova, T. (2022). Integration of the content of professional mathematical disciplines in the professional training of future mathematics teachers. *Physical and Mathematical Education*, 34(2), 55-62. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-009
Shyshenko, I., & Lukashova, T. (2022). Intehratsiia zmistu fakhovykh matematychnykh dystsyplin u profesiinii pidhotovtsi maibutnikh uchyteliv matematyky [Integration of the content of professional mathematical disciplines in the professional training of future mathematics teachers]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 34(2), 55-62. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-009

✉ Corresponding author

провідною тенденцією розвитку науки була диференціація, що одержало відображення в існуючій предметній системі навчання, зокрема в системі вищої освіти. Нині в системі освіти усе більшої актуальності набувають ідеї STEM-освіти (Jacobs, Seago, & Koellner, 2017), відповідно починає домінувати ідея інтеграції змісту освіти. Ця тенденція також знайшла своє відображення і в системі професійної підготовки.

З метою здійснення ефективної інтеграції змісту фахових математичних дисциплін у процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики слід комплексно формулювати цілі навчання, здійснювати відбір змісту у різних фахових дисциплінах, методичну та дидактичну підтримку цього процесу, визначати послідовність навчального матеріалу, враховувати рівень мотивації, та пізнавального інтересу майбутніх учителів математики (Koellner & Jacobs, 2015). Серед шляхів здійснення інтеграції змісту фахових математичних дисциплін у процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики слід окремо виділити фундаменталізацію навчальних курсів лінійна алгебра та аналітична геометрія, математичний аналіз та аналітична геометрія, диференціальна геометрія через розробку відповідних інтегрованих спецкурсів для майбутніх учителів математики.

Таким чином, інтеграція змісту фахових математичних дисциплін у процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики через міжпредметні інтеграційні спецкурси з урахуванням професійної спрямованості навчання має забезпечити підвищення якості вищої педагогічної математичної освіти.

Аналіз актуальних досліджень. Дослідники вважають, що ідея інтеграції змісту освіти не є новим явищем у вітчизняній та закордонній педагогіці. Слід згадати природничий курс мислення В. Сухомлинського, курс мистецтва Д. Ковалевського та Б. Юсова та теорію кооперативного навчання Ш. Амонашвілі, які базуються на ці принципи інтеграції. До сучасних дослідників, які займаються цією проблемою, належать Т. Браже, О. Гільзова, М. Масол, О. Савченко, Н. Сердюкова, О. Сухаревська, В. Фоменко, М. Іванчук та ін. Актуальність пошуку оптимального способу інтеграції, особливо змісту математичної освітньої галузі, посилюється також предметною перевантаженістю, необхідністю формування загального світогляду у взаємозв’язку його елементів. Формування такого методу злиття в процесі педагогічної математичної освіти, що враховує всі основні етапи, функції, аспекти та чинники цього різноманітного педагогічного явища, є сьогодні надзвичайно важливим. На цьому етапі на практиці реалізовано окремі елементи інтегрованого підходу до організації освітнього процесу професійної підготовки майбутніх учителів математики. Практикою доведено, що комплексне навчання сприяє формуванню професійної компетентності майбутніх учителів математики відповідно до конкретних навчальних завдань, які ставить професія перед вчителем математики.

Методологічні ідеї інтеграції змісту навчальних дисциплін висвітлено в працях С. Гончаренка, О. Дубинчук, І. Ковпак (2013), Ю. Козловського (2018), М. Лазарєва (2009), О. Сергєєва, В. Сидоренка та ін. Ґенезу становлення сучасного інтегративного підходу до формування змісту вищої освіти в Україні можна відслідковувати, розпочинаючи з досліджень М. Лазарєва (2009). Автором актуалізовано проблему дублювання змісту навчання й неефективного його використання. Змістова інтеграція фахових математичних навчальних дисциплін, курсів надає можливість повноцінно використовувати сучасні інформаційні технології, що забезпечує студентам можливість навчатися й діяти в умовах звичного для них сучасного інформаційного середовища.

У наукових дослідженнях доведено доцільність та ефективність застосування інтегративного підходу до формування змісту навчання (Бех та ін., 2020; Марусинець, 2006; Чхало, 2018), проте малодослідженими залишаються ідеї інтеграції змісту фахових математичних дисциплін у професійній підготовці майбутніх учителів математики засобами спецкурсів.

Мета статті: розглянути можливості вивчення фахових математичних дисциплін в умовах інтеграції їх змісту у закладі вищої педагогічної освіти математичного профілю.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У статті використано наступні теоретичні та емпіричні методи досліджень: системний аналіз наукової, навчальної та методичної літератури; порівняння та синтез теоретичних положень, розкритих в науковій та навчальній літературі; узагальнення власного педагогічного досвіду та досвіду колег з інших закладів вищої освіти. Окрім того, були використані деякі загально математичні та спеціальні методи різницевого числення.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Професійна підготовка майбутніх учителів математики не може бути повноцінною та ефективною, якщо фахові математичні дисципліни викладаються без урахування їх наукового та методичного взаємозв'язку. Це вимагає правильного розташування курсів у навчальному плані, узгодження певних понять, термінології та позначень, а також урахування того, які ідеї, методи та факти одних дисциплін необхідні при вивчені інших. Можна відзначити низку неузгодженостей у структурі освітнього процесу майбутніх учителів математики: порушення наступності понять, що вивчаються, дублювання одного і того ж навчального матеріалу тощо. Проте майбутній учитель математики має добре бачити і розуміти наявність глибоких методологічних і змістовних взаємозв'язків, що існують між математичними курсами, що викладаються, насамперед, між класичною «безперервною» математикою та дискретною.

Нині в умовах дистанційного навчання та використання системи Moodle без застосування інтегративного підходу складається ситуація, за якої студент фізико-математичного факультету педагогічного ЗВО одночасно вивчає кілька різних дисциплін, зміст яких у його віртуальному кабінеті не лише розміщено ізольовано, а й містить повтори та дублювання навчального матеріалу. Окрім того, одні й ті самі величини у різних курсах позначаються різними символами, що ускладнює їх ідентифікацію. Подання навчального матеріалу в різних навчальних курсах здебільшого не синхронізовано, оскільки їх викладають різні викладачі. Натомість майбутньому вчителю математики необхідно допомогти сформувати у власній свідомості певну систему зі змісту фахових дисциплін.

На нашу думку, зміст фахової підготовки майбутніх вчителів фізико-математичних спеціальностей має бути скореговано. Важливою умовою формування професійної компетентності майбутнього вчителя математики є засвоєння ним фундаментальних математичних дисциплін. При цьому слід звернути особливу увагу на формування цілісної системи математичних знань студентів. З іншого боку, існуючий розподіл навчальних математичних знань за дисциплінами є необхідним, оскільки таким розділенням досягається поглиблене розуміння окремих сторін математики. Лінійна форма вивчення матеріалу основних математичних курсів, коли кожна тема вивчається лише один раз, недостатній аналіз міжпредметних зв'язків призводить до того, що, маючи у пам'яті достатню кількість означень і формул, студенти не спроможні усвідомлено і аргументовано «дістати з пам'яті» і використати цю інформацію при розв'язуванні задач навіть шкільного типу. Інакше кажучи, у них не сформована міжпредметна методологія розв'язування задач, особливо тих, які потребують побудови математичної моделі. У зв'язку з цим повноцінна математична освіта, і як кінцева мета, формування професійної компетентності майбутнього вчителя математики, має завершуватись вивченням узагальнюючих та систематизуючих курсів або спецкурсів, які сприятимуть встановленню міждисциплінарних зв'язків університетських математичних курсів, систематизації знань та навичок, отриманих при їх вивченні, розвитку у студентів умінь визначати взаємозв'язки між елементами змісту в межах як однієї математичної дисципліни, так і в межах споріднених дисциплін тощо. Відповідно нами було розроблено спецсемінари «Вибрані питання математики» для студентів 4 курсу фізико-математичного факультету ЗВО, в рамках яких кожен викладач намагається забезпечити міжпредметні зв'язки свого курсу з іншими. Узгодження змісту здійснювалося шляхом визначення споріднених і тотожних понять та їхніх дефініцій, послідовності введення первинних та залежних термінів, взаємних посилань у фахових математичних на зв'язки у навчальному матеріалі тощо.

Метою розробки спецкурсу є систематизація знань студентів на основі загальних математичних і логічних ідей, які покладено в основу сучасного курсу математики. Його основними завданнями є:

1) проаналізувати фахові математичні курси з точки зору фундаментальних математичних ідей: множина, відповідність, відображення, відношення, математична структура, алгебраїчна операція тощо;

2) показати розвиток понять числа, функції, величини, алгоритму, фігури, які відіграють важливу роль у курсі сучасної математики ;

3) розкрити роль і місце найважливіших понять сучасної математики в шкільному курсі;

4) вчити встановлювати зв'язки між різними розділами математики та відображених у них фундаментальних математичних понять.

Наприклад, досить часто в математиці виникають задачі, в яких вимагається знайти суму членів деякої послідовності (скінченної чи нескінченної). Такі задачі зустрічаються чи не в кожному розділі математики: лінійній алгебрі, аналітичній геометрії, алгебрі та теорії чисел, математичному аналізі, теорії рядів, теорії диференціальних рівнянь, дискретній математиці, теорії ймовірностей, що зайвий раз підтверджує слова Д. Кнута (1998) про те, що «суми всюдисущі». Відповідно нами розглянуто спецсемінар, в рамках якого було об'єднано навчальний матеріал з курсів математичного аналізу, елементарної математики, алгебри та дискретної математики.

У якості прикладу розглянемо суму квадратів n перших натуральних чисел:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2. \qquad (1)$$

Значення цієї суми добре відоме:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

і наводиться у багатьох посібниках з елементарної математики (див., наприклад, Прасолов, 2007, с.118). Довести її нескладно, використовуючи метод математичної індукції. Зовсім інша справа – встановити вказану формулу.

Далі будемо розглядати *алгебраїчні методи* обчислення суми (1), що, з одного боку, базуються на тотожних перетвореннях цілих виразів, а з іншого – на властивостях скінченних сум.

Позначимо $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ і скористаємося тотожністю

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1. \qquad (2)$$

Підставимо в (2) значення k=1, 2, …, k і додамо отримані рівності:

$$2^3 = 1^3 + 3 + 3 + 1$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Скоротивши в обох частинах суми кубів, дістанемо:

$$(n+1)^3 = 1 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

Тоді

$$3S_n = (n+1)^3 – \frac{3n(1+n)}{2} – (n+1) = \frac{(1+n)(2(n+1)^2 - 2 - 3n)}{2} = \frac{n(1+n)(2n+1)}{2}.$$

Отже, $S_n = \frac{n(1+n)(2n+1)}{6}$.

Схожа ідея застосовується і у наступному методі, але акцент робиться саме на властивості скінченних сум.

Позначимо $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$. Тоді

$$s_{n+1} = s_n + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$$

або

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Підставимо у цю рівність $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^3, S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ і $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(1+n)}{2}$. Одержимо:

$$s_n + (n+1)^3 = s_n + 3S_n + 3 \cdot \frac{n(1+n)}{2} + n,$$

звідки

$$S_n = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 3 \cdot \frac{n(1+n)}{2} - n\right) = \frac{1}{6}n(1+n)(2n+1).$$

Ще один зі способів застосування властивостей скінченних сум наводиться у статті Р. Ушакова (2006). Він стосується обчислення сум виду $\sum_{k=1}^{n} ka_k$ та базується на застосуванні формули

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = (n+1)S_n - \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_m, \quad (3)$$

яка випливає з наступних міркувань.

Нехай

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_n.$$

Тоді

$$a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_n - a_1$$
$$a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_n - a_1 - a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} + a_n = S_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-2}$$
$$a_n = S_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-2} - a_{n-1}.$$

Додамо наведені вище рівності почленно:

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = nS_n - a_1 - (a_1 + a_2) - (a_1 + a_2 + a_3) - \ldots - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = nS_n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{n} a_m\right) \quad (4)$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{n-1}(\sum_{m=1}^{n} a_m)=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{m=1}^{n} a_m)-\sum_{m=1}^{n} a_m$, то з (4) маємо

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = nS_n - \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n} a_m\right) + \sum_{m=1}^{n} a_m,$$

звідки й випливає формула (3).

Знайдемо тепер суму $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$, використовуючи вказаний метод і формулу (3):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n} m\right) =$$
$$= (n+1)\frac{n(1+n)}{2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k(1+k)}{2} = \frac{n(1+n)^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k =$$
$$= \frac{n(1+n)^2}{2} - \frac{1}{2}S_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{n(1+n)}{2},$$

Таким чином, $S_n = \frac{n(1+n)^2}{2} - \frac{1}{2}S_n - \frac{n(1+n)}{4}$, звідки $\frac{3}{2}S_n = \frac{n(n+1)(1+2n)}{4}$. Отже,

$$S_n = \frac{n(n+1)(1+2n)}{6}.$$

Досить різноманітні засоби для обчислення скінченних сум дає *дискретна математика*, зокрема, різницеве числення. Один з них полягає у застосуванні *рекурентних* (зворотних) *співвідношень.*

Як і вище, позначимо $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$, тоді, очевидно,

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = S_n + (n+1)^2.$$

Маємо лінійне неоднорідне рекурентне співвідношення першого порядку:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2, \quad (5)$$

в якому $S_1 = 1$.

Загальна методика розв'язування таких рівнянь добре відома й повторює розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (Страх, & Лукашова, 2021). Зокрема, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рекурентного співвідношення

$$a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \ldots + b_k a_{n-k} = f(n), \text{ де } b_i \in R, i = 1,2,\ldots,k \quad (6)$$

має вигляд [1, с.460]:

$$a_n = a_n^* + q_n, \quad (7)$$

де a_n^* – загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного співвідношення $a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \ldots + b_k a_{n-k} = 0$, а q_n – деякий частинний розв'язок даного неоднорідного співвідношення (6).

Алгоритм розв'язування такого співвідношення полягає у наступному:

1) Шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного співвідношення:

$$a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \ldots + b_k a_{n-k} = 0. \quad (8)$$

Для цього записуємо *характеристичне рівняння*: $\lambda^k + b_1\lambda^{k-1} + \ldots + b_k = 0$, знаходимо його корені λ_i. Якщо воно має прості корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, то загальний розв'язок (8) має вигляд:

$$a_n = C_1{\lambda_1}^n + C_2{\lambda_2}^n + \ldots + C_k{\lambda_k}^n,$$

де C_i – деякі константи. Якщо характеристичне рівняння має m різних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, $m < k$ кратності яких дорівнюють відповідно $l_1, l_2, \ldots, l_m$, де $l_1 + l_2 + \ldots + l_m = k$, то загальний розв'язок співвідношення (8) записують у вигляді:

$$a_n = \sum_{i=1}^{m}\left(C_{i_1} + C_{i_2}n + C_{i_2}n^2 + \ldots + C_{i_{l_i}}n^{l_i-1}\right){\lambda_i}^n. \quad (9)$$

2) Знаходимо частинний розв'язок q_n співвідношення (6), виходячи з правої частини $f(n)$ даного співвідношення (3). При цьому q_n буде функцією, подібною до $f(n)$. Наприклад, якщо $f(n)= (an + d)b^n$, де a, d, b – деякі числа, то q_n шукаємо у вигляді $q_n = (An + D)\, b^n$, де A i D – невідомі коефіцієнти. При цьому, якщо $f(n)$ містить множник b^n, де b – *l*-кратний корінь характеристичного рівняння для співвідношення (8), то шукану функцію, записану через невідомі коефіцієнти, слід помножити на n^{l-1}.

Після визначення загального виду q_n слід підставити його у вихідне співвідношення (6) і знайти невідомі коефіцієнти A i D, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

3) Записуємо загальний розв'язок даного неоднорідного співвідношення у вигляді (7).

Проілюструємо вказаний метод на прикладі обчислення суми $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

Їй відповідає рекурентне співвідношення (5):

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2, \qquad \text{де } S_1 = 1.$$

Однорідне співвідношення, яке відповідає (5), має вигляд $S_{n+1} = S_n$. Характеристичне рівняння $\lambda = 1$. Отже, загальний розв'язок однорідного співвідношення записуємо у вигляді:

$$S_n^* = C \cdot 1^n = C.$$

Функція $f(n)$=$(n+1)^2 = (n^2 + 2n + 1) \cdot 1^n$, причому $b = 1$ – корінь характеристичного рівняння кратності 1. Тому $q_n = An^3 + Bn^2 + Dn$. Підставимо q_n замість S_n у (5):

$$A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + D(+1)n = An^3 + Bn^2 + Dn + (n+1)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної, одержимо:

$$\begin{cases} B = -3A + B + 1 \\ D = 3A - 2B + D \\ 0 = -A + B - D \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{2} \\ D = \frac{1}{6} \end{cases} \text{ і } q_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

За (7) загальний розв'язок співвідношення (5) має вигляд $S_n = S_n^* + q_n$, тобто

$$S_n = C + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Знайдемо тепер значення константи C, використовуючи умову: $S_1 = 1$:

$$1 = C + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6},$$

звідки C і $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(1+2n)}{6}$.

Зазначимо, що співвідношення (5) можна звести до однорідного, виписавши з рекурентного співвідношення (5) відповідні рівності S_n, S_{n-1}, S_{n+1} і S_{n+2} та виключивши неоднорідність. Дістанемо *однорідне співвідношення*

$$S_{n+2} = 4S_{n+2} - 6S_n + 4S_{n-1} - S_{n-2}, \qquad (10)$$

з характеристичним рівнянням $\lambda^4 = 4\lambda^3 - 6\lambda^2 + 4\lambda - 1$. Воно має кратний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, звідки за формулою (9) отримуємо загальний розв'язок співвідношення (10):

$$S_n = C_1 n^3 + C_2 n^2 + C_3 n + C_4.$$

Знаходимо значення констант, виходячи із початкових значень: $S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 5, S_3 = 14$. Остаточно, C_4=0, $C_3 = \frac{1}{6}, C_2 = \frac{1}{2}, C_1 = \frac{1}{3}$ і $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Наступний метод, який дає дискретна математика – застосування антирізниць, які є дискретними аналогами первісної функції. Нагадаємо, що *антирізницевою функцією для функції* $f(x)$ називається функція $F(x)$ така, що

$$\Delta F(x) = f(x),$$

де $\Delta F(x) = F(x+1) - F(x)$ – скінченна різниця першого роду [2, с. 84].

Антирізницеву функцію (антирізницю) для функції $f(x)$ позначають $\Delta^{-1} f(x)$ або $\Delta^{-1} f$, а оператор переходу від функції $f(x)$ до функції $F(x)$ називають *антирізницевим* (Волков & Войналович, 2000). Значення антирізницевого оператора (як і значення його неперервного аналога – невизначеного інтеграла) визначається неоднозначно: якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ дві антирізниці, то $F_1(x) - F_2(x) = C(x)$, де $C(x)$ – довільна періодична функція з періодом *T*=1.

Наприклад, $\Delta^{-1} 2^x = 2^x + C(x)$, де $C(x)$ – періодична функція з періодом 1, оскільки

$$\Delta(2^x + C(x)) = \left(2^{x+1} + C(x+1)\right) - (2^x - C(x)) = 2^x(2-1) = 2^x.$$

Аналогічно, використовуючи означення скінченної різниці та антирізниці, неважко переконатися, що

$$\Delta^{-1} x = \frac{x(x-1)}{2} + C(x) = \frac{x^{(2)}}{2} + C(x)$$

(в останній рівності символом $x^{(n)}$ позначено так званий *узагальнений степінь*

$$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)).$$

Відповідно,

$$\Delta^{-1} x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C(x), n \neq -1. \qquad (11)$$

Наведемо кілька властивостей антирізниць, які неважко довести, виходячи з означень різницевої та антирізницевої функцій:

1. $\Delta^{-1} f(x) = F(x) + C(x)$, $C(x)$ – періодична функція, *T*=1;

2. $\Delta^{-1} cf = c\Delta^{-1} f$;

3. $\Delta^{-1}(f + g) = \Delta^{-1} f + \Delta^{-1} g$.

4. Якщо $\Delta^{-1} f(x) = F(x)$, то

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(x) = F(x)|_m^n = F(n) - F(m).$$

Наведена вище формула є дискретним аналогом формули Ньютона-Лейбніца.

5. $\sum_{x=1}^{n-1} f \Delta g = f \cdot g|_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} g(x+1) \Delta f$.

Останню властивість називають *перетворенням Абеля* (Волков & Войналович, 2000). Вона є дискретним аналогом формули інтегрування частинами.

Зазначимо, що наведені вище властивості 4 і 5 антирізницевого оператора широко використовуються для знаходження скінченних сум. Проілюструємо застосування властивості 4 для знаходження суми

$$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2.$$

Позначимо $f(x) = x^2$ та знайдемо її антирізницю. Для цього запишемо x^2 у вигляді узагальненого степеня: $x^2 = x(x-1) + x = x^{(2)} + x^{(1)}$. Тоді за формулою (11) маємо:

$$F(x) = \Delta^{-1}x^2 = \Delta^{-1}\left(x^{(2)} + x^{(1)}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}x^{(3)} + \frac{1}{2}x^{(2)} = \frac{1}{3}x(x-1)(x-2) + \frac{1}{2}x(x-1) = \frac{1}{6}x(x-1)(2x-1).$$

Далі за властивістю 4

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}k(k-1)(2k-1)\Big|_1^{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Приклади використання властивості 5 можна знайти, наприклад у (Волков & Войналович, 2000).

Зазначимо також, що перехід від многочлена x^n до узагальненого степеня можна здійснити безпосередньо:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{(k)}$$

де $S(n,k)$ – числа Стірлінга другого роду, які широко використовуються в дискретній математиці і визначаються рекурентно (Андерсон, 2004):

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + k\,S(n,k)\ і\ \ S(n,0) := 0 \text{ при } n > 0, S(1,1) := 1.$$

Це дає можливість обчислювати степеневі суми послідовних натуральних чисел:

$$1^m + 2^m + \ldots + n^m = \sum_{k=0}^{m} S(m,k)\frac{(n+1)^{(k+1)}}{k+1}.$$

При $m = 2$ будемо мати:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=0}^{2} S(2,k)\frac{(n+1)^{(k+1)}}{k+1},$$

тобто

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = S(2,0)\frac{(n+1)^{(1)}}{1} + S(2,1)\frac{(n+1)^{(2)}}{2} + S(2,2)\frac{(n+1)^{(3)}}{3} =$$
$$= \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} = \frac{(n+1)n(3+2n-2)}{6} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Зазначимо, що для обчислення суми $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ можна також застосувати многочлени (та числа) Бернуллі (Ушаков, 2006) та апарат твірних функцій (Ядренко, 2004), які широко використовуються у комбінаторному аналізі.

Вагому роль також відіграють класичні методи комбінаторного аналізу та різницевого числення. Тому, вивченню відповідних питань корисно приділяти окрему увагу як при вивченні базового курсу дискретної математики, так і в окремих спецкурсах та на заняттях математичного гуртка.

ОБГОВОРЕННЯ

Провідною тенденцією осучаснення і вдосконалення змісту освіти С. У. Гончаренко називає його гуманітаризацію, що передбачає: «...інтеграцію різнорідних знань про людину, її мислення, про природу і суспільство, одержаних при вивченні різних навчальних предметів, у єдину наукову картину світу» (Колеснікова, 2011). Інтеграція є важливою умовою загального розвитку сучасної науки і цивілізації (Bass & Ball, 2018). Адже наукове мислення на сучасному етапі все більше схильне розглядати не окремі, ізольовані об’єкти, життєві явища, а їх більш-менш розгалужену єдність. Тож: «інтеграція - вимога об'єднання у ціле якихось частин чи елементів, вважається необхідним дидактичним засобом, за допомогою якого можливо створити в учнів цілісну картину світу» (Большакова, 2012). Поняття «інтеграція» має універсальне наукове значення і часто використовується в навчанні. У загальнонауковому аспекті: «інтеграція – це процес взаємопроникнення, ущільнення, уніфікації знання, який проявляється через єдність з протилежним йому процесом розчленування, розмежування, диференціації, процес, який об’єктивно детермінується взаємопроникненням різних видів і компонентів матеріальної і духовної діяльності людей, а в своїх найглибших основах – матеріальною єдністю світу, всезагальним зв’язком, ізоморфізмом структур в якісно різноманітних об’єктах» (Бех та ін., 2020).

Наше дослідження узгоджується з головними положеннями дослідників (Borko & et al., 2014; Forgasz, 2006; Inglis & Foster, 2018) ідей інтеграції фундаментальних дисциплін у змісті професійної підготовки майбутніх учителів математики. При упровадженні розробленого нами спецкурсу досить широко прослідковується міждисциплінарні зв’язки між різними розділами математики: математичним аналізом, геометрією, алгеброю, дискретною математикою, теорією ймовірностей. Також вдосконалення змісту передбачає модифікацію робочих програм, розробку або оновлення навчально-методичних комплексів фундаментальних математичних дисциплін на основі принципу професійної спрямованості у контексті збільшення ваги питань шкільного курсу математики та перерозподілу змісту аудиторних лекцій та відео-лекцій з фундаментальних математичних дисциплін.

Загалом область досліджень інтеграції фундаментальних дисциплін охоплює всі рівні вищої освіти, у тому числі перший бакалаврський, та передбачає інтеграцію предметів, які мають найбільшу увагу: алгебру, доведення, обчислення, технології, геометрія та моделювання. Сильний акцент досліджувана нами проблема має у роботах, пов'язаних з вирішенням проблеми підвищення кваліфікації вчителів, оновленням навчальних планів (Cancino & et al., 2017; Drijvers & et al., 2020; Schoenfeld, 2016).

На наш погляд, необхідним для забезпечення ефективної інтеграції фундаментальних дисциплін у змісті професійної підготовки майбутніх учителів математики є упровадження діяльнісного підходу, оскільки саме цей підхід дозволяє студентам освоїти способи дій їхньої майбутньої професійної діяльності. Крім того, для ефективної організації міждисциплінарної інтеграції необхідно органічне поєднання різних форм та методів навчальної діяльності, а також використання можливостей таких засобів начальної діяльності, як хмарні технології, система Moodle, системи комп’ютерної математики на базі діяльнісного підходу (Das, 2019; Drushlyak & et al., 2020; Fedorenko & Botuzova, 2020; Lesseig & et al., 2016). Це має забезпечити високий рівень формування професійної компетентності майбутніх учителів математики, їх здатності і готовності застосовувати отримані знання, вміння та навички при вирішенні професійно спрямованих та міждисциплінарних завдань (Gallagher & et al., 2020; Gravemeijer & et al., 2017; Shen & Ho, 2020).

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Важливим результатом виконаного дослідження освітнього процесу можна вважати висновок щодо можливості формування у майбутніх учителів математики інтегрованого комплексу професійно спрямованих знань, який можна схарактеризувати як базу професійної компетентності шляхом запровадження в освітній процес інновацій, заснованих на створенні інтегрованого навчального середовища.

Формування знаннєвої бази навчання та інших складників системи навчання з урахуванням міждисциплінарних зв'язків, гармонізації змісту навчання та синхронізації процесу навчання в часі можливо реалізувати різними шляхами, зокрема через упровадження системи спецсемінарів для студентів фізико-математичних факультетів ЗВО. Інтеграція змісту навчання у на практичному рівні дає студентам найважливішу з педагогічної точки зору можливість: самостійно формувати особистісну систему знань, додавати нові відомості та формувати нові зв'язки в системі професійних компетентностей.

Перспективи дослідження полягають у подальшому розробленні забезпечення освітнього процесу майбутніх учителів математики через інтегрування змісту освітнього процесу засобами сучасних інформаційних технологій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андерсон, Дж. А. (2004). *Дискретная математика и комбинаторика*. Вильямс.
2. Бех, І. Д., Козловський, Ю. М., & Марусинець, М. М. (2020). Інтеграція змісту навчання природничо-математичних дисциплін засобами хмарних технологій у віртуальному середовищі закладу вищої освіти технічного профілю. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 76(2), 70-83.
3. Большакова, І. О. (2012). Підготовка вчителя початкової школи до інтегрованого навчання молодших школярів в Україні (кін. ХХ–поч. ХХІ ст.). *Наукові записки НДУ ім. М. Гоголя. Психолого-педагогічні науки*, 3, 147-149.
4. Волков, Ю. І.,& Войналович, Н. М. (2000). *Елементи дискретної математики*. Кіровоград.
5. Грэхем, Р., Кнут, Д., & Паташник, О. (1998). *Конкретная математика. Основания информатики*. Мир.
6. Ковпак, І. О. (2013). *Педагогічні засади проектування міждисциплінарної технології навчання у підготовці викладачів педагогіки*. [Дис. канд. пед. наук. НАПН України]. Київ.
7. Козловський, Ю. М. (2018). *Інтеграційні процеси в професійній освіті: методологія, теорія, методики*. Вид-во Львівської політехніки.
8. Колеснікова, С. М. (2011). Інтеграція як дидактичний засіб оновлення змісту освіти в початкових класах. *Педагогічний дискурс*, 9, 173-176.
9. Лазарєв, М. І., Рубан, Н. П., & Лазарєва, Т. А. (2009). *Теоретичні та методичні засади креативного навчання студентів технічних дисциплін* : монографія. Ліхтар.
10. Марусинець, М. М. (2006). Методологічні аспекти вдосконалення змісту вищої педагогічної освіти. *Педагогіка*, 9, 248-253.
11. Прасолов, В. В. (2007). *Задачи по алгебре, арифметике и анализу*. МЦНПО.
12. Страх, О. П., & Лукашова, Т. Д. (2021). Міждисциплінарні зв'язки при вивченні деяких тем дискретної математики та диференціальних рівнянь. *Фізико-математична освіта*, 3 (29), 112– 118. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-029-3-017.
13. Ушаков, Р. П. (2006). *Знаходження скінченних сум*. Основа.
14. Чхало, О. М. (2018). *Застосування технології BYOD в освітньому процесі аналітичної хімії*. *Комп'ютер у школі та сім'ї*, 3, 10-16.
15. Ядренко, М. Й. (2004). *Дискретна математика*. МП «ТВіМС».
16. Bass, H., & Ball, D. L. (2018). Review of does mathematical study develop logical thinking? Testing the theory of formal discipline. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(3), 442-447. https://doi.org/10.1007/s40753-018-0076-7.
17. Borko, H., Koellner, K., & Jacobs, J. (2014). Examining novice teacher leaders' facilitation of mathematics professional development. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 149–167.
18. Cancino, C. A., Merigó, J. M., & Coronado, F. C. (2017). A bibliometric analysis of leading universities in innovation research. *Journal of Innovation & Knowledge*, 2(3), 106-124. https://doi.org/10.1016/j.jik.2017.03.006.
19. Das, K. (2019). Role of ICT for Better Mathematics Teaching. *Shanlax International Journal of Education*, 7 (4), 9-28.
20. Drijvers, P., Grauwin, S. & Trouche, L. (2020). When bibliometrics met mathematics education research: the case of instrumental orchestration. *International Journal on Mathematics Education*, 52, 1455-1469. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01169-3.
21. Drushlyak, M.G., Semenikhina, O.V., Proshkin, V. V., Kharchenko, S.Ya., & Lukashova, T.D. (2020). Methodology of formation of modeling skills based on a constructive approach (on the example of GeoGebra). *CTE 2020 Cloud Technologies in Education 2020: Proceedings of the 8th Workshop on Cloud Technologies in Education* (CTE 2020). Kryvyi Rih, Ukraine.
22. Fedorenko, O. H., & Botuzova, Yu. V. (2020). Experience of using ICT tools for teaching mathematical analysis of future teachers of mathematics. *Information Technologies and Teaching Aids,* 75 (1), 153–169. https://doi.org/10.33407/itlt.v75i1.2530.
23. Forgasz, H. (2006). Teachers, equity, and computers for secondary mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 437–469. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9014-8.
24. Gallagher, M. A., Parsons, S. A. & Vaughn M. (2022) Adaptive teaching in mathematics: a review of the literature. *Educational Review*, 74(2), 298-320, https://doi.org/10.1080/00131911.2020.1722065.
25. Gravemeijer, K., Stephan. M., Julie, C., Lin. F-L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Mathematics and Science Education*, 15, 105-123. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6.
26. Jacobs, J., Seago, N., & Koellner, K. (2017). Preparing facilitators to use and adapt mathematics professional development materials productively. *International Journal of STEM Education*, 4, 30. https://doi.org/10.1186/s40594-017-0089-9.
27. Inglis, M., & Foster, C. (2018). Five decades of mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(4), 462-500. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.4.0462.
28. Koellner, K., & Jacobs, J. (2015). Distinguishing models of professional development: the case of an adaptive model's impact on teachers' knowledge, instruction, and student achievement. *Journal of Teacher Education*, 66(1), 51– 67.
29. Lesseig, K., Elliott, R., Kazemi, E., Kelley-Petersen, M., Campbell, M., Mumme, J., & Carroll, C. (2016). Leader noticing of facilitation in videocases of mathematics professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education*. http://link.springer.com/article/10.1007/s10857- 016-9346-y/fulltext.html
30. Schoenfeld, A. H. (2016). Research in mathematics education. *Review of Research in Education*, 40(1), 497-528. https://doi.org/10.3102/0091732X16658650
31. Shen, C., & Ho, J. (2020). Technology-enhanced learning in higher education: A bibliometric analysis with latent semantic approach. *Computers in Human Behavior*, 104, 106177. https://doi.org/10.1016/j.chb.2019.106177.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Anderson, J.A. (2004). Diskretnaja matematika i kombinatorika [*Discrete Mathematics with Combinatorics*]. Ed. house "Williams". (in Russian).
2. Bekh, I.D., Kozlovsky, Y.M., & Marusinets, M.M. (2020). Intehratsiya zmistu navchannya pryrodnycho-matematychnykh dystsyplin zasobamy khmarnykh tekhnolohiy u virtual'nomu seredovyshchi zakladu vyshchoyi osvity tekhnichnoho profilyu [Integration of the content of teaching natural and mathematical disciplines by means of cloud technologies in the virtual environment of the institution of higher education of technical profile]. *Informatsiyni tekhnolohiyi i zasoby navchannya – Information Technology and Teaching Aids*, 76, 2, 70-83. (in Ukrainian).
3. Bolshakova, I.O. (2012). Pidhotovka vchytelya pochatkovoyi shkoly do intehrovanoho navchannya molodshykh shkolyariv v Ukrayini [Preparation of primary school teachers for integrated education of primary school students in Ukraine (late XX-early XXI century)]. *Naukovi zapysky NDU im. M. Hoholya. Psykholoho-pedahohichni nauky – Scientific notes of NDU named after M. Gogol. Psychological and Pedagogical Sciences*, 3, 147-149. (in Ukrainian).
4. Volkov, Y.I., & Voynalovich, N.M. (2000). *Elementy dyskretnoyi matematyky [Elements of discrete mathematics]*. Kyiv. (in Ukrainian).
5. Graham, R., Knut, D., & Patashnick, O. (1998). *Konkretnaya matematika. Osnovaniya informatiki* [*Concrete mathematics. Foundations of computer science*]. Mir. (in Russian).
6. Kovpak, I. O. (2013). Pedahohichni zasady proektuvannya mizhdystsyplinarnoyi tekhnolohiyi navchannya u pidhotovtsi vykladachiv pedahohiky [*Pedagogical principals for designing the interdisciplinary educational technology in training teachers for pedagogics*]. PhD thesis, Pedagogical Sciences, NAPN of Ukraine, Kyiv. (in Ukrainian).
7. Kozlovsky, Yu. M. (2018). *Intehratsiyni protsesy v profesiyniy osviti: metodolohiya, teoriya, metodyky* [*Integration processes in professional education: methodology, theory, methods*]. Lviv, View of the Lviv Polytechnic. (in Ukrainian).
8. Kolesnikova, S.M. (2011). Intehratsiya yak dydaktychnyy zasib onovlennya zmistu osvity v pochatkovykh klasakh [Integration as a didactic tool for updating the content of education in primary school]. *Pedahohichnyy dyskurs – Pedagogical Discourse*, 9, 173-176. (in Ukrainian).
9. Lazariev, M. I., Ruban, N. P. & Lazarieva, T.A. (2009). *Teoretychni ta metodychni zasady kreatyvnoho navchannya studentiv tekhnichnykh dystsyplin [Theoretical and methodological principals of creative learning for students from technical disciplines]*. Gorlivka: Lihtar. (in Ukrainian).
10. Marusinets, M. M. (2006). Metodolohichni aspekty vdoskonalennya zmistu vyshchoyi pedahohichnoyi osvity [Methodological aspects for improving the content of higher pedagogical education]. *Pedahohika – Pedagogics*, 9, 248-253. (in Ukrainian).
11. Prasolov, V. V. (2007). *Zadachi po algebre, arifmetike i analizu* [*Problems in algebra, arithmetic and analysis*]. MTsNPO. (in Russian).
12. Strakh, O. & Lukashova, T. (2021). Mizhdystsyplinarni zviazky pry vyvchenni deiakykh tem dyskretnoi matematyky ta dyferetsialnykh rivnian [Interdisciplinary connections in the study of some topics of discrete mathematics and differential equations]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 3 (29), 112–118. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-029-3-017. (in Ukrainian).
13. Ushakov, R.P. (2006). *Znakhodzhennya skinchennykh sum* [*Finding finite amounts*]. Osnova. (in Ukrainian).
14. Chkhalo, O. M. (2018). Zastosuvannya tekhnolohiyi BYOD v osvitn'omu protsesi analitychnoyi khimiyi [Emplemention BYOD technology in the educational process of analytical chemistry]. *Kompyuter u shkoli ta simyi – Computer at school and in family*, 3, 10-16. (in Ukrainian).
15. Yadrenko, M.Y. (2004). *Discrete Mathematics* [*Dyskretna matematyka*]. "TViMS". (in Ukrainian).
16. Bass, H., & Ball, D. L. (2018). Review of does mathematical study develop logical thinking? Testing the theory of formal discipline. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(3), 442-447. https://doi.org/10.1007/s40753-018-0076-7.
17. Borko, H., Koellner, K., & Jacobs, J. (2014). Examining novice teacher leaders' facilitation of mathematics professional development. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 149–167.
18. Cancino, C. A., Merigó, J. M., & Coronado, F. C. (2017). A bibliometric analysis of leading universities in innovation research. *Journal of Innovation & Knowledge*, 2(3), 106-124. https://doi.org/10.1016/j.jik.2017.03.006.
19. Das, K. (2019). Role of ICT for Better Mathematics Teaching. *Shanlax International Journal of Education*, 7 (4), 9-28.
20. Drijvers, P., Grauwin, S. & Trouche, L. (2020). When bibliometrics met mathematics education research: the case of instrumental orchestration. *International Journal on Mathematics Education*, 52, 1455-1469. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01169-3.
21. Drushlyak, M.G., Semenikhina, O.V., Proshkin, V. V., Kharchenko, S.Ya., & Lukashova, T.D. (2020). Methodology of formation of modeling skills based on a constructive approach (on the example of GeoGebra). *CTE 2020 Cloud Technologies in Education 2020: Proceedings of the 8th Workshop on Cloud Technologies in Education* (CTE 2020). Kryvyi Rih, Ukraine.
22. Fedorenko, O. H., & Botuzova, Yu. V. (2020). Experience of using ICT tools for teaching mathematical analysis of future teachers of mathematics. *Information Technologies and Teaching Aids,* 75 (1), 153–169. https://doi.org/10.33407/itlt.v75i1.2530.
23. Forgasz, H. (2006). Teachers, equity, and computers for secondary mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 437–469. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9014-8.
24. Gallagher, M. A., Parsons, S. A. & Vaughn M. (2022) Adaptive teaching in mathematics: a review of the literature. *Educational Review*, 74(2), 298-320, https://doi.org/10.1080/00131911.2020.1722065.
25. Gravemeijer, K., Stephan. M., Julie, C., Lin. F-L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Mathematics and Science Education*, 15, 105-123. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6.
26. Jacobs, J., Seago, N., & Koellner, K. (2017). Preparing facilitators to use and adapt mathematics professional development materials productively. *International Journal of STEM Education*, 4, 30. https://doi.org/10.1186/s40594-017-0089-9.
27. Inglis, M., & Foster, C. (2018). Five decades of mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(4), 462-500. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.4.0462.
28. Koellner, K., & Jacobs, J. (2015). Distinguishing models of professional development: the case of an adaptive model's impact on teachers' knowledge, instruction, and student achievement. *Journal of Teacher Education*, 66(1), 51– 67.
29. Lesseig, K., Elliott, R., Kazemi, E., Kelley-Petersen, M., Campbell, M., Mumme, J., & Carroll, C. (2016). Leader noticing of facilitation in videocases of mathematics professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education*. http://link.springer.com/article/10.1007/s10857- 016-9346-y/fulltext.html
30. Schoenfeld, A. H. (2016). Research in mathematics education. *Review of Research in Education*, 40(1), 497-528. https://doi.org/10.3102/0091732X16658650
31. Shen, C., & Ho, J. (2020). Technology-enhanced learning in higher education: A bibliometric analysis with latent semantic approach. *Computers in Human Behavior*, 104, 106177. https://doi.org/10.1016/j.chb.2019.106177.