МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Том 40, № 2

Суми – 2025

**Рекомендовано до видання вченою радою
Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка
(протокол № 10 від 28.04.2025 р.)**

Ф45 Фізико-математична освіта : науковий журнал. Том 40, № 2. Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Фізико-математичний факультет ; редкол.: О.В. Семеніхіна (гол.ред.) [та ін.]. Суми : [СумДПУ ім. А.С. Макаренка], 2025. 73 с.

Наказом МОН України №1412 від 18.12.2018 р. журнал «Фізико-математична освіта» затверджено як **фахове наукове видання категорії «Б»** у галузі педагогічних наук (13.00.02 – математика, фізика, інформатика; 13.00.10) і за спеціальностями 011, 014, 015.

Журнал індексуються наукометричною базою **Index Copernicus** Journals Master List

Автори статей несуть відповідальність за достовірність наведеної інформації (точність наведених у статті даних, цитат, статистичних матеріалів тощо) та за порушення прав інтелектуальної власності інших осіб.

Висловлені авторами думки можуть не співпадати з точкою зору редакції.

УДК 53+51]:37(051)
DOI: 10.31110/2413-1571

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Makarenko Sumy State Pedagogical University
Physics and Mathematics Faculty

ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)

PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION

Scientific Journal

Vol. 40, No 2

Sumy – 2025

Recommended for publication of the Academic Council
of Makarenko Sumy State Pedagogical University
(protocol No 10 from 28.04.2025)

F 45 Physical and Mathematical Education : Scientific Journal. Vol. 40, No 2. Makarenko Sumy State Pedagogical University, Physics and Mathematics Faculty ; O.V. Semenikhina (chief editor). Sumy : [Makarenko Sumy State Pedagogical University], 2025. 73 p.

The authors of the articles are responsible for the authenticity of the information (the accuracy of the presented information in the article, quotations, statistical materials, etc.) and for the violation of intellectual property rights of others.

Opinions expressed by the authors may not reflect the views of the editors.

UDC 53+51]:37(051)
DOI: 10.31110/2413-1571

ЗМІСТ

CONTENTS

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
scientific journal
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X **2025, 40(2)**, https://doi.org/**10.31110/fmo2025.v40i2-01**
УДК: 374

ФОРМУЛА ШНУРУВАННЯ В РОЗРІЗІ ПОЗАШКІЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

Вікторія БРИДУН ✉
Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна
Viktoriya.Brydun@lnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-3882-848X

Андрій БРИДУН
Національний університет "Львівська Політехніка", Україна
andrii.m.brydun@lpnu.ua
https://orcid.org/0000-0001-5634-0512

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Формула шнурування, відома як формула Гаусса для обчислення площі багатокутника, важлива для позашкільного вивчення математики. Вона допомагає учням зрозуміти, як застосовувати математичні знання до реальних задач і демонструє практичне використання координатної геометрії для обчислення площі будь-якого багатокутника. Цей підхід стимулює розвиток просторового мислення, аналітичних навичок та дає можливість учням вирішувати задачі, які виникають у географії, фізиці чи архітектурі.*

Матеріали і методи. *Використані теоретичні та практичні методи. До теоретичних методів належать робота з відкритими джерелами, аналіз навчальних програм, аналіз освітніх програм спеціальності "Середня освіта. Математика". Практичними методами є розв'язування типових завдань і вправ з цієї тематики, розробка нових завдань, які можна пропонувати вчителям для позашкільної роботи з учнями. Окрім традиційних зошита та олівця, для побудови багатокутників використовувалось динамічне математичне програмне забезпечення GeoGebra.*

Результати. *У роботі наведено формулу шнурування для обчислення площі багатокутника з детальним поясненням та доведенням. Представлено огляд типових задач по цій тематиці та розроблено ряд задач, які вчителі можуть пропонувати учням в межах факультативного курсу математики. Також показано, як формулу шнурування можна вивести методами лінійної алгебри та аналітичної геометрії, використовуючи визначники і векторний добуток, і застосувати для знаходження площ криволінійних фігур за допомогою теореми Гріна.*

Висновки. *Запропонована у роботі тематика може стати в нагоді вчителям математики в контексті підготовки до профільних олімпіад та проведенні факультативів чи гуртків. Взаємозв'язок шкільної математики та таких курсів як аналітична геометрія та математичний аналіз ілюструє необхідність фундаментальної базової підготовки майбутнього вчителя математики.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *площа; багатокутник; координати точки; розбиття; орієнтація; векторний добуток; формула шнурування.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Бридун В., Бридун А. Формула шнурування в розрізі позашкільної математичної освіти. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 6-13. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-01.

THE SHOELACE FORMULA IN THE SCOPE OF OUT-OF-SCHOOL MATHEMATICAL EDUCATION

Viktoriia BRYDUN ✉
Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine
Viktoriya.Brydun@lnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-3882-848X

Andrii BRYDUN
Lviv Polytechnic National University, Ukraine
andrii.m.brydun@lpnu.ua
https://orcid.org/0000-0001-5634-0512

ABSTRACT

Formulation of the problem. *The shoelace formula, also known as Gauss' formula for calculating the area of a polygon, is important for extracurricular mathematics learning. It helps students understand how to apply mathematical knowledge to real-world problems and demonstrates the practical use of coordinate geometry to calculate the area of any polygon. This approach stimulates the development of spatial thinking and analytical skills, enabling students to solve problems that arise in geography, physics, or architecture.*

Materials and methods. *The study used theoretical and practical methods. Theoretical methods include working with open sources on this topic, analyzing mathematics curricula, and analyzing educational programs for the specialty "Secondary Education. Mathematics". Also, we used practical methods to solve typical problems and exercises on this topic and developed new issues that teachers can offer for extracurricular work with students. In addition to the traditional notebook and pencil, the dynamic mathematical software GeoGebra was used to construct polygons.*

Results. *The paper presents the shoelace formula for calculating the area of a polygon with a detailed explanation and proof. An overview of typical problems on this topic is given, and several issues are developed that teachers can offer students within an optional mathematics course framework. It also shows how the shoelace formula can be derived using linear algebra and analytic geometry methods, using determinants and the cross product, and applied to find the areas of curvilinear figures using Green's theorem.*

Conclusions. *The topics proposed in the work may be helpful to mathematics teachers in preparing for specialized Olympiads and conducting electives or math clubs. The relationship between school mathematics and such courses as analytical geometry and mathematical analysis illustrates the need for fundamental basic training for future mathematics teachers.*

KEYWORDS: *area; polygon; point coordinates; partition; orientation; cross product; the shoelace formula.*

FOR CITATION: Brydun, V., & Brydun A. (2025). The shoelace formula in the scope of out-of-school mathematical education. *Physical and Mathematical Education*, *40*(2), 6-13. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-01.

ВСТУП

Постановка проблеми. У цій статті показано взаємозв’язок між координатами вершин багатокутника та його площею. Сумування добутків координат, взятих за певним правилом визначає площу довільного багатокутника без самоперетинів. Ця, на перший погляд, проста формула демонструє як математичні методи можуть бути застосовані до практичних задач у реальному житті, наприклад у геодезії, картографії чи сільському господарстві. Цю формулу можна застосовувати до неправильних багатокутників, площі яких доволі складно обчислювати традиційними методами.

Вивчення формули шнурування допомагає учням розвивати навички роботи з координатами, тренує їхню уважність і аналітичне мислення, підтверджує красу математики через елегантність і простоту обчислень.

Формула шнурування здатна мотивувати учнів, адже вони можуть бачити результати своїх обчислень у прикладних завданнях, таких як визначення площі земельної ділянки або складних фігур (Braden, 1986; Bierwirth & Meisel, 2010; Lee & Lim, 2017; Misiurewicz, 1996). Використання програмних інструментів (GeoGebra та ін.) робить навчання цікавим і сучасним. Крім того, вивчення формули шнурування підсилює зв’язок між геометрією та алгеброю, оскільки учні працюють із числами, координатами та геометричними об’єктами одночасно. Це робить її важливою частиною курсу для поглибленого вивчення математики.

Аналіз актуальних досліджень. Попри те, що формула шнурування була встановлена у 1769 році, тематика статті є актуальною у розрізі позашкільної математичної освіти, позаяк відображає нестандартний підхід до обчислення площі та взаємозв’язок з дисциплінами, які вивчають значно пізніше вже не у шкільному курсі математики.

Є кілька цікавих методів інтерпретації та доведення формули шнурування (Halton, 1995; Polster, 2006; Ross, 2015), що робить цю тему ще більш вартісною для розгляду на математичних гуртках і факультативах (Burkard, 2006; Deineko & Woeginger, 2014; Gale, 1998).

У цій статті авторами запропоновано один з методів доведення формули шнурування, розглянуто кілька базових прикладів її застосування та запропоновано ряд цікавих практичних завдань для самостійної роботи.

Мета статті. Метою написання статті про використання формули шнурування є популяризація описаного методу як практичного інструмента для розв’язання геометричних задач, а також мотивація учнів і студентів до вивчення геометрії. Стаття містить покрокові інструкції, приклади розв’язання задач та методи візуалізації, що робить формулу доступною для широкої аудиторії, зокрема вчителів, учнів і інших фахівців. Крім того, в статті на прикладі формули шнурування наведено взаємозв’язок шкільної математики з такими дисциплінами як аналітична геометрія, лінійна алгебра та математичний аналіз.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У дослідженні використовувалися теоретичні методи – вивчення літератури, наукових статей, підручників та історичних джерел, які описують походження, принципи та застосування формули шнурування; практичні методи – розв’язання задач із використанням формули для обчислення площ різних багатокутників із заданими координатами; моделювання – використання комп’ютерних таких програм як GeoGebra для візуалізації роботи формули та автоматизації обчислень; емпіричні – спостереження під час роботи з учнями під час позаурочної роботи (на засіданнях математичного гуртка МАН, під час підготовки до математичних конкурсів) та студентами спеціальності “Середня освіта. Математика”.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Формула шнурування, більш відома як формула Гаусса для знаходження площі багатокутника, вершини якого задані своїми координатами, була доведена в 1769 році Альбрехтом Мейстером. Проте авторство цієї формули приписують Карлу Фрідріху Гауссу, який довів цю формулу у віці 18 років у 1795 році, присвятивши дослідженню властивостей багатокутників доволі багато часу. В літературі можна одночасно зустріти обидві назви цієї формули: формула шнурування (the shoelace formula) та формула Гаусса.

Перевірити достовірність цієї формули можна методом розбиття довільного багатокутника без самоперетинів на трикутники, показавши, що площа трикутника визначається за допомогою алгоритму шнурування і насправді є визначником другого порядку, утвореним з координат вершин трикутника.

Перейдемо безпосередньо до формулювання та доведення формули шнурування.

Формула шнурування: Нехай в декартовій системі координат задано n вершин $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ деякого багатокутника $A_1A_2 \dots A_n$ без самоперетинів, причому напрямок нумерації вершин здійснюється проти годинникової стрілки. Тоді площу цього багатокутника можна обчислити за формулою

$$S = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - \dots - x_1y_n)$$

На перший погляд не цілком зрозуміло, де в цій формулі заховане шнурування. Проте це можна дуже добре уявити, візуалізувавши формулу в графічну ілюстрацію. Розмістимо x-координати вершин у порядку їх нумерації у вертикальний стовпчик ліворуч та y-координати у вертикальний стовпчик праворуч (див. рис. 1). З’єднаємо координати, зазначені у кожному з добутків зі знаком “$+$”, синіми відрізками та координати, зазначені у кожному з добутків зі знаком “$-$”, зеленими відрізками. Таким чином, ми отримаємо візерунок, схожий на класичне шнурування взуття.

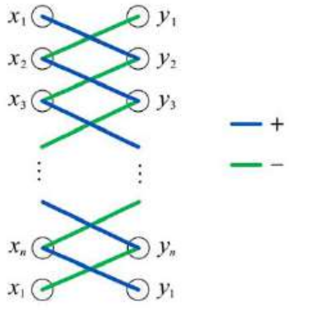


Рис. 1. Візуалізація формули шнурування
Джерело: авторська розробка.

ISSN 2413-158X (onine), 2413-1571 (print)

Доведення формули шнурування: Доведення проведемо, здійснивши кілька кроків.

Крок 1: Покажемо, що формула шнурування справедлива для трикутників, одна з вершин якого розташована у початку координат, а координати двох інших вершин пронумеровані у напрямку проти годинникової стрілки (див. рис. 2а).

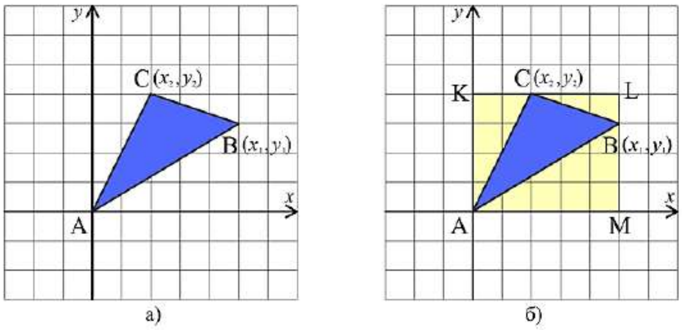


Рис. 2. Трикутник з вершиною в початку координат

Джерело: авторська розробка.

Доповнимо трикутник ABC трьома прямокутними трикутниками ABM, BLC та CKA до прямокутника AMLK та знайдемо площу трикутника ABC методом відрізання трикутників ABM, BLC та CKA від прямокутника AMLK (див. рис. 2б).

$$S_{ABC} = S_{AMLK} - S_{AMB} - S_{BLC} - S_{CKA} = x_1y_2 - \frac{1}{2}x_1y_1 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}x_2y_2 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

Враховуючи нульові координати точки A, бачимо, що в цьому випадку формула шнурування виконується.

Застосувавши аналогічні міркування, нескладно переконатись, що формула шнурування справедлива й для трикутників, вершини яких попарно належать іншим координатним чвертям. Якщо ж вершини належать різним чвертям, тоді трикутник можна розбити на два або три трикутники, деякі вершини яких належатимуть координатним осям, і обчислити площу вихідного трикутника як суму площ отриманих трикутників розбиття.

Крок 2: Покажемо, що формула шнурування справедлива для довільного трикутника (див. рис. 3а).

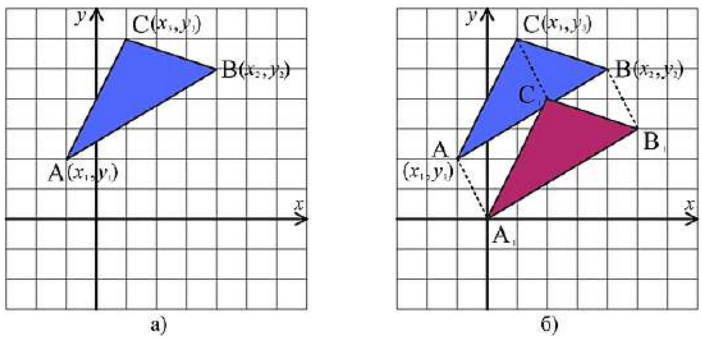


Рис. 3. Перенесення трикутника у початок координат

Джерело: авторська розробка.

Виконаємо паралельне перенесення вихідного трикутника ABC так, щоб одна з вершин потрапляла у початок координат. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що вершина A потрапляє в початок координат. Отриманий трикутник $A_1B_1C_1$ має вершини у точках $A_1(0; 0)$, $B_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ та $C_1(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ (див. рис. 3б). Використовуючи попередній крок, площа трикутника $A_1B_1C_1$ буде

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}\big((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\big) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

Крок 3: Покажемо, що формула шнурування справедлива для довільного опуклого багатокутника, який містить початок координат (див. рис. 4а).

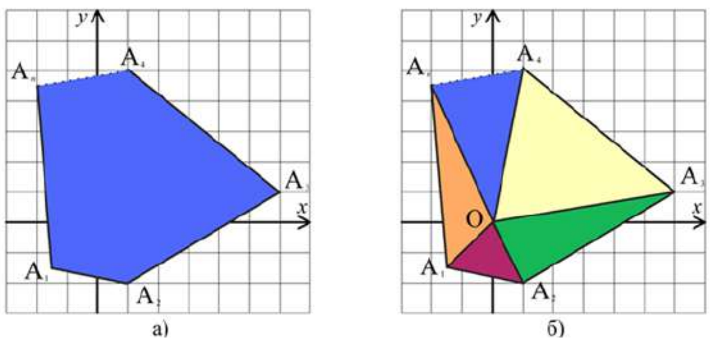


Рис. 4. Опуклий багатокутник, який містить початок координат

Джерело: авторська розробка.

Сполучивши початок координат з усіма вершинами багатокутника $A_1A_2\ldots A_n$ (див. рис. 4б), ми отримаємо розбиття цього багатокутника на трикутники, для кожного з яких справедлива формула шнурування. Додавши площі усіх трикутників, отримаємо площу багатокутника

$$S = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + \frac{1}{2}(x_ny_1 - x_1y_n) =$$
$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - \cdots - x_1y_n)$$

<u>Крок 4:</u> Зазначимо, що формула шнурування справедлива для довільного опуклого багатокутника. Це легко побачити, застосувавши до багатокутника аналогічні міркування як у кроці 2.

<u>Крок 5:</u> Формула шнурування справедлива для будь-якого багатокутника без самоперетинів. Продемонструємо хід міркувань на довільному неопуклому чотирикутнику без самоперетинів (див. рис. 5а), що дасть нам можливість узагальнити цей підхід на будь-який багатокутник.

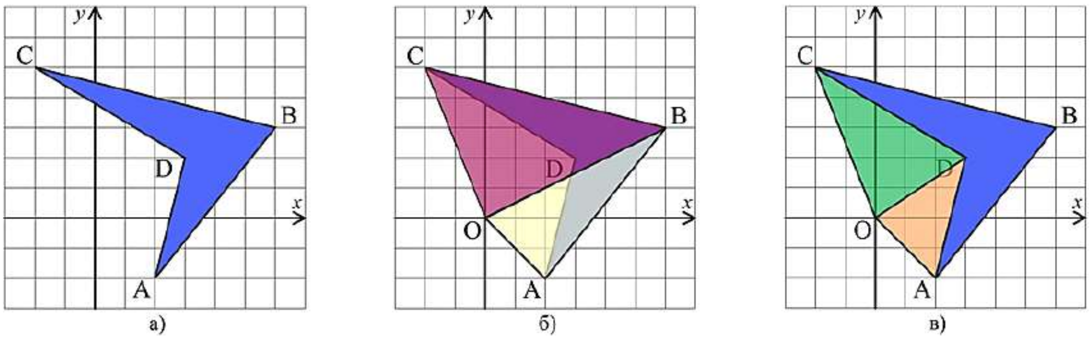


Рис. 5. Розбиття довільного багатокутника без самоперетинів

Джерело: авторська розробка.

Сполучимо усі вершини з початком координат та просумуємо площі утворених трикутників, зважаючи на орієнтацію нумерації вершин у кожному трикутнику. Трикутники OAB та OBC разом утворюють чотирикутник OABC (див. рис. 5б), трикутники OCD та ODA разом утворюють чотирикутник OCDA (див. рис. 5в). Площа чотирикутника ABCD є різницею площ чотирикутників OABC та OCDA.

Зауважимо, що нумерація вершин трикутника за годинниковою стрілкою визначає число, протилежне до площі трикутника. Вважаючи, що вершини чотирикутника A, B, C і D мають відповідно координати $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, (x_4, y_4), отримуємо, що площа чотирикутника ABCD дорівнює

$$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} - S_{OCD} - S_{ODA} =$$
$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) - \left(-\frac{1}{2}(x_3y_4 - x_4y_3)\right) - \left(-\frac{1}{2}(x_4y_1 - x_1y_4)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4)$$

Для повноти доведення нам залишилось зауважити, що в довільному багатокутнику без самоперетинів можна застосувати алгоритм додавання площ трикутників, зважаючи на орієнтацію нумерації їхніх вершин.

В процесі доведення формули шнурування ми помітили кілька важливих фактів, які сформулюємо у вигляді зауважень.

<u>Зауваження 1:</u> Площа трикутника у кроці 1 задається формулою $S = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$. Насправді число в дужках можна задати як визначник другого порядку, а саме

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

<u>Зауваження 2:</u> Враховуючи попереднє зауваження, формулу шнурування інколи записують у такому вигляді

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \ldots & \ldots \\ x_n & y_n \end{vmatrix},$$

до якого застосовують принцип обчислення визначника другого порядку, продовжений на n рядків.

<u>Зауваження 3:</u> Площу трикутника можна визначити як половину площі паралелограма, побудованого на векторах, що виходять з однієї вершини. А це, в свою чергу, є половиною довжини векторного добутку двох тривимірних векторів, що виходять зі спільної вершини трикутника (Бокало та ін., 2016). Скажімо у кроці 1 такими векторами можна взяти вектори $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, 0)$ та $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, 0)$. Тоді векторним добутком є вектор

$$\vec{v} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right) = (0, 0, x_1y_2 - x_2y_1)$$

і площею трикутника є

$$S = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

Продемонструємо використання формули шнурування на деяких практичних задачах.

Задача 1. Обчисліть площу чотирикутника ABCD, зображеного на рисунку 6.

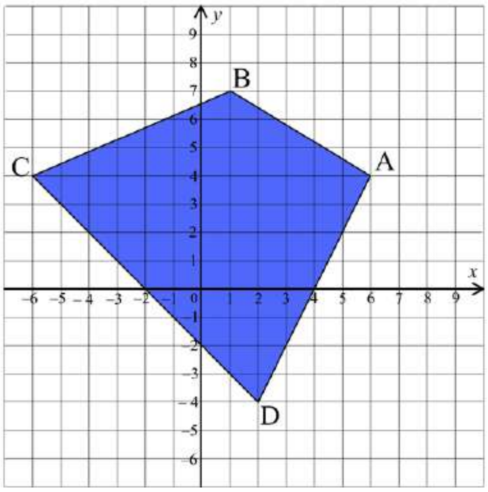


Рис. 6. Чотирикутник ABCD
Джерело: авторська розробка.

Розв'язання. З рисунка визначимо координати вершин чотирикутника: A$(6,4)$, B$(1,7)$, C$(-6,4)$ та D$(2,-4)$. Бачимо, що нумерація вершин відбувається проти годинникової стрілки. Застосувавши формулу шнурування, отримаємо, що площа чотирикутника дорівнює

$$S=\frac{1}{2}\big(6\cdot7+1\cdot4+(-6)\cdot(-4)+2\cdot4-1\cdot4-(-6)\cdot7-2\cdot4-6\cdot(-4)\big)=66\text{ од}^2.$$

У цій конкретній задачі дуже легко перевірити коректність обчислень іншим способом. Розбивши чотирикутник ABCD на два трикутники ABC та ACD зі спільною основою AC, отримаємо площу чотирикутника як суму площ трикутників, а саме

$$S=\frac{1}{2}\cdot12\cdot3+\frac{1}{2}\cdot12\cdot8=66\text{ од}^2.$$

Попередня задача містить такі дані, для яких обчислення площі чотирикутника є зручним обома запропонованими способами. Наведемо приклад задачі, в якій обчислення традиційними методами стають доволі громіздкими.

Задача 2. Обчисліть площу шестикутника ABCDEF, вершини якого розташовані у точках A$(1,-5)$, B$(8,1)$, C$(4,5)$, D$(3,1)$, E$(-4,3)$ та F$(2,-1)$.

Розв'язання. Використавши графічний калькулятор GeoGebra, можна легко переконатись, що вершини задані в порядку проти годинникової стрілки, а це нам дозволяє відразу застосувати формулу шнурування:

$$S=\frac{1}{2}(1\cdot1+8\cdot5+4\cdot1+3\cdot3+(-4)\cdot(-1)+2\cdot(-5)-(-5)\cdot8-1\cdot4-5\cdot3-1\cdot(-4)-3\cdot2-(-1)\cdot1)=$$
$$=34\text{ од}^2.$$

Задачі на використання формули шнурування можна урізноманітнити, спонукаючи учнів знайти невідомі координати однієї з вершин багатокутника при заздалегідь відомій площі.

Задача 3. В п'ятикутнику ABCDE задано координати вершин A$(-6,-8)$, B$(4,-6)$, C$(7,3)$, D$(-8,6)$ та E$(-2,a)$.

а) При якому значенні параметра a площа п'ятикутника ABCDE дорівнює 105 од^2.?

б) Які умови потрібно накласти на y-координату точки E, щоб площа п'ятикутника не перевищувала 105 од^2.?

Розв'язання. Використавши графічний калькулятор GeoGebra, можна побудувати відомі вершини і за допомогою повзунка задати координати вершини E. Це дозволяє нам побачити, що значення параметра a змінюється в межах від $-7{,}2$ до 4,8. У випадку, якщо $a\in(-\infty,-7{,}2]\cup[4{,}8,+\infty)$, п'ятикутник матиме самоперетини.

а) Обчислимо площу п'ятикутника:

$$S=\frac{1}{2}((-6)\cdot(-6)+4\cdot3+7\cdot6+(-8)\cdot a+(-2)\cdot(-8)-$$
$$-(-8)\cdot4-(-6)\cdot7-3\cdot(-8)-6\cdot(-2)-a\cdot(-6))=\frac{1}{2}(36+12+42-8a+16+32+42+24+12+6a)=$$
$$=\frac{1}{2}(216-2a)=108-a$$

Розв'язавши рівняння $108-a=105$, отримаємо, що $a=3$.

б) Щоб площа п'ятикутника не перевищувала 105 од^2., потрібно розв'язати нерівність $108-a\le105$.

Таким чином, отримаємо, що $a\ge3$. Враховуючи зазначені допустимі значення параметра a, зазначимо, що $a\in[3,4.8)$.

Зауваження: Обмеження параметра a можна знайти аналітичними методами, записавши рівняння відповідних сторін і знайшовши точки перетину цих сторін з вертикальною прямою $x=-2$, позаяк усі можливі точки E належать цій прямій.

Задачі для самостійної роботи.

Задача 1. Обчисліть площі фігур, зображених на рисунку 7.

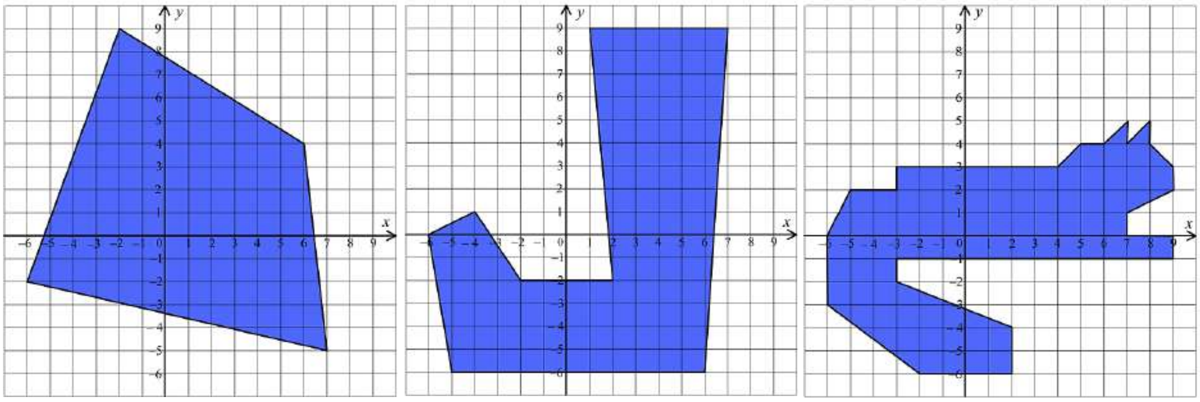


Рис. 7. Складені фігури

Джерело: авторська розробка.

Задача 2. Обчисліть площі фігур, заданих координатами вершин.

а) трикутника ABC з вершинами у точках A$(9,-2)$, B$(1,8)$, C$(-4,5)$.

б) трикутника ABC з вершинами у точках A$(-3,8)$, B$(2,-6)$, C$(-1,-4)$.

в) чотирикутника ABCD з вершинами у точках A$(-2,10)$, B$(-6,-1)$, C$(1,-4)$, D$(5,12)$.

г) дев'ятикутника ABCDEFGHI з вершинами у точках A$(-6,-4)$, B$(0,-6)$, C$(2,0)$, D$(8,-2)$, E$(10,4)$, F$(0,8)$, G$(-8,6)$, H$(-10,2)$, I$(-2,4)$.

Спробуйте у кожному з випадків обчислити площу фігури традиційними методами і порівняти складність знаходження розв'язку.

Задача 3. В шестикутнику ABCDEF задано координати вершин A$(5,-6)$, B$(9,-2)$, C$(a,2)$, D$(5,6)$, E$(-4,4)$ та F$(-8,8)$.

а) При якому значенні параметра a площа шестикутника ABCDEF дорівнює 83 од^2.?

б) Які умови потрібно накласти на x-координату точки C, щоб площа шестикутника не перевищувала 83 од^2.?

Задача 4. В яких межах знаходиться площа чотирикутника ABCD заданого координатами його вершин A$(2,-3)$, B$(4,5)$, C$(13,-5)$, D$(5,a)$?

Зв'язок формули шнурування з теоремою Гріна. Зважаючи на те, що поняття площі тісно пов'язане з поняттям інтеграла, наглядно на прикладі кардіоїди продемонструємо як відбувається перехід від формули шнурування до криволінійних інтегралів.

Кардіоїда — це плоска крива, яка має форму серця і отримується як траєкторія точки на колі, що котиться по іншому колу того ж радіуса. Побудуємо кардіоїду, обертаючи коло одиничного радіуса навколо такого ж кола (див. рис. 8а).

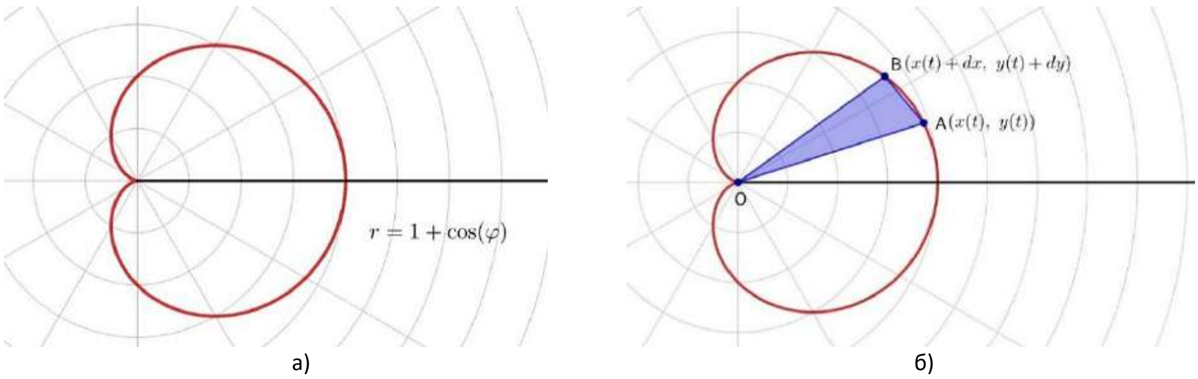


Рис. 8. Кардіоїда

Джерело: авторська розробка.

Апроксимуємо криву відрізками прямих, що сполучають точки кардіоїди. Отримаємо наближене значення площі фігури, обмеженої кардіоїдою. Збільшуючи кількість точок на кардіоїді, отримуватимемо ближче до точного значення площі. Здійснивши граничний перехід, матимемо класичну формулу для обчислення площі криволінійної фігури.

Кардіоїду, задану полярним рівнянням $r = 1 + \cos\varphi$, можна також подати параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x(t) = (1+\cos t)\cos t \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Застосувавши формулу шнурування до трикутника OAB, отримаємо, що його площа дорівнює

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\big(x(t)\cdot(y(t)+dy) - (x(t)+dx)\cdot y(t)\big) = \frac{1}{2}(x(t)\cdot dy - y(t)\cdot dx)$$

Зауважимо, що $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt$, де $x'(t) = -\sin t - \sin 2t$, $y'(t) = \cos t + \cos 2t$. Тоді

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}(x(t) \cdot y'(t)dt - y(t) \cdot x'(t)dt) = \frac{1}{2}(x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t))dt$$

Просумувавши площі усіх трикутників розбиття, для яких t змінюється в межах від 0 до 2π, отримаємо, що площа кардіоїди дорівнює

$$S = \frac{1}{2}\oint \big(x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t)\big)dt$$

Застосувавши теорему Гріна, маємо

$$S = \frac{1}{2}\int_{o}^{2\pi} \big(x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t)\big)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{o}^{2\pi} \big((1+\cos t)\cos t \cdot (\cos t + \cos 2t) - (1+\cos t)\sin t \cdot (-\sin t - \sin 2t)\big)dt = \frac{3\pi}{2}\text{ од}^2.$$

Отже, площа кардіоїди становить $\frac{3\pi}{2}$ од^2.

Сучасний вчитель математики повинен цікавитись різними напрямками математичної діяльності. Поруч з досконалим знанням шкільного курсу математики, він має розуміти, що в математиці не існує чіткої лінії, яка розмежовує математику, яку вивчають у школі, з математикою, яку вивчають у вищих навчальних закладах чи досліджують науковці. Ба більше, математика не існує відірвано від інших галузей науки і часто практичне застосування тих чи інших фактів є цілком несподіваним на перший погляд, як-от, наприклад, застосування формули шнурування у геодезії, радіолокації та радіозв'язку.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У 1899 році Георг Пік запропонував метод обчислення площ багатокутників заданих на координатній площині, вершини яких є ґратковими точками, тобто точками з цілочисельними координатами. Він показав, що площу багатокутника можна обчислити просумувавши кількість ґраткових точок всередині багатокутника з половиною кількості ґраткових точок на межі багатокутника і віднявши від цієї суми одиницю.

Подальші дослідження стосуватимуться ґрунтовного вивчення теореми Піка для знаходження площ багатокутників та вивченню взаємозв'язків між обома методами обчислення площ. Учням, які спрямовані на програмування, можна пропонувати розробку програмного забезпечення чи інтерактивних онлайн-інструментів, які дозволять швидко застосовувати формулу до складних багатокутників без самоперетинів та з можливими порожнинами всередині.

Також заплановані аналіз зв'язку формули шнурування з іншими геометричними методами, наприклад, методом трикутників чи обчисленням площі за допомогою інтегралів; вивчення можливості поширення формули шнурування на тривимірний випадок; розгляд інших способів шнурування та їхніх геометричних чи топологічних властивостей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бокало, Б.М, Бридун, В.Л., Гуран, І.Й., & Колос, Н.М. (2016). *Аналітична геометрія в прикладах і задачах: навчальний посібник.* Львів: Видавець І.Е. Чижиков.
2. Bierwirth, C., & Meisel, F. (2010). A survey of berth allocation and quay crane scheduling problems in container terminals, *European Journal of Operational Research,* 202**,** 615–627. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.05.031.
3. Braden, B. (1986). The Surveyor's Area Formula. *The College Mathematics Journal,* 17(4), 326–337. https://doi.org/10.1080/07468342.1986.11972974.
4. Burkard, Polster (2006). *The Shoelace Book: A Mathematical Guide to the Best (and Worst) Ways to Lace Your Shoes.* AMS, Mathematical world, 24, 125. http://dx.doi.org/10.1090/mawrld/024.
5. Deineko, V.G., & Woeginger, G.J. (2014). Another Look at the Shoelace TSP: The Case of Very Old Shoes. In: Ferro, A., Luccio, F., Widmayer, P. (eds) Fun with Algorithms. FUN 2014. *Lecture Notes in Computer Science*, 8496. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-07890-8_11.
6. Gale, D. (1998). The Shoelace Problem. In: Gale, D. (eds) *Tracking the Automatic ANT*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2192-0_19.
7. Halton, J.H. (1995). The shoelace problem. *The Mathematical Intelligencer,* 17, 36–41.
8. Lee, Y., & Lim, W. (2017). Shoelace formula: Connecting the area of a polygon and vector cross product. *Mathematics Teacher,* 110**,** 8, 631-636. https://doi.org/10.5951/mathteacher.110.8.0631.
9. Misiurewicz, M. (1996). Lacing irregular shoes. *The Mathematical Intelligencer,* 18, 32–34.
10. Polster, B. (2002). What is the best way to lace your shoes? *Nature,* 420, 476. https://doi.org/10.1038/420476a.
11. Pure, R. (2015). Computing Exact Closed-Form Distance Distributions in Arbitrarily Shaped Polygons with Arbitrary Reference Point. *The Mathematica Journal.* Wolfram Media, Inc.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bokalo, B.M, Brydun, V.L., Huran, I.I., & Kolos, N.M. (2016). Analytical Geometry in Examples and Problems: Textbook. Lviv: Publisher I.E. Chizhykov. (in Ukrainian)
2. Bierwirth, C., & Meisel, F. (2010). A survey of berth allocation and quay crane scheduling problems in container terminals, *European Journal of Operational Research,* 202**,** 615–627. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.05.031.
3. Braden, B. (1986). The Surveyor's Area Formula. *The College Mathematics Journal,* 17(4), 326–337. https://doi.org/10.1080/07468342.1986.11972974.

4. Burkard, Polster (2006). *The Shoelace Book: A Mathematical Guide to the Best (and Worst) Ways to Lace Your Shoes.* AMS, Mathematical world, 24, 125. http://dx.doi.org/10.1090/mawrld/024.
5. Deineko, V.G., & Woeginger, G.J. (2014). Another Look at the Shoelace TSP: The Case of Very Old Shoes. In: Ferro, A., Luccio, F., Widmayer, P. (eds) Fun with Algorithms. FUN 2014. *Lecture Notes in Computer Science*, 8496. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-07890-8_11.
6. Gale, D. (1998). The Shoelace Problem. In: Gale, D. (eds) *Tracking the Automatic ANT*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2192-0_19.
7. Halton, J.H. (1995). The shoelace problem. *The Mathematical Intelligencer,* 17, 36–41.
8. Lee, Y., & Lim, W. (2017). Shoelace formula: Connecting the area of a polygon and vector cross product. *Mathematics Teacher,* 110**,** 8, 631-636. https://doi.org/10.5951/mathteacher.110.8.0631.
9. Misiurewicz, M. (1996). Lacing irregular shoes. *The Mathematical Intelligencer,* 18, 32–34.
10. Polster, B. (2002). What is the best way to lace your shoes? *Nature,* 420, 476. https://doi.org/10.1038/420476a.
11. Pure, R. (2015). Computing Exact Closed-Form Distance Distributions in Arbitrarily Shaped Polygons with Arbitrary Reference Point. *The Mathematica Journal.* Wolfram Media, Inc.

| *Матеріал надійшов до редакції: 06.02.2025 р.* | *Прийнято до друку: 15.03.2025 р.* | *Опубліковано: 29.04.2025 р.* |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2025, 40(2), https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-02
УДК: 37:004:[018+ 161/162]

АНАЛІЗ БІБЛІОМЕТРИЧНИХ ДАНИХ ДОСЛІДЖЕННЯ ФЕНОМЕНУ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ (УКРАЇНОМОВНИЙ КОНТЕНТ GOOGLE SCHOLAR, 2020-2023 р.р.)

Наталія ГАБРУСЄВА ✉
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна
gabrusyeva@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1229-4766

Андрій КРИСЬКОВ
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна
кryskov.te@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1437-4823

Сергій АЛІЛУЙКО
Наукова установа «Тернопільський інститут наукових досліджень», Україна
alilujko@tind.com.ua
https://orcid.org/0009-0002-5081-8997

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Сучасні інформаційні технології відкривають нові можливості для досліджень, у тому числі педагогічних. Інформацію про актуальні тенденції опрацювання наукової проблеми можна отримати з аналізу бібліометричних даних, доступ до яких сьогодні значно полегшений завдяки обширним наукометричним базам (Web of Science, Scopus, Google Scholar тощо). Такі відомості дають можливість узагальнити попередні результати, визначити сучасні спрямування та специфіку досліджуваної проблематики, прогнозувати перспективи наступних досліджень. Формування критичного мислення є одним із головних завдань педагогічного процесу та модернізації української освіти. Для практичної реалізації поставленої мети важливим етапом є вивчення бібліометричних даних останніх публікацій з означеної проблематики.*

Матеріали і методи. *У статті проаналізовано основні бібліометричні показники україномовних праць, які досліджують феномен критичного мислення (Google Scholar, 2020-2023 р.р.). Виконано порівняльний аналіз із аналогічними дослідженнями Web of Science (2000-2021 р.р.). Для аналізу бібліометричних джерел Google Scholar у здійсненні контент-аналізу ми використовували Power BI Desktop, а для статистичного аналізу даних Microsoft Excel та IBM® SPSS® Statistics.*

Результати. *Встановлено, що частка досліджень критичного мислення українськими вченими найбільша в освітній сфері. Здійснено статистичну обробку отриманих результатів за формою подачі матеріалів та сферою наукового пошуку. Проведено аналіз кількості цитувань одержаних документів в конкретні роки, який свідчить про зацікавленість читачів у розробках визначеного спрямування. За змістом ключових слів виділено групи, які вказують на особливості дослідження критичного мислення українськими вченими та напрямки наукових розвідок на сучасному етапі. Статистично обґрунтовано багатовекторність досліджень вітчизняних освітян. Окреслено основні методи, підходи, методики та технології формування критичного мислення. Встановлено акцентування сучасних педагогічних технік розвитку критичного мислення на формуванні медіаграмотності та використанні інформаційно-комунікативних технологій. Зафіксовано негативні фактори,*

ANALYSIS OF BIBLIOMETRIC DATA ON THE CRITICAL THINKING PHENOMENON STUDY (UKRAINIAN-LANGUAGE GOOGLE SCHOLAR CONTENT, 2020-2023)

Nataliia HABRUSIEVA ✉
Ternopil Ivan Puluj National Technical University, Ukraine
gabrusyeva@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1229-4766

Andrii KRYSKOV
Ternopil Ivan Puluj National Technical University, Ukraine
кryskov.te@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1437-4823

Sergii ALILUIKO
Scientific Institution «Ternopil Institute of Scientific Research», Ukraine
alilujko@tind.com.ua
https://orcid.org/0009-0002-5081-8997

ABSTRACT

Formulation of the problem. *Modern information technologies open up new opportunities for research, including pedagogical one. Information about current trends in the development of a scientific problem can be obtained from the analysis of bibliometric data, access to which is now greatly facilitated by extensive scientometric databases (Web of Science, Scopus Google Scholar, etc.). Such information makes it possible to summarise preliminary results, identify current trends, emphases, specifics of the issues under study, and predict the prospects for future research. Formation of critical thinking is one of the main tasks of pedagogical process and modernisation of Ukrainian education. For the practical implementation of this task, an important step is to study the bibliometric data of recent publications on the subject.*

Materials and Methods. *The article analyses the main bibliometric indicators of Ukrainian-language works that study the phenomenon of critical thinking (Google Scholar, 2020-2023). A comparative analysis with similar studies of Web of Science (2000-2021) is carried out. For the analysis of bibliometric sources from Google Scholar in conducting content analysis, we used Power BI Desktop, while Microsoft Excel and IBM® SPSS® Statistics were employed for statistical data analysis.*

Results. *It is established that the share of critical thinking research by Ukrainian scientists is the largest in the educational sphere. Statistical processing of the documents obtained as a result of the search for "critical thinking" by the form of materials submission and the field of scientific research was carried out. An analysis of the number of citations of the received documents in specific years is carried out, which indicates the interest of readers in the developments of a certain direction. According to the content of the keywords, the groups indicating the peculiarities of the critical thinking study by Ukrainian scientists at the present stage and the directions of scientific research are allocated. The multidirectionality of research by Ukrainian educators is statistically substantiated. The main methods, approaches, techniques, and technologies for forming critical thinking in recent years are outlined. The emphasis of modern pedagogical methods for the development of critical thinking on the formation of media literacy and the use of information and communication technologies is determined. The negative factors* *які впливають на формування критичного мислення, зазначені українськими вченими у досліджуваний період.*

Висновки. *Перспективи подальших досліджень вбачаємо в використанні отриманих результатів аналізу бібліометричних даних для уточнення шляхів формування критичного мислення у здобувачів освіти та використання їх у педагогічній практиці.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *бібліометричні дані; критичне мислення; Google Scholar; статистичний аналіз; освітні тенденції.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Габрусєва Н., Криськов А., Алілуйко С. Аналіз бібліометричних даних дослідження феномену критичного мислення (україномовний контент Google Scholar, 2020-2023 р.р.). *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 14-22. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-02.

that influence the formation of critical thinking, noted by Ukrainian scientists during the study period, are recorded.

Conclusions. *We see prospects for further research in utilizing the obtained results of bibliometric data analysis to refine the approaches to developing critical thinking in learners and applying them in pedagogical practice.*

KEYWORDS: *bibliometric data; critical thinking; Google Scholar; statistical analysis; educational trends.*

FOR CITATION: Habrusieva, N., Kryskov, A., & Aliluiko, S. (2025). Analysis of bibliometric data on the critical thinking phenomenon study (Ukrainian-language Google Scholar content, 2020-2023). *Physical and Mathematical Education*, *40*(2), 14-22. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-02.

ВСТУП

Критичне мислення – категорія, яка тривалий час привертала увагу дослідників у сфері соціальних наук, зокрема освітніх. Е. Алтун та Н. Їлдирим наголошують: «це одна з навичок навчання та інновацій, а також одна з найчастіше згадуваних компетенцій, яка вважається важливою як для академічного, так і для кар'єрного успіху. Вважається, що вона відіграє центральну роль у логічному мисленні, прийнятті рішень та вирішенні проблем» (Altun & Yildirim, 2023).

В реаліях війни росії проти України, у тому числі інформаційної, критичне мислення є необхідною умовою виживання. Якщо у попередні століття отримання інформації було досить проблематичним, відчувався брак джерел («Хто володіє інформацією – володіє світом» (В. Черчилль)), то сьогодні яскраво виражені протилежні тенденції – у морі інформації, необмежений доступ до якої є однією з об'єктивних ознак сучасності, потрібно викристалізувати раціональне зерно, відповідно до якого людина вибудовує власну, суб'єктивну позицію щодо сприйняття тих чи інших подій, ситуацій, тверджень, ідей тощо. Жахливий приклад зомбованості громадян росії, які стали гвинтиками у гібридній війні путінської пропаганди, свідчить про необхідність звернення уваги на формування критичного мислення як важливої умови становлення не просто компетентного фахівця, а людини освіченої та всебічно розвиненої, здатної аналізувати, критикувати отриману інформацію та самостійно робити висновки.

Постановка проблеми. На сьогоднішній день формування критичного мислення є одним із головних завдань освітнього процесу. Для його практичної реалізації важливим етапом є вивчення бібліометричних даних, узагальнення досліджень феномену критичного мислення українськими та зарубіжними вченими з використанням можливостей сучасних інформаційно-комунікативних технологій.

Аналіз актуальних досліджень. У своєму дисертаційному дослідженні М. Починкова стверджує, що «витоки поняття критичного мислення та сучасна концепція критичного мислення своїм корінням сягає саме філософських наук, зокрема гносеології та логіки» (Починкова, 2021, с. 52) та формувалась від античності до наших днів. На сьогодні, критичне мислення найбільше розробляється філософією, психологією та освітянськими науками. Проблема дослідження цього феномену у зв'язку з своєю багаторівневою природою та різноманітністю поглядів, являє собою складну суперечливу конструкцію, про що свідчать велика кількість підходів, трактувань, визначень. У 1990 р. П.А. Фасіоне об'єднав 46 експертів з Американської філософської асоціації (APA) для проведення дослідження методом Дельфі, суть якого полягає у тому, щоб за допомогою серії послідовних дій (анкетувань, мозкових штурмів, опитувань тощо) отримати узгоджений висновок. В рамках цього простору конвергенції було визначено шість основних навичок — інтерпретація, аналіз, оцінка, висновок, пояснення та саморегуляція, які включали 16 піднавичок критичного мислення. Після широкої наукової дискусії критичне мислення було умовно визначене як «когнітивний процес, в якому відбувається розвиток специфічних навичок та нахилів що допомагає нам вирішувати повсякденні проблеми» (Marcos-Vílchez et al., 2024). Ще однією із спроб узагальнення та виділення сутнісних характеристик критичного мислення, яка в цілому перегукується з попередньо зазначеними висновками, є стаття Т. Мура (Суїнбернський технологічний університет, Лілідейл, Мельбурн, Австралія) (Moore, 2013). Науковець інтерпретує широкий феномен критичного мислення через сім визначень: судження, скептицизм, оригінальність, сприйнятливе читання, раціональність, активна участь у здобутті знань та саморефлексія.

За введення критичного мислення в освітню практику виступав видатний американський педагог Дж. Дьюї (1859-1952 р.р.).У своїй роботі «Як ми думаємо?» (Dewey, 2022) він визначив «рефлексивне мислення» як одну з необхідних умов становлення особистості. Ця праця викликала жвавий інтерес науковців, а з розвитком технологій у XXI ст. питання формування критичного мислення набуло особливої актуальності та широко досліджувалось вітчизняними та зарубіжними вченими. Для прикладу, в опрацьованих нами статтях (Cliff et al.,2014; Halpern, 2013; Tan, 2017) критичне мислення визначалося як дуже бажана навичка чи «життєва необхідність».

Міжнародні організації визначають критичне мислення як фундаментальний елемент, що дозволяє молодому фахівцю діяти в складних та невизначених умовах. Зокрема, масштабні наробки запропонували: проєкт Організації економічної співпраці та розвитку (OECD) «Майбутнє освіти та навиків 2030»; звіт Програми міжнародної оцінки здобувачів освіти (PISA) (2021 г.); Організація Об'єднаних Націй з питань освіти, науки и культури (UNESCO) в рамках Глобальної програми «Освіта-2030» у відповідності з цілями стійкого розвитку (SDG) (2017 г.), зокрема SDG-4 «Якісна освіта та Європейська комісія (ЕС) у документах з рекомендаціями Ради Європейського союзу «Ключові компетенції для навчання впродовж життя» (2019 р.) (Marcos-Vílchez et al., 2024). У 2015 р. експертами та роботодавцями на форумі у Давосі було проаналізовано десять ключових умінь та прогнозовано динаміку навичок XXI ст. у три етапи – 2015, 2020 та 2025 р.р., серед яких у всіх періодах фігурує критичне мислення. Звичайно, такі тенденції знайшли вираження у різних нормативно-правових документах, зокрема українських Стандартах вищої освіти, які визначали критичне мислення однією з ключових компетентностей.

Отже, назріла потреба систематизувати та узагальнити попередні здобутки. Хоча у сфері соціальних наук традиційно здійснюється велика кількість бібліометричних досліджень (термін «бібліометрія» був введений А. Прітчардом (Pritchard, 1969) і стосується кількісного аналізу наукових публікацій (Roemer & Borchardt, 2015). Говард Д. Уайт визначає бібліометрію як «кількісне дослідження літератури, відображене в бібліографії» (White,1989), однак дослідженням формування критичного мислення в освіті відводилось мало уваги.

Ключовою працею, яка узагальнила бібліометричні дані Web of Science, нами визначена опублікована у 2021 р. робота М. Донг, Ф. Лі та Х. Чанг (Dong et al., 2023), на яку ми і орієнтувалися. За результатами аналізу наукометричної бази Web of Science, опублікованими у вказаній статті, дослідження критичного мислення проводилися у період з 2000-2021 р.р. і охопило 101 напрям. З усіх цих напрямів найбільша частка досліджень у галузі освіти (становила 55,392%).

М. Донг, Ф. Лі та Х. Чанг, здійснивши контент-аналіз ключових слів виділили шість змістовних кластерів, які найчастіше повторювались:

1. Розуміння і оцінка критичного мислення – «Вирішення проблем є фундаментальною метою творчого та критичного мислення, а міркування та проблемне навчання є важливими способами досягнення цієї мети».

2. Кластер, пов'язаний із психологією та когнітивними факторами критичного мислення. Найбільш репрезентативними ключовими словами є «переконання», «самоефективність», «мотивація», «пізнання» та «метапізнання».

3. Кластер, пов'язаний з освітою та способами навчання, представлений ключовими словами «освіта», «медсестринська освіта», «онлайн», «симуляція» та «технологія».

4. Кластер, пов'язаний із навчанням критичному мисленню, про що свідчать такі ключові слова, як «студенти», «навчання», «педагогіка» та «спільне навчання».

5. Кластер, пов'язаний із навичками, схильністю до критичного мислення та мовною педагогікою у вищій освіті, представлений такими словами як «навички», «схильність» та «вища освіта».

6. Кластер, пов'язаний із перевіркою здатності до критичного мислення та створення моделі його формування в освітньому процесі.

Крім того, проаналізувавши цитованість досліджуваних статей, автори дійшли висновку, що найбільш привертають увагу наукової спільноти вивчення можливості та ефективності навчання критичному мисленню. У деяких публікаціях були також підкреслені окремі важливі елементи для розвитку критичного мислення, такі, як діалоги та виразна здатність, різноманітність або автентичність досвіду, медіакомпетентність, а також стратегії та методи, що сприяють розвитку критичного мислення. Одним із дослідницьких завдань найцитованішої публікації (Р.М. Каріні, Дж. Д. Кух та С.П. Кляйн «Залучення студентів та навчання студентів: перевірка зв'язків», опублікована у 2006 р. (Carini et al., 2006) є уточнення визначень критичного мислення. На час проведення дослідження М. Донг, Ф. Лі та Х. Чанг ця стаття цитувалася 679 разів, а на момент проведення нашого аналізу кількість цитувань сягнула 971.

Звичайно, українська педагогіка, особливо на сучасному, гостро кризовому етапі (зокрема, через військову агресію росії), має власні специфічні особливості, в тому числі і у визначенні ключових пріоритетів дослідження та шляхів формування критичного мислення. Проаналізувавши дані наукометричної бази Google Scholar, аналітичних бібліометричних розвідок, які стосуються дослідження феномену критичного мислення, у працях українських вчених нами виявлено не було.

Метою дослідження є аналіз бібліометричних даних україномовних статей, індексованих у Google Scholar (2020-2023 р.р.), відібраних за критерієм пошуку словосполучення «критичне мислення».

Мета статті зумовила виконання низки завдань:

1.З'ясувати, скільки публікацій та в яких сферах дослідження критичного мислення було опубліковано за період 2020-2023 р.р. вітчизняними вченими.

2.Визначити, які ключові слова використовувалися найчастіше.

3.Проаналізувати, які публікації цитувалися найбільше.

На основі здійсненого аналізу визначити провідні напрямки досліджень вітчизняними вченими феномену критичного мислення.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

На даному етапі у педагогічних дослідженнях наявні інформаційні технології та технічні засоби, за допомогою яких маємо можливість отримати доступ до нових бібліографічних джерел, проаналізувати великий об'єм інформації, обрахувати статистичні дані та виділити ключові моменти сучасних наукових розвідок. До них можна віднести VOSviewer та CiteSpace – програмні інструменти для побудови та візуалізації бібліометричних мереж, які спеціалізуються на демонстрації мережі спільного цитування та відображенні структури галузі досліджень. Саме VOSviewer та CiteSpace були використані М. Донг, Ф. Лі та Х. Чанг при аналізі бібліометрії Web of Science. Ці програми були протестовані нами, проте на сьогоднішній день у цих інструментах відсутня можливість роботи з україномовним контентом.

Тому для аналізу бібліометричних джерел Google Scholar у здійсненні контент-аналізу ми використовували Power BI Desktop, а для статистичного аналізу даних – Microsoft Excel та IBM® SPSS® Statistics.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Google Scholar (https://scholar.google.com/) – відкрита наукометрична база даних від найпотужнішої пошукової системи Google, розробленої Анураґом Ачар'я (Anurag Acharya). За наявними даними (Назаровець, 2016 за Копанєва, 2007), розмір бази даних Google Академія (станом на 2007 р.), становив понад 160 млн унікальних документів, що майже в тричі перевищувало охоплення платних конкурентів, таких як Web of Science від Thomson або Scopus від Elsevier. До бази даних Google Scholar потрапляють як посилання на повнотекстові матеріали в мережі, так і відомості про ті документи, у яких доступні лише анотація або бібліографія. З точки зору реальних показників цитування для україномовних авторів, Google Scholar представляє більшу зацікавленість, ніж бібліометричні комерційні платформи Web of Science або Scopus, які опрацьовують менше 2% публікацій українських науковців (Черніг. нац.технолог. ун-т, 2015).

За запитом «критичне мислення» система показала 15300 збігів за документами, опублікованими у 2020-2023 р.р. (станом на січень 2024 р.), що свідчить про інтерес вітчизняної педагогіки до даної категорії. У результати пошуку ввійшли публікації, у назві яких, у ключових словах чи анотації зустрічалось словосполучення «критичне мислення». Таким чином знайдено 923 документи, які перебувають у відкритому доступі.

Аналіз кількості публікацій, сфер дослідження критичного мислення та форми подачі матеріалів українськими вченими (Google Scholar, 2020-2023 р.р.)

Як і у аналізі (Dong et al., 2023) Web of Science, найбільша частина дослідження критичного мислення українськими вченими відбувалась у галузі освіти. (89,27% від загальної кількості отриманих документів (Рис. 1).

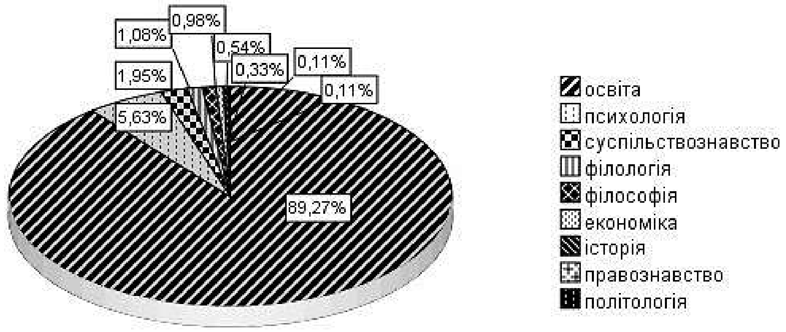


Рис. 1. Аналіз за сферами дослідження (% від кількості документів)
Джерело: авторська розробка.

У зв'язку з такою переважаючою кількістю публікацій, які стосуються саме освітньої сфери (варто наголосити, що отриманий нами результат становить на 33,88% більше, ніж у відповідних бібліометричних дослідженнях Web of Science (Dong et al., 2023)), основну увагу нашої розвідки було спрямовано саме на визначення сучасних тенденцій розвитку та формування критичного мислення в українській освіті.

Проаналізувавши основні форми, у яких було подано результати досліджень, ми отримали такі дані (Рис. 2):

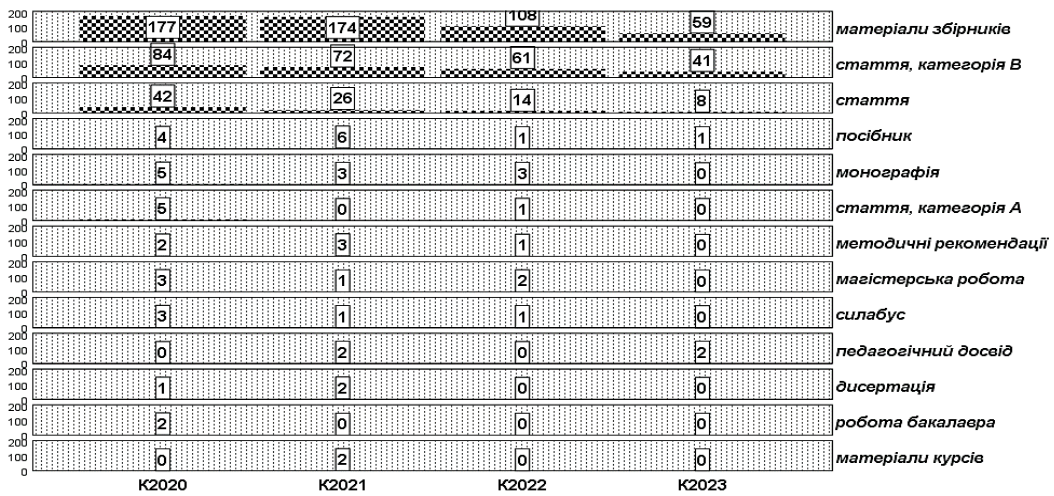


Рис. 2. Аналіз за формою подання результатів досліджень (кількість документів)
Джерело: авторська розробка.

Найбільша кількість досліджень була опублікована у збірниках матеріалів, тез конференцій та семінарів – 518 документів, що становить 56% від загальної кількості. На другому місці – статті, опубліковані у вітчизняних та зарубіжних періодичних виданнях – 39%, причому переважну більшість складають статті, опубліковані в українських фахових виданнях (категорія В) – 28% від загальної кількості.

Серед журналів категорії А, у яких опубліковано результати досліджень щодо формування критичного мислення, беззаперечним лідером, станом на січень 2024 р. є міжнародне електронне наукове фахове видання «Інформаційні технології і засоби навчання» (71% опублікованого україномовного контенту).

Статистичний аналіз ключових слів у дослідженнях критичного мислення українськими вченими (Google Scholar, 2020-2023 р.р.)

З опрацьованих джерел ми отримали 4459 ключових слів та словосполучень. У працях, в яких ключові слова не вказувались авторами, вони встановлювались методом контент-аналізу. Потрібно зазначити, що словосполучення «критичне мислення» відразу було видалене з переліку, оскільки саме за його наявністю визначалась вибірка. Після частотного аналізу в програмі IBM® SPSS® Statistics було з'ясовано 20 позицій, які найчастіше зустрічаються (Рис. 3).

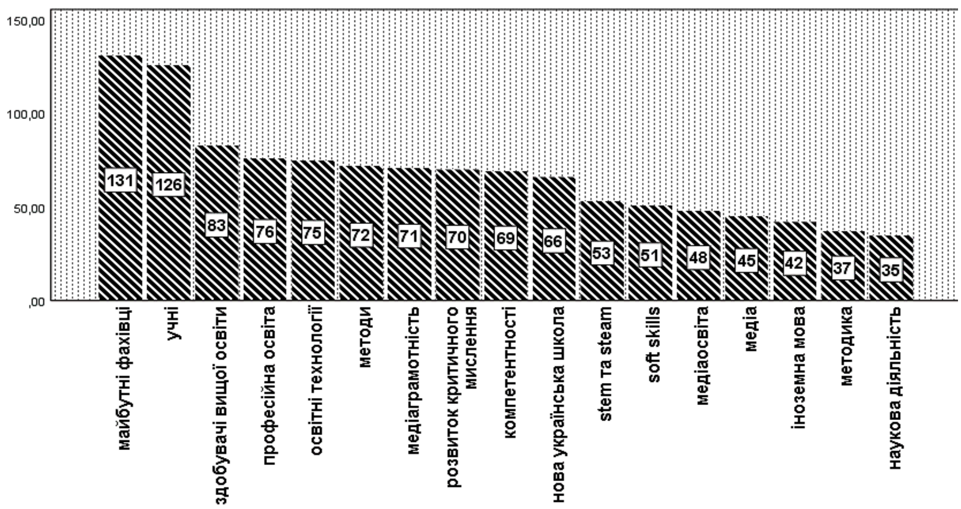


Рис. 3. Найбільш вживані ключові слова за запитом «критичне мислення» у Google Scholar (січень, 2024)
Джерело: авторська розробка.

Після частотного аналізу (IBM® SPSS® Statistics) та редагування (об'єднання близьких за змістом слів та синонімів, узгодження однини-множини, обрізання закінчень словосполучень тощо – Power BI Desktop) виділені такі основні змістові групи ключових слів, що зустрічаються в отриманих нами результатах (Табл.1):

Таблиця 1. Кількість ключових слів за групами дослідження

Групи ключових слів	Кількість
Об'єкти дослідження	888
Підходи, методи, форми формування критичного мислення	679
Сфери дослідження	426
Визначення суті критичного мислення та пов'язаних факторів	406
Медіа-група	404
Група компетенцій та компетентностей	341
ІКТ-група	326
Перспективи розвитку освіти	287
Негативні фактори	101
Всього:	3858

Джерело: авторська розробка

Найбільшу кількість ключових слів становила група, умовно названа нами «Об'єкти дослідження». До неї увійшли ключові слова, які вказують на вікові, професійні чи інші особливості об'єктів формування критичного мислення. Найбільш вживаними у цій групі є «майбутні фахівці», «учні», «здобувачі вищої освіти» тощо. Інформативним є широке вживання у цій групі ключових слів та словосполучень: «нова українська школа» (66 згадувань), «інклюзія» (33 згадування), «навчання впродовж життя» (24 згадування) тощо, які свідчать про багатовекторність досліджень.

Другою за кількістю ключових слів стала група «Підходи, методи, форми формування критичного мислення». Найчастіше згадувались загальні категорії – «освітні технології», «методи», «методика», «технології розвитку критичного мислення» тощо. Проте, можна зробити висновки і про конкретні механізми формування критичного мислення, які найчастіше використовуються в освітній практиці: словосполучення «наукова діяльність» серед ключових слів зустрічається 35 разів, «проєктне навчання» – 29, «ігрові технології» – 24, «дослідницька діяльність» – 23, «проблемно-орієнтоване навчання» – 22, «візуалізація» – 17, «міждисциплінарний підхід» – 17, «таксономія Б. Блума» – 14, «дискусії» – 12, «кейс-метод» – 7 тощо.

Третя група – «Сфери дослідження» вказує, в основному, на предмети, під час вивчення яких відбувається розвиток критичного мислення. Перші сходинки тут займають: «іноземна мова» – 42 згадування, «історія» – 32, «українська мова» – 29, «англійська мова» – 25, «природничі науки» – 17, «музичне виховання» – 16, «медична освіта»– 14, «філософія» – 14, «читання» – 14, «екологія» – 13 тощо.

Четверта група ключових слів – «Визначення суті критичного мислення та пов'язаних факторів» – включає ключові слова, які розкривають зміст уявлення про феномен критичного мислення та вказують на фактори, які впливають на його визначення. Для прикладу: «творче мислення» – 30 згадувань, «креативність» – 29, «рефлексія» – 22, «когнітивні процеси» – 11, «психологічні чинники» – 8, «ефективність» – 7, «інтелект» – 7, «критичність» – 7, «самовдосконалення» – 7, «емоційний інтелект» – 6 тощо.

Оскільки реалії повсякденного життя визначають актуальність та впливають на напрями досліджень (у тому числі й освітніх), велика кількість отриманих нами результатів виявилися дотичними до медіа-тематики. Це й не дивно, адже в аналізований нами період (2020-2023 р.р.) Україна зіштовхнулась з серйозними викликами. Всі пам'ятають, як напружено відслідковували у засобах масової інформації будь-які новини, що стосувались розповсюдження covid-19, відсотку летальних випадків, вакцинації тощо. На сьогодні медіаресурси дають нам можливість спостерігати за подіями на фронті, аналізувати інформацію про взаємодію із закордонними партнерами, перспективи досягнення Перемоги тощо. Не секрет, що медіапростір переповнений фейками ворожої пропаганди, неправдивою чи спотвореною інформацією. І без розвиненого критичного мислення із цим не впоратися. Особливо вразливими є діти, молодь, студентство, які в умовах невизначеного майбутнього та недостатньої особистісної зрілості часто потрапляють під вплив фейкових новин. Тому п'ятою групою ми виокремили «Медіа-групу», ключові слова якої: «медіаграмотність» – зустрічається 71 раз, «медіа-освіта» – 48, «медіа» – 45, «інформаційна грамотність» – 34, «інформація» – 31, «інформаційна безпека» – 18, «інформаційне суспільство» – 16, «інтернет-ресурси» – 15, «медіакомпетентність» – 13, «громадянська освіта» – 12 тощо.

Шоста група ключових слів узагальнює поняття, які вказують на критичне мислення як одну з основних наскрізних навичок та визначають компетентності та компетенції, необхідні для його формування. До них належать: «soft skills» – 51 згадування, «комунікативна компетентність» – 22, «компетентнісний підхід» – 17, «професійна компетентність» – 14, «hard skills» – 12, «іншомовна компетентність» – 10, «комунікативні навички» – 8; «конкурентоздатність» –7, «лідерська компетентність» – 6, «математична компетентність» – 6 тощо.

Інформаційно-комунікативні технології надійно увійшли в реалії сьогодення. Велика кількість досліджень критичного мислення пов'язана саме з використанням ІКТ в освітньому процесі. Тому нами була виділена сьома змістова група ключових слів «ІКТ-група». Найчастіше в цій категорії зустрічались: «stem та steam» –53 згадування, «інновації» – 31, «інтерактивні технології» – 27, «дистанційне навчання» – 21, «інноваційні технології» – 17, «інформаційно-комунікативні технології» – 17, «інтерактивні методи» – 15, «цифрова грамотність» – 13, «електронний ресурс» – 9, «інноваційні підходи» – 8 тощо.

Восьма група ключових слів об'єднана нами під назвою «Перспективи розвитку освіти» та стосується питань реформування вітчизняної освіти і визначення пріоритетних напрямків її розвитку. У цю групу ввійшли ключові слова, найбільш вживаними серед яких є «освітній процес» – 29 згадувань, «освіта» – 24, «інтеграція» – 22, «якість освіти» – 16, «навчально-пізнавальна діяльність» – 15, «зарубіжний досвід» – 12, «цінності» –12, «освітнє середовище» – 11, «стратегії» – 11 тощо.

В останню, найменш чисельну, групу під назвою «Негативні фактори», ми об'єднали ключові слова, які вказують на негативні тенденції у формуванні критичного мислення. До таких належать: «інформаційна загроза» – 18 згадувань, «інформаційна війна» – 11, «фейк» – 11, «війна» – 10, «загроза» – 7, «виклики» – 6, «вплив» – 6, «covid-19» – 6; «пропаганда» – 6; «умови воєнного часу» – 4 тощо.

За описаними групами нами був здійснений аналіз середніх значень згадувань ключових слів. Результати подані на Рис. 4.

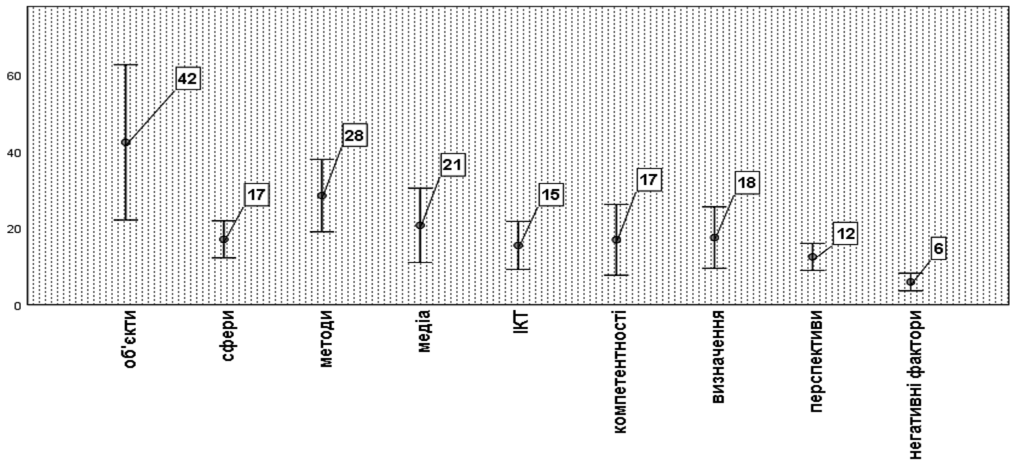


Рис. 4. Аналіз середніх значень згадувань ключових слів по виділених групах

Джерело: авторська розробка.

Статистика цитувань бібліометричних даних публікацій з формування критичного мислення (Google Scholar, 2020-2023 р.р.)

Наступним етапом нашої роботи став підрахунок статистики цитувань в період з 2020 по 2023 р.р.

Опрацьовані публікації, за нашими підрахунками, цитувались 1421 раз (Рис. 5).

Найбільше цитувались матеріали, опубліковані в українських та зарубіжних періодичних виданнях – 807 разів, що становить 57% від загальної кількості цитувань. Попри значно меншу кількість статей, опублікованих у журналах категорії А, кількість їх цитувань достатньо вагома – 12% від загальної кількості цитувань. Матеріали збірників цитувались 531 раз (37% від загальної кількості цитувань).

Аналіз кількості цитувань за роками засвідчив, що починаючи з 2020 р. вона суттєво знизилась. Якщо станом на 2020 р. зафіксоване цитування 570 документів, то у 2021 р. – 395 (69% від попереднього року), 2022 – 361 (63% від 2020 р.), а у 2023 – 95 (17% від 2020 р.). Висновки, вважаємо, робити завчасно, адже станом на січень 2024 року ще не всі індексовані праці за 2023 р. відображаються у результатах пошуку Google Scholar, та й абсолютно логічно, що чим більше часу проходить з моменту публікації, тим більше дослідників мають можливість звернути на них увагу та процитувати.

Проте, деякий відсоток спаду, на нашу думку, пов'язаний з зниженням інтенсивності наукової роботи українських вчених у зв’язку з пандемією covid-19 та війною росії проти України.

Найбільш цитовані публікації українських вчених подано у Табл. 2:

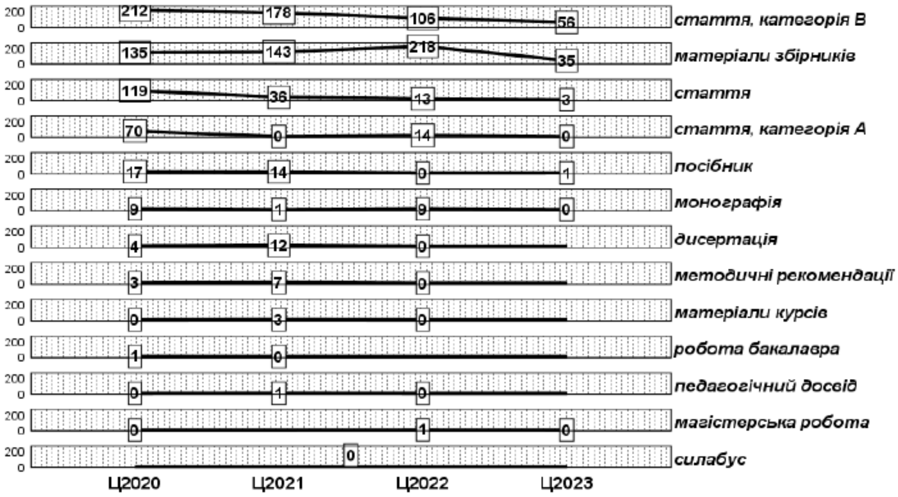


Рис. 5. Аналіз кількості цитувань у різних формах подання результатів досліджень

Джерело: авторська розробка.

Таблиця 2. Найбільш цитовані роботи (Google Scholar, станом на січень 2024 року)

№	Бібліографічні дані	К-сть цитувань
1.	Ноздрова, О. П. (2022). Формування професійної компетентності майбутнього вчителя у закладах вищої освіти. *Сучасні проблеми навчання і виховання: збірник наукових праць.* Упорядник І. О. Бартєнєва. Одеса, С. 112-122.	161
2.	Гриневич, Л. М., Морзе, Н. В., & Бойко, М. А. (2020). Наукова освіта як основа формування інноваційної компетентності в умовах цифрової трансформації суспільства. *Інформаційні технології і засоби навчання*, Т. 77, №. 3, С. 1-26.	47
3.	Шимкова, І., Цвілик, С., & Гаркушевський В. (2020). STEAM-підхід як засіб розвитку творчих здібностей у підготовці майбутніх учителів трудового навчання та технологій. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training Methodology Theory Experience Problems*, С. 173-184.	23
4.	Грошовенко, О. П., Пахальчук, Н. О., & Стахова, І. А. (2021). Технології формування природничо-екологічної компетентності молодших школярів», *Publishing House “Baltija Publishing”*, С. 31-34.	22
5.	Олійник, В. В., Самойленко, О. М., Бацуровська, І. В., & Доценко, Н. А. (2020). STEM- освіта в системі підготовки майбутніх інженерів. *Інформаційні технології і засоби навчання,* Т. 80, № 6, С. 129-139.	15
6.	Кірдан, О. & Кірдан, О. (2021). Формування soft skills здобувачів вищої освіти в освітньому процесі закладу вищої освіти. *Психолого-педагогічні проблеми сучасної школи*, №. 2 (6), С. 152-160.	14
7.	Друшяк, М. Г.,. Семеног, О. М, Грона Н. В., Пономаренко, Н. П., & Семеніхіна, О. В. (2022). Типологія інтернет-ресурсів для розвитку інфомедійної грамотності молоді. *Інформаційні технології та засоби навчання*, Т. 88, №2, С. 1–22.	14
8.	Мальчикова, Д. С., Молікевич, Р. С., & Саф’яник, І. С. (2021). Імітаційні та ігрові STEM-технології і практики на уроках природничо-математичного циклу». *Науковий вісник Херсонського державного університету. Серія «Географічні науки»,* №. 14, С. 79-86.	14
9.	Мохонько, В. А. (2023). Розширення можливостей критичного мислення: важливість навчання медіаграмотності в школах». *The X International Scientific and Practical Conference «Innovative ways of learning development»*, С. 152.	13
10.	Пометун, О. І. (2020). Урок, що розвиває критичне мислення. 70 методів в одній книзі: навч.-метод. посіб. Київ, , 101 с.	12

Джерело: авторська розробка.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Статистичний аналіз україномовного контенту, здійснений за критерієм «критичне мислення» у пошуковій системі наукометричної бази даних Google Scholar (2020-2023 р.р.) показав, що зацікавленість українських вчених вказаною проблематикою достатньо висока. Проаналізовано 923 документи, серед яких найбільша кількість належить дослідженням, реалізованим в освітній сфері.

Результати контент-аналізу ключових слів дали можливість визначити основні напрями досліджень критичного мислення українськими вченими в період з 2020 по 2023 р.р. До них можна віднести:

1. Дослідження, спрямовані на специфічні об'єкти вивчення (вікові групи, навчальні заклади та установи, особливі потреби).

2. Розробка та застосування в освітній практиці конкретних технологій, підходів, методик та методів формування критичного мислення, серед яких зафіксовано велику кількість інноваційних.

3. Дослідження, спрямовані на розвиток критичного мислення здійснюється під час вивчення різних дисциплін. Цікаво, що найбільшу кількість у цій категорії отримали іноземна мова, історія та українська мова. У порівнянні з документами Web of Science значно менша питома вага технічних, економічних та медичних навчальних предметів.

4. Дослідження, спрямовані на визначення суті та змісту поняття «критичне мислення» та основних факторів, які впливають на його формування.

5. Дослідження, спрямовані на розвиток критичного мислення у сприйнятті медіа-контенту.

6. Науково-педагогічні розробки, які спрямовані на формування компетенцій та компетентностей для розвитку критичного мислення як однієї з основних наскрізних навичок.

7. Дослідження, спрямовані на використання інформаційно-комунікативних технологій в освітніх процесах для розвитку критичного мислення.

8. Дослідження, спрямовані на визначення перспектив розвитку української освіти та окреслення шляхів її реформування.

9. Визначення негативних факторів, які заважають формуванню критичного мислення в сучасних реаліях.

Аналіз кількості цитувань показав, що найбільша кількість цитованих матеріалів публікувалась в українських фахових виданнях (категорія В).

Отримавши результати статистичного аналізу україномовного контенту бібліометричних даних Google Scholar, ми порівняли їх із відповідними показниками Web of Science (Dong et al., 2023).

У обох наукометричних базах у дослідженні феномену критичного мислення найбільше праць присвячено освітянській проблематиці. Серед технологій формування критичного мислення особлива увага відводиться його розвитку через залучення до науково-дослідницької діяльності, виконання проєктів, залучення ігрових технологій, проблемно-орієнтоване навчання, використання кейсів тощо. Актуальною для обох наукометричних баз є проблематика формування медіакомпетентності та критичного сприйняття інформації суб'єктами освітнього процесу.

Багато досліджень присвячено використанню інформаційно-комунікативних технологій в освітній практиці. Проте, програмне забезпечення та доступ до інструментів в українських користувачів більш обмежений.

У документах, індексованих Web of Science, часто зустрічаються наукові розвідки, пов'язані із психологією та когнітивними факторами критичного мислення. В українських дослідженнях (судячи з бібліометрії) таких робіт значно менше.

Не зважаючи на високий рівень підготовки матеріалів, українські дослідження не набули широкого представлення у Web of Science. За кількістю документів, в яких досліджується критичне мислення, та цитувань, на першому місці США, проте показник співвідношення «кількість документів/цитування» вищий у Канади. Україна у Топ-20 лідерів не увійшла.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо в використанні отриманих результатів аналізу бібліометричних даних для уточнення шляхів формування критичного мислення у здобувачів освіти та використання їх у педагогічній практиці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Копанєва, В. (2007). Бібліотека в системі наукової електронної комунікації. *Бібл. вісн.*, 5, 3-9. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/406.
2. Назаровець, М. А.(Ред.) (2016). GOOGLE Академія для науковців: практ. посіб. Київ: ВПЦ "Київський університет".
3. Починкова, М. (2021). *Формування критичного мислення майбутніх учителів початкової школи у процесі професійної підготовки*. Дис. д. пед. н. Луган. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Старобільськ. https://dspace.luguniv.edu.ua/xmlui/handle/123456789/7523.
4. Черніг. нац.технолог. ун-т (2015). Рекомендації по використанню пошукової системи Google Академія (Google Scholar). https://stu.cn.ua/wp-content/uploads/2021/04/recomend_google_-1.pdf.
5. Altun, E., & Yildirim, N. (2023). What does critical thinking mean? Examination of pre-service teachers' cognitive structures and definitions for critical thinking. *Thinking Skills and Creativity*, 49, 101367,243–267. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2023.101367.
6. Carini, R.M., Kuh, G.D., & Klein, S.P. (2006). Student engagement and student learning: Testing the linkages», *Research in Higher Education*, 47, 1, 1-32. https://doi.org/10.1007/s11162-005-8150-9.
7. Cliff, A. et al. (2014). The Degree Qualifications Profile: A Learning-Centered Framework for What College Graduates Should Know and Be Able to Do to Earn the Associate, Bachelor's or Master's Degree. *Lumina Foundation for Education*.
8. Dewey, J.(2022).*How we think*? DigiCat.
9. Dong, M., Li, F., & Chang, H. (2023). Trends and hotspots in critical thinking research over the past two decades: Insights from a bibliometric analysis. *Heliyon*, 9, 6, 16934. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e16934.
10. Halpern D. F. (2013). *Thought and knowledge: An introduction to critical thinking*, Psychology Press.
11. Marcos-Vílchez, J. M., Sánchez-Martín, M., & Muñiz-Velázquez J. A. (2024). Effectiveness of training actions aimed at improving critical thinking in the face of disinformation: A systematic review protocol. *Thinking Skills and Creativity,* 101474, https://doi.org/10.1016/j.tsc.2024.101474.
12. Moore, T. (2013) Critical thinking: Seven definitions in search of a concept. *Studies in Higher Education*. 38, 4, 506-522. https://doi.org/10.1080/03075079.2011.586995.
13. Pritchard, A. (1969). Statistical bibliography or bibliometrics. *Journal of documentation,* 25, 4, 348-349.

14. Roemer, R. C., & Borchardt, R. (2015). Meaningful metrics: A 21st century librarian's guide to bibliometrics, altmetrics, and research impact. *Amer Library Assn*.
15. Tan, C. (2017). Teaching critical thinking: Cultural challenges and strategies in Singapore. *British educational research journal,* 43, 5, 988-1002. https://doi.org/10.1002/berj.3295.
16. White, H. D. (1989). Bibliometrics. *ARIST,* 24, 119-186.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Kopanieva, V. (2024). *Biblioteka v systemi naukovoi elektronnoi komunikatsii». [Library in the system of scientific electronic communication].* http://www.nbuv.gov.ua/sites/default/files/msd/0710kop.pdf. (in Ukrainian).
2. Nazarovets, M. A., Ed. (2016). GOOGLE Akademiia dlia naukovtsiv: prakt. posib. [GOOGLE Academy for scientists: practice. manual], Kyiv: VPTs "Kyivskyi universytet". (in Ukrainian).
3. Pochynkova, M. (2021). Formuvannia krytychnoho myslennia maibutnikh uchyteliv pochatkovoi shkoly u protsesi profesiinoi pidhotovky. [Formation of critical thinking of future primary school teachers in the process of professional training], dys. d. ped. n. Luhan. nats. un-t im. T. Shevchenka, Starobilsk, (in Ukrainian).
4. Chernih. nats. tekhnoloh. un-t (2015). Rekomendatsii po vykorystanniu poshukovoi systemy Google Akademiia (Google Scholar). [Recommendations for using the Google Academy search engine (Google Scholar)], https://stu.cn.ua/wp-content/uploads/2021/04/recomend_google_-1.pdf. (in Ukrainian).
5. Altun, E., & Yildirim, N. (2023). What does critical thinking mean? Examination of pre-service teachers' cognitive structures and definitions for critical thinking. *Thinking Skills and Creativity*, 49, 101367,243–267. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2023.101367.
6. Carini, R.M., Kuh, G.D., & Klein, S.P. (2006). Student engagement and student learning: Testing the linkages», *Research in Higher Education*, 47, 1, 1-32. https://doi.org/10.1007/s11162-005-8150-9.
7. Cliff, A. et al. (2014). The Degree Qualifications Profile: A Learning-Centered Framework for What College Graduates Should Know and Be Able to Do to Earn the Associate, Bachelor's or Master's Degree. *Lumina Foundation for Education*.
8. Dewey, J.(2022).*How we think*? DigiCat.
9. Dong, M., Li, F., & Chang, H. (2023). Trends and hotspots in critical thinking research over the past two decades: Insights from a bibliometric analysis. *Heliyon*, 9, 6, 16934. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e16934.
10. Halpern D. F. (2013). Thought and knowledge: An introduction to critical thinking, Psychology Press.
11. Marcos-Vílchez, J. M., Sánchez-Martín, M., & Muñiz-Velázquez J. A. (2024). Effectiveness of training actions aimed at improving critical thinking in the face of disinformation: A systematic review protocol. *Thinking Skills and Creativity,* 101474, https://doi.org/10.1016/j.tsc.2024.101474.
12. Moore, T. (2013) Critical thinking: Seven definitions in search of a concept. *Studies in Higher Education*. 38, 4, 506-522. https://doi.org/10.1080/03075079.2011.586995.
13. Pritchard, A. (1969). Statistical bibliography or bibliometrics. *Journal of documentation,* 25, 4, 348-349.
14. Roemer, R. C., & Borchardt, R. (2015). Meaningful metrics: A 21st century librarian's guide to bibliometrics, altmetrics, and research impact. *Amer Library Assn*.
15. Tan, C. (2017). Teaching critical thinking: Cultural challenges and strategies in Singapore. *British educational research journal,* 43, 5, 988-1002. https://doi.org/10.1002/berj.3295.
16. White, H. D. (1989). Bibliometrics. *ARIST,* 24, 119-186.

| Матеріал надійшов до редакції: 27.01.2025 р. | Прийнято до друку: 14.03.2025 р. | Опубліковано: 29.04.2025 р. |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2025, 40(2), https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-03
УДК: 37.016:[510.3+511.11]

ОСОБЛИВОСТІ ОЗНАЙОМЛЕННЯ ЗДОБУВАЧІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ З УЗАГАЛЬНЕНОЮ КАНТОРОВОЮ МНОЖИНОЮ З ВИКОРИСТАННЯМ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ

Катерина МАЛИШЕНКО ✉
Херсонський державний університет, Україна
ekatjamalish@gmail.com
https://orcid.org/0009-0008-0050-6366

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Сьогодні Україна знаходиться на етапі активної реформи базової середньої освіти. Тому математичну підготовку необхідно реалізовувати таким чином, щоб після закінчення закладів загальної середньої освіти учні не лише вміли виконувати базові математичні обрахунки, а і набули навичок розв'язувати завдання з комбінованих тем; бачили різні способи застосування вивченої теми. Важливу роль в досягнені наведених цілей відіграє зацікавленість та особиста мотивація здобувачів освіти до вивчення математики. Отже, бажано будувати навчання таким чином, щоб учні не просто вивчали наведений матеріал, а самі ставали активними дослідниками.*

Матеріали і методи. *Використано систему теоретичних та емпіричних методів, зокрема аналіз наукової літератури з окресленої проблеми, спостереження за процесом вивчення курсу математики в закладах повної загальної середньої освіти з метою виявлення можливостей інтеграції до нього теми «Канторова множина та системи числення».*

Результати дослідження *показали, що можливо побудувати для системи числення з основою 2n+1, де n – натуральне число, канторову досконалу множину. Зокрема розглянуто п'ятіркову та семіркову системи числення , що дозволяє виконати подальше узагальнення. В результаті отримано множини, досконалість яких було доведено. Побудовано функції Кантора для п'ятіркової та семіркової систем числення, з'ясовано закономірності, опираючись на які, узагальнено функцію Кантора для всіх систем числення з основою 2n+1.*

Висновки. *Встановлено, що для довільного натурального числа n можлива побудова канторової досконалої множини з основою 2n+1, для якої також побудована функція Кантора. Дослідження свідчить про актуальність формування дослідницьких компетентностей учнів загальноосвітніх навчальних закладів, зокрема через розв'язування інтегрованої задачі з теми "Кантова множина та системи числення".*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *Канторова досконала множина; функція Кантора; системи числення; розвиток дослідницьких умінь; STEM-освіта.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Малишенко К. Особливості ознайомлення здобувачів загальної середньої освіти з узагальненою Канторовою множиною з використанням систем числення. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 23-29. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-03.

FEATURES OF INTRODUCING GENERAL SECONDARY EDUCATION STUDENTS TO THE GENERALIZED CANTOR SET USING NUMERATION SYSTEMS

Kateryna MALYSHENKO ✉
Kherson State University, Ukraine
ekatjamalish@gmail.com
https://orcid.org/0009-0008-0050-6366

ABSTRACT

Formulation of the Problem. *Ukraine is currently undergoing an active reform of basic secondary education. In our opinion, mathematical education should be structured in such a way that, upon completing general secondary education, students not only acquire the ability to perform basic mathematical computations but also develop skills in solving problems involving integrated topics, identifying various applications of studied concepts, forecasting and analyzing different mathematical models, formulating hypotheses, and proving or refuting them. Achieving these goals significantly depends on students' interest and intrinsic motivation to study mathematics. We propose organizing the learning process to ensure that students study the provided material and actively engage as researchers.*

Materials and Methods. *A combination of theoretical and empirical methods was employed, including analyzing scientific literature on the identified issue and observing the mathematics curriculum in general secondary schools to explore possibilities for integrating the topic "Cantor Set and Numeral Systems".*

Results. *The study demonstrated that it is possible to construct Cantor perfect sets for numeral systems with a base of 2n+1, where n is a natural number. Specifically, the quinary (base-5) and septenary (base-7) numeral systems were considered, enabling further generalizations. As a result, perfect sets were obtained, and their perfection was proven. Cantor functions for the quinary and septenary numeral systems were constructed, and patterns were identified, leading to the generalization of the Cantor function for all numeral systems with a base of 2n+1.*

Conclusion. *It was determined that for any natural number n, it is possible to construct a Cantor perfect set with a base of 2n+1, for which a Cantor function can also be developed. The analysis of regulatory documents, mathematical, instructional, and psycho-pedagogical literature highlights the relevance of fostering research competencies among secondary school students in Ukraine's current educational development phase. In our study, this is achieved through solving an integrated problem on the topic "Cantor Set and Numeral Systems".*

KEYWORDS: *Cantor perfect set; Cantor function; numeral systems; development of research skills; STEM-education.*

FOR CITATION: Malyshenko, K. (2025). Features of introducing general secondary education students to the generalized Cantor set using numeration systems. *Physical and Mathematical Education*, *40*(2), 23-29. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-03.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сьогодні Україна знаходиться на етапі активної реформи базової середньої освіти. Нова українська школа – це дієва формула, яка робить навчання комфортним та практичним, а головне – навчає критично мислити, досліджувати та пропонувати власні ідеї. Тобто тепер пріоритетне місце займають компетентності, завдяки яким людина зможе існувати в суспільстві, навчатися в продовж життя та займатися професійною діяльністю.

Згідно «Концептуальних засад реформування середньої школи» (Гриневич та ін., 2016) математична компетентність займає одне з ключових місць в освіті сучасних школярів. Це вимагає, щоб учні були компетентними не лише в розв'язуванні завдань з підручника, а й могли вільно застосовувати здобуті знання та навички у повсякденному житті. Проте варто пам'ятати, що маючи особисту мотивацію, учні значно швидше досягають поставлених цілей. Саме тому доцільно, щоб учні виступали не в ролі пасивного слухача, а активного діяча, який самостійно здобуває необхідні знання з підтримкою вчителя. Отже, варто розвивати в учнів дослідницькі уміння.

Реалізація даної ідеї може відбуватися таким чином: учні мають наскрізну задачу, поступові кроки до вирішення якої вони виконуватимуть впродовж всього свого навчання. Таким чином буде існувати мета до вивчення певної теми, а набуті знання одразу ж застосовуватимуться для опрацювання проблемного завдання. Разом з тим створюються сприятливі обставини для впровадження проектно-зорієнтованої технології навчання, яка надасть додаткову мотивацію до навчання; навчить критично осмислювати інформацію та використовувати набуті знання на практиці.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Активною прихильницею розвитку математичної компетентності є Н. А. Тарасенкова. Наприклад, у своїй роботі (Тарасенкова, 2016) вона пропонує розв'язувати учням К-задачі (компетентнісні задачі) та КО-задачі (компетентнісно-орієнтовані задачі). Авторка стверджує, що такий підхід сформує в учнів практичну математичну компетентність. О. В. Онопрієнко (2023) у роботі стверджує, що розвиток математичної компетентності наразі є актуальним і має формуватися поетапно. О. В. Школьний, автор модельної програми з математики для 5-6 класів та 7-9 класів, у роботі (Школьний, 2024) підтримує ідею формування вміння учнів проводити логічні міркування та розвитку їх абстрактного мислення. Ця ж ідея прослідковується і в підручниках з математики для 5 та 6 класу Джона Ендрю Біоса (2022; 2023). Окрім викладення матеріалу передбаченого програмою, автор додає додатковий матеріал задля підвищення навчальної зацікавленості. Учні мають досліджувати теми, які суміжні із тими, що вивчаються. У роботі (Casola & Taylor, 2019) було піднято питання про поточний стан математичної освіти та способи його покращення.

Разом з тим ідея розвитку дослідницьких умінь та математичної компетентності є не лише провідною ідеєю математиків та педагогів, вона закріплена у нормативно-правових документах нашої держави. Як зазначається у Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти): «Упровадження природничо-математичної освіти (STEM-освіти) вимагає від педагогічних та науково-педагогічних працівників активного використання новітніх педагогічних підходів до викладання та оцінювання, інновацій у сфері освіти, практики міжпредметного навчання, методів та засобів навчання, що сприяють розвитку дослідницьких та винахідницьких компетентностей здобувачів освіти.» До того ж положення Нової української школи не забороняють навчальні експерименти, а навпаки підтримують їх: «Щоб навчати по-новому, вчитель повинен отримати свободу дій – обирати навчальні матеріали, імпровізувати та експериментувати. Цю свободу дає новий закон «Про освіту».» (Гриневич та ін., 2016).

М. І. Жалдак та Г. О. Михалін (2011) у роботі звертають увагу на те, що в шкільному курсі змістова лінія «Елементи теорії множин» охолоплює лише деякі поверхневі факти і вивчається недостатньо. Хоча в університетському курсі ця ж змістова лінія є дуже важливою для багатьох курсів. Тому автори пропонують починати її вивчення вже в середніх класах школи, при цьому доповнюючи великою кількістю зрозумілих для учнів прикладів. А також варто багатократно повертатися до цією теми щоразу на більш підвищеному рівні.

Метою статті є обґрунтування способу формування дослідницьких умінь та математичної компетентності учнів шляхом розв'язання наскрізної задачі «Канторова множина та системи числення». При цьому одночасно удосконалюючи вивчення наскрізної лінії «Елементи теорії множин» через дослідження множин подібних до традиційної канторової досконалої множини та функції Кантора з подальшим обґрунтуванням та розробкою плану інтеграції цієї теми до шкільного курсу математики.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У досліджені використана система теоретичних та емпіричних методів. Зокрема,

теоретичних: аналіз нормативно-правових документів, математичної, психолого-педагогічної, методичної літератури з окресленої проблеми, підручників та навчальних посібників з математики, алгебри та геометрії для з'ясування сутності процесу формування дослідницької компетенції здобувачів освіти під час вивчення шкільного курсу математики; з'ясування можливості застосування наскрізної задачі «Канторова множина та системи числення»;

емпіричних: спостереження за процесом навчання математики в закладах повної загальної середньої освіти з метою виявлення можливостей інтеграції теми «Канторова множина та системи числення» до шкільного курсу математики на поглибленому рівні.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Наскрізною задачею, яку доречно впровадити в шкільний курс математики, можуть стати системи числення на досконалій множині. Безперечно, дана тема виноситься на опрацювання лише в курсі вищої математики. Однак при правильному плануванні етапів опрацювання, яке враховуватиме глибину знань та готовність до сприйняття інформаці на конкретному етапі навчання, стає можливим її впровадження в шкільний курс.

Якщо проаналізувати математичне підґрунтя необхідне для вивчення систем числення на досконалій множині, то виявимо такі теми: поняття відрізку та його поділу; дії над звичайними дробами; елементи комбінаторики; поняття множини та дії над нею; геометрична прогресія та сума нескінченно спадної геометричної прогресії; обернена функція;

границя та її застосування; елементи методології математики. Оскільки, ці теми вивчаються в шкільному курсі математики, то для здобувачів освіти закладів загальної середньої освіти, які вивчають математику на поглибленому рівні, опрацювання запропонованої наскрізної задачі є цілком можливим завданням.

Аналізуючи традиційну канторову множину розглянемо можливість побудови подібної множини при поділі відрізка на 5, 7, 9, 11, 13 і т.д. частин. Таким чином отримуємо узагальнену канторову множину.

Розглянемо одиничний відрізок F_0 = [0;1]. Розділимо його на 2n+1 рівних частин, n – деяке натуральне фіксоване число. Домовимося, що нумерація відрізків починатиметься з цифри 0, тобто відрізку з порядковим номером m відповідає число m-1, m = $\overline{1, 2\mathrm{n}+1}$.

Тепер видалимо всі інтервали, яким відповідає непарне число 2m-1, m = $\overline{1,\mathrm{n}}$. Залишені відрізки об'єднаємо і матимемо:

$$F_1 = [0; \tfrac{1}{2\mathrm{n}+1}] \cup [\tfrac{2}{2\mathrm{n}+1}; \tfrac{3}{2\mathrm{n}+1}] \cup \ldots \cup [\tfrac{2n}{2\mathrm{n}+1}; 1].$$

Аналогічно кожен з відрізків множини F_1знову поділимо на 2n+1 рівних відрізків та видалимо інтервали, яким відповідає непарне число 2m-1, m = $\overline{1,\mathrm{n}}$. Зауважимо, що першому відрізку відповідає число 0. Перетин цих відрізків назвемо F_2. Продовжимо цей крок до нескінченності та визначимо: F=$\bigcap_{k=0}^{\infty} F_k$.

Можна довести, що множина, яка утворилася є досконалою множиною Кантора. Кожне з чисел із відрізка [0, 1] можна записати у відповідній системі числення з основою 2n+1 у вигляді:

$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{a}_1}{(2n+1)} + \frac{\mathrm{a}_2}{(2n+1)^2} + \cdots + \frac{\mathrm{a}_k}{(2n+1)^k} + \cdots$, де числа a_k можуть набувати значення $\overline{0, 2n}$.

Можна довести, що кожній точці x ϵ F відповідає послідовність чисел: a_1, a_2, … , a_k, … , де a_k можуть набувати тільки парних значень 2m, m = $\overline{0,\mathrm{n}}$.

Знайдемо сумарну довжину інтервалів, що вилучаємо. На множині F_1 вилучили: n $\cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$. На F_2: $\frac{n}{2n+1} +$ $+(n+1) \cdot \frac{n}{(2n+1)^2}$. На F_3: $\frac{n}{2n+1} + (n+1) \cdot \frac{n}{(2n+1)^2} + (n+1)^2 \cdot \frac{n}{(2n+1)^3}$.

На F_k: $\frac{n}{2n+1} + (n+1) \cdot \frac{n}{(2n+1)^2} + (n+1)^2 \cdot \frac{n}{(2n+1)^3} + \cdots + (n+1)^{k-1} \cdot \frac{n}{(2n+1)^k}$;

При n→ ∞ довжина $F_k \rightarrow \frac{\frac{n}{2n+1}}{1-\frac{n+1}{2n+1}} = \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{n} = 1.$

Отже, сумарна довжина вилучених інтервалів дорівнює 1, а тому міра множини F дорівнює 0.

Для наочності наведемо приклад побудови такої множини в п'ятірковій системі числення (рис. 1).

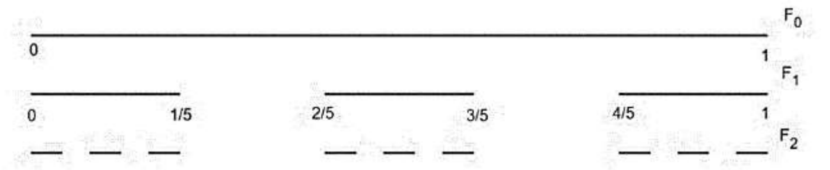


Рис. 1. П'ятіркова Канторова множина

Джерело: авторська розробка.

Нагадаємо, що за означенням множину називають досконалою, якщо вона замкнена і не має ізольованих точок (Жалдак та ін., 2007). Очевидно, що одержана множина F=$\bigcap_{k=0}^{\infty} F_k$ є перетином відрізків. Відрізок [0, 1] є замкненою множиною на прямій з природною топологією.

Нагадаємо, що точка x $\in$ A називається ізольованою, якщо існує окіл точки x, в якому немає точок множини A, окрім самої точки x (Борисенко, 1995). Оскільки довжини відрізків, з яких складаються множини F_k прямують до нуля при k $\to\infty$, то для кожної точки x $\in$ F принаймні кінцеві точки деяких відрізків з множин виду F_k збігаються до x, а тому містяться в її околі.

Отже, побудована множина F володіє всіма властивостями досконалої множини.

Оскільки канторову досконалу множину можна побудувати для будь-якої 2n+1 системи числення при фіксованому натуральному n, то для кожної з них визначимо функцію Кантора. Отже, якщо x ∈ F, x можна представити у такому вигляді:

$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{a}_1}{(2n+1)} + \frac{\mathrm{a}_2}{(2n+1)^2} + \cdots + \frac{\mathrm{a}_k}{(2n+1)^k} + \cdots$, де числа a_k можуть набувати значень виду 2m, m = $\overline{0,\mathrm{n}}$.

Визначимо $F(x) = \frac{\frac{\mathrm{a}_1}{2}}{(n+1)} + \frac{\frac{\mathrm{a}_2}{2}}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\frac{\mathrm{a}_k}{2}}{(n+1)^k} + \cdots$, тобто фактично ми знайшли число, якому відповідає послідовність $\frac{\mathrm{a}_1}{2}$; $\frac{\mathrm{a}_2}{2}$; … ; $\frac{\mathrm{a}_k}{2}$; … в системі числення з основою n+1.

Якщо x ∉ F, то x належить деякому з вилучених на k-ому етапі інтервалів. Можна довести, що значення функції Кантора у кінцевих точках визначеного інтервалу співпадають, а тому значення функції Кантора в будь-якій точці цього інтервалу будемо вважати рівним значенню в будь-якій його кінцевій точці.

Проілюструємо цей алгоритм побудови на п'ятірковій системі числення. Обчислюємо значення функції на $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$. Обираємо точку $\frac{2}{5} = (2, 0, 0, \ldots)_5$. Поділимо координати навпіл та отримаємо трійковий запис: $(1, 0, 0, \ldots)_3$. Обчислюємо значення функції в цій точці: $\frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \cdots = \frac{1}{3}$.

Переконаємося, що і на іншому кінці інтервалу $\frac{1}{5} = (0,4,4,\dots)_5$ функція Кантора приймає таке ж значення. Поділимо координати навпіл та отримаємо трійковий запис: $(0,2,2,\dots)_3$. Обчислюємо значення функції в цій точці: $\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\dots=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$. Отже, кожній точці інтервалу $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$ відповідає значення функції *K(x)=* $\frac{1}{3}$.

Аналогічно обчислюємо значення функції Кантора на $\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$. Обираємо точку $\frac{4}{5}=(4,0,0,\dots)_5$. Поділимо координати навпіл та отримаємо трійковий запис: $(2,0,0,\dots)_3$ Обчислюємо значення: $\frac{2}{3}+\frac{0}{3^2}+\frac{0}{3^3}+\dots=\frac{2}{3}$. Обчислимо значення функції в точці $\frac{3}{5}=(2,4,4,\dots)_5$. Поділимо координати навпіл та отримаємо трійковий запис: $(1,2,2,\dots)_3$. Обчислюємо значення функції в цій точці: $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\dots=\frac{1}{3}+\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Отже, кожній точці інтервалу $\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ відповідає значення функції *K(x)=* $\frac{2}{3}$.

За такою ж схемою обчислюємо значення функції на $\left(\frac{1}{25};\frac{2}{25}\right)$. Легко переконатися, що кожній точці інтервалу $\left(\frac{1}{25};\frac{2}{25}\right)$ відповідає значення функції *K(x)=* $\frac{1}{9}$.

Отже, виконуємо аналогічні дії для кожного вилученого інтервалу. Отримаємо такі значення (рис. 2):

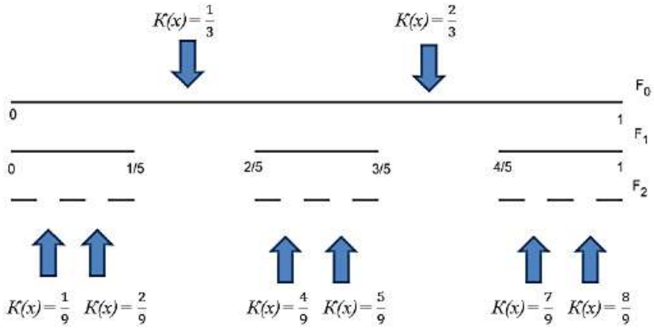


Рис. 2. Деякі значення функцій Кантора

Джерело: авторська розробка.

Функція кантора для п'ятіркової системи числення матиме вигляд як на рис. 3.

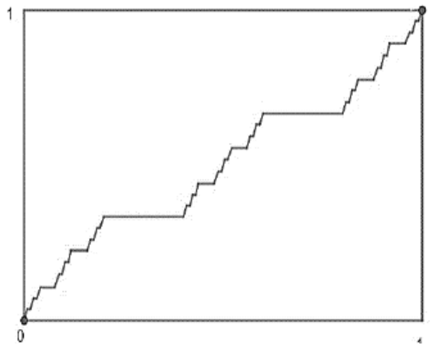


Рис. 3. Функція Кантора в п'ятірковій системі числення

Джерело: авторська розробка.

Описане дослідження можна реалізувати і в шкільному курсі математики. Опираючись на ідеї математиків-методистів, нормативно-правові документи та розуміючи важливість розвитку дослідницьких умінь учнів, пропонуємо наскрізну задачу на тему «Системи числення на досконалій множині», яку школярі виконуватимуть протягом свого навчання у 5-11 класах. Хоча ця тема опрацьовується в курсі вищої математики, проте, на наш погляд, якщо до цього питання підходити поступово, то задача є цілком посильною для учнів шкільного віку.

Реалізовувати вивчення канторових досконалих множин пропонуємо за такою схемою:

1. Ознайомлення із системами числення (5 клас)

В курсі 5 класу учні ознайомлюються із десятковою системою числення. Проте в учнів не формується уявлення про системи числення, адже десяткова система для школярів – це звичайний запис чисел, до якого вони звикли. На нашу думку, необхідно показати, що існують інші системи також. Аналізуючи підручник з математики для 5 класу Джона Ендрю Біоса (2022), який розроблено відповідно до модельної програми «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Василишин М.С., Миляник А.І., Працьовитий М.В., Простакова Ю.С., Школьний О.В.), а також електронні додатки до нього, бачимо, що в якості інтегрованого модуля автор пропонує, розглянути інші системи числення, такі як римська та двійкова системи числення. Тому доцільно буде ознайомитися й з іншими системами та правилами кодування. Наприклад, для трійкової системи використовуємо цифри 0,1,2; для п'ятіркової 0, 1, 2, 3, 4 і т.д. Таким чином учні усвідомлюють, що існують й інші системи числення, такі як трійкова, п'ятіркова, семіркова і т.д. А також знають певні правила їх використання.

2. Ведення поняття відрізка та поділу відрізків (5 клас)

В розділі найпростіші геометричні фігури на площині вивчається відрізок та поділ відрізка. А це якраз безпосередньо стосується канторових досконалих множин. На цьому етапі можна дати учням відрізок певної довжини та запропонувати поділити на 3, 5, 7 і т.д. рівних частин.

3. Визначення значення кінців відрізків (5 клас)

Вивчення звичайних дробів дозволить учням встановлювати значення кінців відрізків. Наприклад, поділили відрізок на 5 частин, тому в знаменнику буде число 5. Тоді перша точка поділу - $\frac{1}{5}$, друга точка поділу - $\frac{2}{5}$, третя - $\frac{3}{5}$, четверта - $\frac{4}{5}$. Запропонувати учням визначити кінці відрізків при поділі одиничного відріка на 3, 5, 7 і т.д. рівних частин.

4. Ознайомлення із способами кодування (5 клас)

Під час вивчення теми «Логічні та комбінаторні задачі» варто розказати учням про структуру канторових множин. Тобто знайомимо їх з тим, що після поділу відрізка на 2n+1 рівних частин, домовляємося, що нумерацію відрізків починаємо із числа 0. Потім відрізки з парними номерами залишаємо, а з непарними вилучаємо. Пояснюємо, що такий поділ ми можемо зробити ще декілька разів. Проте, на нашу думку, на множині F_4 варто зупинитися, адже на даному рівні знань поняття про нескінченність ще не є сформованим в учнів, тому продовження поділу може бути складним для сприйняття. Кодувати учням буде легше не точки, що належать відрізкам, а самі відрізки. Адже метою цього завдання є засвоєння способів кодування.

5. Формування поняття множини (5 клас)

Варто зазначити, що, наприклад, автори підручника з алгебри для 8 класу з поглибленим вивченням Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. (2021) з поняттям множини та операціями над нею ознайомлюють учнів у 8 класі. Проте автор підручника з математики для 5 класу Джон Ендрю Біос пропонує ознайомче вивчення множини на п'ятому році навчання. Хоча на цьому етапі розглядаються лише способи задання множини, переріз, об'єднання та різниця, проте це дозволяє ознайомити здобувачів освіти із тим фактом, що такий поділ відрізків продовжується ще багато разів. А залишенні інтервали об'єднуємо і отримуємо множину Кантора. На її досконалості наголошувати не варто, оскільки вивчення множин відбувається оглядово.

6. Визначення приналежності точки через порівняння дробів з різними знаменниками (6 клас)

Під час опрацювання теми, що пов'язана з діями над звичайними дробами з різними знаменниками, учні вже можуть порівнювати дроби, тому вони вже зможуть визначити, чи належить точка відрізкам канторової множини, чи тим, що відкидаються. Наприклад, маємо п'ятіркову систему і точку x = $\frac{3}{8}$. Тепер порівнюємо точку із кінцями відрізків канторової множини. НСК(5; 8)=40 x = $\frac{3}{8}$ = $\frac{15}{40}$; $\frac{1}{5} = \frac{8}{40}$; $\frac{2}{5}$ = $\frac{16}{40}$ $\rightarrow$ $\frac{8}{40}$ < $\frac{15}{40}$ < $\frac{16}{40}$ Таким чином $\frac{1}{5}$ < $\frac{3}{8}$ < $\frac{2}{5}$. Отже, точка належить інтервалу, що відкидаємо.

7. Обрахування довжини відрізків, що належать канторовій множині та які вилучаються на початкових множинах (6 клас)

Здобувачі освіти вже можуть виконувати арифметичні дії над звичайними дробами, тому завдання порахувати суму залишених та суму відкинутих відрізків на початкових множинах не має бути складним. Наприклад, для п'ятіркової системи множина F_1 має довжину: 3 $\cdot$ $\frac{1}{5}$ = $\frac{3}{5}$; множина F_2 має довжину: 9 $\cdot$ $\frac{1}{25}$ = $\frac{9}{25}$. Відкинуті відрізки на F_1 мають довжину: 2 $\cdot$ $\frac{1}{5}$ = $\frac{2}{5}$; На множині F_2: $\frac{2}{5} + 3 * 2 * \frac{1}{25} = \frac{2}{5} + \frac{6}{25} = \frac{16}{25}$. Тут вчитель сам обирає в залежності від можливостей учнів та наявності часу, до якої множини виконуватимуть розрахунки.

8. Узагальнення знань про побудову канторової множини (7 клас)

На цьому етапі варто узагальнити набуті знання про канторову множину. Адже курс вивчення математики в 7 класі розпочинається із повторення курсу 5-6 класу. Тому, якщо в попередніх класах учні побудову канторових множин робили покроково в силу вивчення нових тем, то тепер вони можуть це зробити узагальнено. Спочатку будуємо відрізок, ділимо його на необхідну кількість, визначаємо значення кінців відрізків; показуємо, які інтервали відкидаємо, а які залишаємо; визначаємо приналежність точки до певного відрізку, вводимо елементи кодування відрізків, продовжуємо процес побудови та робимо висновок про одержання канторової множини. На наш погляд, це доречне завдання для повторення вивченого за 5-6 клас.

9.Ознайомлення із скінченними та нескінченними множинами. Потужність континуум (8 клас).

Тепер варто ознайомити здобувачів із поняттям множини більш детально. В класах із поглибленим вивченням у 8 класі розглядається поняття скінченних та нескінчених множин. Необхідно наголосити, що на прямій множини можуть бути зліченими, а також мати потужність континуум. Також можна показати й деякі інші властивості множин, але варто оцінити глибину знань учнів та їх готовність до сприймання цього матеріалу. Таким чином вже сформується поняття структури та систем числення на досконалій множині. В якості проекту здобувачі освіти можуть підготувати додаткову інформацію про Георга Кантора.

10. Знаходження точок канторової множини з допомогою геометричної прогресії (9 клас)

В курсі 9 класу вивчаються числові послідовності, зокрема геометрична прогресія. Варто нагадати учням про принципи кодування точки, які належать канторовій множині, а також навчити визначати значення цієї точки з допомогою геометричної прогресії. Наприклад, x = $(0, 2, 4, 0, 2, 4,\ldots)_5$. Звертаємо увагу учнів на те, що якщо додамо кожні 3 члена геометричної прогресії, то утвориться геометрична прогресія, де $b_1 = \frac{14}{5^3}$; $q = \frac{1}{5^3}$. X= $\frac{0}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \frac{0}{5^4} + \frac{2}{5^5} + \frac{4}{5^6} + \cdots = \frac{14}{5^3} + \frac{14}{5^6} + \frac{14}{5^9} + \cdots$. Шукаємо суму спадної геометричної прогресії. x = $\frac{\frac{14}{5^3}}{1-\frac{1}{5^3}} = \frac{14}{125} * \frac{125}{124} = \frac{7}{62}$.

11.Ознайомлення з функцією Кантора (10клас)

Під час вивчення теми «Функція» у 10 класі доцільно ознайомити учнів із драбиною Кантора: показати алгоритм побудови, структуру, обчислення значення функції та приблизний графік функції. В якості проектної роботи здобувачі освіти можуть підготувати цікаві факти стосовно цієї теми.

12. Обчислення загальної довжини відрізків Канторової множини та відкинутих відрізків (10клас)

Якщо в попередніх класах обраховувалася загальна довжина залишених та відкинутих відрізків лише на початкових множинах, то в 10 класі, коли учні вже розуміють поняття границі, можна запропонувати завдання обрахувати загальну довжину залишених та відкинутих відрізків на множині F_n , адже тут передбачається перехід до границі. В результаті буде отримано шокуючий для здобувачів освіти результат: загальна довжина залишених відрізків рівна 0, а вилучених інтервалів дорівнює 1, тобто довжині початкового відрізка. На нашу думку таке неймовірне відкриття ще більше зацікавить до вивчення математики та підштовхне до наукової діяльності.

13. Узагальнення знань (11 клас)

Методологія математики є важливою наскрізною лінією для вивчення. Адже учні вчаться висовувати гіпотези, доводити або спростовувати їх. На нашу думку, в 11 класі здобувачі освіти вже мають достатню глибину знань та математичний апарат для виконання узагальнення. Тому варто звернути увагу учнів на подібності побудованих раніше трійкової, п'ятіркової, семіркової канторових множин та функцій Кантора на них. Потім запропонувати розглянути канторову множину і функцію Кантору на загальний випадок, тобто на 2n+1 системи числення. Таким чином завершується опрацювання даної теми в шкільному курсі. Проте сама тема цим не вичерпується, адже здобувачі можуть продовжити її опрацювання в курсі вищої математики. Тим самим залишається мотивація до подальшого вивчення математики.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Отже, на даному етапі розвитку освіти в Україні актуальним є формування дослідницької компетенції здобувачів освіти середньої школи, зокрема, в нашому дослідженні, через розв'язання наскрізної задачі з теми «Канторова множина та системи числення». Адже, розвиток математичної грамотності є дуже важливою компетентністю, завдяки якій людина зможе існувати в суспільстві, навчатися в продовж життя та займатися професійною діяльністю, саме цього і вимагають основні положення Нової української школи.

Одночасно з цим впровадження даної теми в шкільний курс математики допоможе поглибити вивчення наскрізної лінії «Елементи теорії множин». Саме для цього ми побудували канторові множини на 2n+1 системах числення, а також функції Кантора на них. І при вдалому плануванні вивчення даної теми учні шкільного віку зможуть її ефективно засвоїти. На нашу думку, школярі матимуть додаткову мотивацію до вивчення, а також практичне застосування навчального матеріалу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Біос, Дж. Е. (2022). *Математика: підручник для 5 класу закладів загальної середньої освіти*. Київ: «Формула».
2. Біос, Дж. Е. (2023). *Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти*. Київ: «Формула».
3. Борисенко, О. А. (1995). *Диференціальна геометрія і топологія*. Основа.
4. Гриневич, Л. М., Елькін, О., Калашнікова, С., Коберник, І., Ковтунець, В., Макаренко, О., ... & Шиян, Р. (2016). *Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи*.
5. Жалдак, М. І., & Михалін, Г. О. (2011). Елементарні факти теорії множин у шкільному курсі математики. *Математика в школі*, 3, 12-23.
6. Жалдак, М. І., Михалін, Г. О., & Деканов, С. Я. (2007). *Математичний аналіз. Функції багатьох змінних*. НПУ імені М. П. Драгоманова.
7. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2021). *Алгебра 8. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики*. Харків: «Гімназія».
8. Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти (авт. Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.). URL: https://drive.google.com/file/d/1YMPwWKLNmdHTQ6wj4_5aUH0sPafkCBqX/view
9. Модельна навчальна програма «Математика. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (авт. Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.). URL: https://drive.google.com/file/d/1hxfR8CXPRbsZ16yos4CykfiJ-K5U-cKu/view
10. Онопрієнко, О. В. (2023). Компетентнісний потенціал навчальної діяльності на уроках математики у НУШ. In *Початкова освіта в парадигмі Нової української школи: виклики часу: збірник матеріалів Всеукраїнської науково-практичної конференції* (27 квітня 2023 року, м. Глухів) (с. 104-107). Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка.
11. Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти, Постанова Кабінету Міністрів України № 898 (2022). https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-п#Text.
12. Про схвалення Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти), Розпорядження Кабінету Міністрів України № 960-р (2020). https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-р#Text.
13. Тарасенкова, Н. А. (2016). Компетентнісні засади забезпечення наступності навчання математики в різних ланках освіти. *Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи: матеріали всеукраїнської науково-практичної конференції* (15-16 вересня 2016 р., м. Одеса) (с. 108-111). Одеса: Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського.
14. Школьний, О. (2024). Методичні особливості вивчення логічних основ математики в інтегрованому курсі «Математика» для учнів 7 класу НУШ. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 20-28.
15. Casola, L., & Taylor, T. E. (Ред.). (2019). *Increasing Student Success in Developmental Mathematics*. National Academies Press. https://doi.org/10.17226/25547.
16. Hayes, E. (2011). Science teachers take to the stage. *Science in school*, 19, 6-9.
17. Learning and Understanding: Improving Advanced Study of Mathematics and Science in U.S. High Schools. (2002). National Academies Press. https://doi.org/10.17226/10129.
18. Rizayeva, L. (2022). Formation of research skills of students through solving problems in teaching mathematics in primary classes. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 17(8), 2567-2579.
19. Tandeep, K., McLoughlin, E., & Paul, G. (2022). Mathematics and science across the transition from primary to secondary school: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, 9.
20. Tifi, A., Natale, N., & Lombardi, A. (2006). Scientists at play: teaching science process skills. *Science in school*, 1, 37-40.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bios, Dzh. E. (2022). Mathematics: Textbook for 5th grade general secondary education institutions. Kyiv: "Formula".(in Ukrainian)
2. Bios, Dzh. E. (2023). Mathematics: Textbook for 6th grade general secondary education institutions. Kyiv: "Formula".
3. Borysenko, O. A. (1995). *Differential geometry and topology*. Osnova. (in Ukrainian)
4. Hrynevych, L. M., Elkin, O., Kalashnikova, S., Kobernyk, I., Kovtunets, V., Makarenko, O., ... & Shyyan, R. (2016). *The New Ukrainian School: Conceptual foundations of secondary school reform*. (in Ukrainian)
5. Zhaldak, M. I., & Mykhalin, H. O. (2011). *Elementary facts of set theory in the school mathematics course*. Mathematics in School, (3), 12-23. (in Ukrainian)
6. Zhaldak, M. I., Mykhalin, H. O., & Dekanov, S. Ya. (2007). *Mathematical analysis. Functions of several variables*. NPU named after M. P. Dragomanov. (in Ukrainian)
7. Merzlyak, A. H., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2021). *Algebra 8. Textbook for classes with an in-depth study of mathematics*. Kharkiv: Gymnaziia. (in Ukrainian)
8. Model Curriculum "Mathematics. Grades 5-6" for institutions of general secondary education (authors: Vasylyshyn M. S., Mylyanyk A. I., Pratsovytyi M. V., Prostakova Y. S., Shkolnyi O. V.). Retrieved from https://drive.google.com/file/d/1YMPwWKLNmdHTQ6wj4_5aUH0sPafkCBqX/view. (in Ukrainian)
9. Model Curriculum "Mathematics. Grades 7-9" for institutions of general secondary education (authors: Vasylyshyn M. S., Mylyanyk A. I., Pratsovytyi M. V., Prostakova Y. S., Shkolnyi O. V.). Retrieved from https://drive.google.com/file/d/1hxfR8CXPRbsZ16yos4CykfiJ-K5U-cKu/view. (in Ukrainian)
10. Onopriienko, O. V. (2023). *The competency potential of learning activities in mathematics lessons in the New Ukrainian School*. In *Primary education in the paradigm of the New Ukrainian School: Challenges of the time: Collection of materials of the All-Ukrainian scientific and practical conference (April 27, 2023, Hlukhiv)* (pp. 104-107). Hlukhiv National Pedagogical University named after Oleksandr Dovzhenko. (in Ukrainian)
11. On some issues of state standards for complete general secondary education, Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine No. 898 (2022). URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-п#Text. (in Ukrainian)
12. Approval of the Concept for the Development of Natural-Mathematical Education (STEM Education), Order of the Cabinet of Ministers of Ukraine No. 960-p (2020). URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-р#Text. (in Ukrainian)
13. Tarasenkova, N. A. (2016). *Competency-based principles of ensuring continuity in mathematics education at different levels of education*. In *Implementation of continuity in mathematical education: Realities and prospects: Materials of the All-Ukrainian scientific and practical conference (September 15-16, 2016, Odesa)* (pp. 108-111). Odesa: South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynskyi. (in Ukrainian)
14. Shkolnyi, O. (2024). *Methodological features of studying the logical foundations of mathematics in the integrated course "Mathematics" for 7th-grade students of the New Ukrainian School*. *Didactics of Mathematics: Theory, Experience, Innovations*, (2), 20-28. (in Ukrainian)
15. Casola, L., & Taylor, T. E. (Eds.). (2019). *Increasing Student Success in Developmental Mathematics*. National Academies Press. https://doi.org/10.17226/25547
16. Hayes, E. (2011). Science teachers take to the stage. *Science in School*, (19), 6-9.
17. *Learning and Understanding: Improving Advanced Study of Mathematics and Science in U.S. High Schools*. (2002). National Academies Press. https://doi.org/10.17226/10129
18. Rizayeva, L. (2022). Formation of research skills of students through solving problems in teaching mathematics in primary classes. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 17(8), 2567-2579.
19. Tandeep, K., McLoughlin, E., & Paul, G. (2022). Mathematics and science across the transition from primary to secondary school: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, (9).
20. Tifi, A., Natale, N., & Lombardi, A. (2006). Scientists at play: teaching science process skills. *Science in School*, (1), 37-40.

| *Матеріал надійшов до редакції: 28.11.2024 р.* | *Прийнято до друку: 15.02.2025 р.* | *Опубліковано: 29.04.2025 р.* |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2025, 40(2), https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-04
УДК: 373.5.091.27:51

ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ ЗДАТНОСТІ ДО ДОСЛІДЖЕНЬ ЯК ПЕДАГОГІЧНА ПРОБЛЕМА

Ольга МАТЯШ ✉
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Україна
matyash_27@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-7149-9545

Михайло КРИВОШЕЯ
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Україна
mishakryvoshea@gmail.com
https://orcid.org/0009-0000-4365-5937

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *У сучасному світі швидких змін і зростаючого обсягу інформації, здатність до досліджень стає однією з ключових компетентностей. Ефективне впровадження дослідницького підходу в освітню практику вимагає розробки нових, інструментів та форм роботи, які сприятимуть розвитку цієї здатності в учнів у сучасних умовах освітнього середовища. Нині потребують сучасного тлумачення відповіді на питання: як навчити сучасних учнів виокремлювати проблеми і досліджувати проблемні ситуації?; які прийоми методи та засоби є актуальними для забезпечення ефективності формування в учнів здатності до досліджень?*

Матеріали і методи. *Аналіз, систематизація й узагальнення результатів досліджень відображених у публікаціях вітчизняних та закордонних авторів. Власні спостереження та досвід навчання учнів.*

Результати. *Пояснено зміст поняття «здатність учнів до досліджень». Виокремлено виклики, які має подолати вчитель для забезпечення необхідних умов формування в учнів здатності до досліджень: збудження в учнів вмотивованості до досліджень, потреби в пошуковій активності; недостатність в учнів навичок критичного мислення; іноді стереотипне сприйняття учнями досліджень як складного й нудного процесу; подолання психологічних бар'єрів в окремих учнів; належна організація співпраці в дослідницьких групах; опанування учнями необхідного рівня письмових навичок. Головний виклик в недостатній теоретичній та практичній готовності вчителів до реалізації ефективної методики формування дослідницьких вмінь учнів.*

Висновки. *Необхідною умовою створення сприятливого середовища для формування в учнів дослідницьких умінь є інтеграція дослідницьких методів в освітній процес. Системний підхід дає змогу розглядати дослідницьке навчання як певну систему, що поєднує відповідну мету, завдання, зміст, методи й форми та передбачає важливі результати навчання учнів.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *здатність до досліджень; дослідницькі уміння; дослідницька діяльність; виклики в методичній діяльності вчителя.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Матяш О., Кривошея М. Формування в учнів здатності до досліджень як педагогічна проблема. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 30-35. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-04.

DEVELOPING STUDENTS' RESEARCH ABILITY AS A PEDAGOGICAL PROBLEM

Olha MATIASH ✉
Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Ukraine
matyash_27@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-7149-9545

Mykhailo KRYVOSHEIA
Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Ukraine
mishakryvoshea@gmail.com
https://orcid.org/0009-0000-4365-5937

ABSTRACT

Formulation of the problem. *In today's world of rapid changes and increasing volumes of information, research ability has become one of the key competencies. The effective integration of a research-based approach into educational practices requires developing new tools and methods that foster this ability in students within the modern academic environment. There is a growing need for contemporary interpretations of the following questions: How can modern students be taught to identify problems and explore problematic situations? What techniques, methods, and tools are relevant to develop students' research abilities effectively?*

Materials and methods. *The study involves the analysis, systematization, and generalization of research findings reflected in the publications of domestic and international authors, as well as personal observations and experience in teaching students.*

Results. *The concept of "students' research ability" has been explained. The challenges that teachers need to overcome to create the necessary conditions for developing students' research abilities have been highlighted: fostering motivation for research and a need for inquiry-based activity; addressing students' insufficient critical thinking skills; overcoming the stereotypical perception of research as a tedious and challenging process; tackling psychological barriers faced by individual students; organizing effective collaboration in research groups; and equipping students with adequate writing skills. The primary challenge lies in teachers' insufficient theoretical and practical preparedness to implement effective methodologies for developing students' research skills.*

Conclusion. *An essential condition for creating a conducive environment for developing students' research skills is integrating research methods into the educational process. A systematic approach allows research-based learning to be viewed as a system that combines specific goals, objectives, content, strategies, and forms, aiming to achieve significant learning outcomes for students.*

KEYWORDS: *research ability; research skills; research activity; challenges in teachers' methodological work.*

FOR CITATION: Matiash, O., & Kryvosheia, M. (2025). Developing students' research ability as a pedagogical problem. *Physical and Mathematical Education*, *40*(2), 30-35. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-04.

ВСТУП

Постановка проблеми. У сучасному світі швидких змін і зростаючого обсягу інформації, здатність до досліджень стає однією з ключових компетентностей, які необхідні для успішного розвитку особистості. Освітній процес нині має спрямовуватися на розвиток навичок аналізу, критичного мислення, творчого підходу та вміння самостійно здобувати нову інформацію. Відтак, формування в учнів здатності до дослідницької діяльності є одним із важливих завдань сучасної шкільної освіти. У процесі дослідження учні навчаються мислити критично: формулювати запитання, аналізувати дані, робити обґрунтовані висновки та розрізняти факти від припущень. Щоб бути згодом конкурентоспроможними, учні мають навчитися самостійно шукати, аналізувати та використовувати нову інформацію, навчитися досліджувати нове і незнайоме. Водночас, ефективне впровадження дослідницького підходу в освітню практику вимагає розробки нових методик, інструментів та форм роботи, які сприятимуть розвитку цієї здатності в учнів у сучасних умовах освітнього середовища. Формування здатності до досліджень – це певна інвестиція в майбутнє учнів, яка допоможе їм досягати успіху в житті.

Аналіз актуальних досліджень. Виконаний нами аналіз психолого-педагогічної літератури свідчить про те, що різні аспекти формування в учнів здатності до досліджень цікавили багатьох науковців. Психологічні основи дослідницького методу в навчанні розкрито в публікаціях Г. Колінець (1999), К. Постової (2014). Особливості дослідницької діяльності учнів розкриваються у наукових доробках С. Бабійчук (2017), В. Вознюк (2012), Н. Дикої (2023), В. Желязкова (2018), О. Заболотного (2007), О. Міхно (2010), П. Мороза (2018), П. Нечипуренко (2016), Г. Пустовіт (2011), Г. Шумицької (2005), Г. Ягенської (2021), та інших. О. Дубасенюк (2012) звертає увагу на необхідність підготовки учнів до здійснення дослідницької діяльності та наполягає на впровадженні методу дослідницького навчання, який ототожнює з евристичним, лабораторним, дослідницько-випробувальним, методом лабораторних уроків, природничо-науковим, дослідницьким підходом до навчання (Дубасенюк, 2012).

Особливості дослідницької діяльності учнів у процесі навчання математики досліджували українські педагоги математики Д. Васильєва (2016), Л. Голодюк (2015), А. Карлащук (2001), Г. Лиходєєвої (2009), М. Пихтар (2011). Зокрема, дослідження Д. Васильєвої (2016) стосуються науково-дослідницької діяльності учнів в умовах реалізації компетентнісного підходу до навчання математики, а дослідження Л. Голодюк (2015) – формування навчально-дослідницьких умінь учнів на уроках математики. Г.Лиходєєва (2009) досліджувала формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики. Розвиток математичних здібностей в процесі розв’язування дослідницьких задач в рамках Малої академії наук досліджував М. Пихтар (2011). Він, зокрема, зазначав, що успішність у науково-дослідницькій математичній діяльності забезпечують креативна спрямованість особистості, нестандартний спосіб мислення, високий рівень інтелекту і мотиваційно-вольова забезпеченість.

А. Карлащук захистила кандидатську дисертацію на тему «Формування дослідницьких умінь школярів у процесі розв’язування математичних задач з параметрами» (Карлащук, 2001). В дисертації запропоновано науково обґрунтовану модель методичної системи формування учбових дослідницьких умінь школярів у процесі розв’язування математичних задач з параметрами, методику побудови і впровадження у процес навчання математики системи задач з параметрами дослідницького характеру.

Проте вказані роботи українських педагогів математиків опубліковані більш як десять років тому, а сучасний світ змінюється надзвичайно швидко. З'являються нові технології, знання постійно оновлюються. Сучасний світ ставить перед людьми складні, міждисциплінарні виклики (екологія, технології, соціальна рівність). Здатність до досліджень має допомогти сучасним випускникам шкіл знаходити інноваційні рішення цих проблем. Підтвердження вищевказаному знаходимо у сучасних закордонних публікаціях. Garrett Patricio (2022) акцентує увагу, що якщо учні не будуть приділяти достатньо уваги розвитку дослідницьких навичок та навичок співпраці, то можуть зіткнутися в майбутньому із серйозними проблемами. Збір даних, розробка проєктів, колаборативні дослідницькі роботи мають стати важливими активностями в шкільному навчанні. Moore та Teter (2014) та Purcell та інші (2012) розпочали дискусію: коли варто розпочинати формування дослідницьких умінь учнів? Moore та Teter (2014) обґрунтовують, що це варто робити якомога раніше. K. Purcell, L. Rainie, J. Buchanan, L. Friedrich, A. Jacklin, C. Chen та K. Zickuhr (2012) пояснюють, що навпаки, ефективніше дослідницькі уміння формувати в учнів старшої школи.

На наш погляд, нині не втрачають актуальності та потребують сучасного тлумачення відповіді на питання: як навчити сучасних учнів виокремлювати проблеми і досліджувати проблемні ситуації ?; які прийоми методи та засоби є актуальними нині для забезпечення ефективності формування в учнів здатності до досліджень, зокрема у процесі навчання математики?

Мета статті пояснити основні виклики, які має подолати сучасний вчитель математики у процесі виконання одного із актуальних завдань – формування в учнів здатності до досліджень.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

З’ясуємо, для початку, основний зміст ключових понять. Поняття «дослідження» розглядається в педагогічній науці, як у вузькому, так і в широкому розумінні. У вузькому розумінні, дослідження – це науковий метод вивчення певної проблеми. У широкому розумінні, дослідження - це процес вивчення, аналізу та/або перевірки певного явища чи питання для отримання нових знань, підтвердження або спростування певного припущення.

Пояснення змісту поняття «здатний» знаходимо у книзі «Культура слова» О. Пономарьова, а саме «здатний – це спроможний на щось» (Пономарів, 2001). У педагогічному словнику С. Гончаренка зазначено, що *здатність* – властивість індивіда, яка визначає його можливість, спроможність, нахил до виконання певної діяльності. Причому *здатність* зумовлюється рівнем знань, здібностей, умінь, навичок, особистісними якостями. С. Гончаренко акцентує увагу на тому, що здатність може розвиватися, поглиблюватися в процесі практичної діяльності людини (Гончаренко, 1997).

Отже, можна стверджувати, що *здатність учнів до досліджень*, це сформованість їхніх *умінь* здійснювати певні дослідження у процесі навчання.

В українських науково-методичних дослідженнях за напрямом теорії і методики навчання математики зустрічаємо поняття «учбово-дослідницькі уміння». Зокрема, А. Карлащук послуговувалася наступним визначенням: «Учбові дослідницькі уміння – здатність учня виконувати розумові і практичні дії, що відповідають науково-дослідницькій діяльності, підпорядковуються логіці наукового дослідження, на основі знань і умінь, що набуваються в процесі вивчення основ наук» (Карлащук, 2001). Авторка виокремлює дослідницько учбову діяльність як один із видів учбової діяльності, та пояснює, що це діяльність, яка організована вчителем і спрямована на виконання учбових дослідницьких завдань, що вимагають пошуку пояснення та обґрунтування закономірних зв'язків і відношень, що експериментально спостерігаються, або фактів, явищ, процесів, задач, що теоретично аналізуються. В такій діяльності домінує самостійне застосування прийомів наукових методів пізнання, активізується процес набуття знань, розвиваються дослідницькі вміння. На кожному етапі ефективної учбової дослідницької діяльності відбувається формування в учнів певних дослідницьких умінь.

С. Гончаренко вказує, що внесення елементу дослідження в навчальні заняття сприяє вихованню в учнів активності, ініціативності, допитливості, розвиває їхнє мислення, заохочує потребу учнів у самостійних пошуках (Гончаренко, 1997). Незалежно від виду дослідницької діяльності, вона спрямована на розв'язання дослідницького завдання, що за своєю суттю є пізнавальним та слугує досягненню мети цілеспрямованого розвитку особистості, оволодіння дослідницькими вміннями.

Таким чином, можна стверджувати, що формування в учнів здатності до досліджень є важливим завданням для їхнього особистісного розвитку. Відповідне завдання затверджене на державному рівні в одному із ключових освітніх документів, а саме в «Стандарті базової середньої освіти» (2020). У вказаному Стандарті, у вимогах до обов'язкових результатів навчання учнів з математичної освітньої галузі, зазначено, що учень має навчитися досліджувати проблемні ситуації та виокремлювати проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів (Державний стандарт, 2020).

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

При проведенні дослідження були використані теоретичні методи: аналіз, систематизація й узагальнення результатів досліджень відображених у публікаціях українських та закордонних авторів щодо формування в учнів здатності до досліджень та відповідних викликів у методичній діяльності вчителя; контент-аналіз інтернет-ресурсів. Власні спостереження та досвід навчання учнів математики.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Маючи значний досвід навчання учнів математики, відразу ж зазначимо, що формування здатності до досліджень у школярів є важливим, але водночас складним завданням. Якісне виконання цього завдання потребує розуміння сутності вказаної педагогічної проблеми та дієвих прийомів протидії сучасним викликам на шляху її розв'язання. Які основні виклики має подолати сучасний вчитель математики для забезпечення необхідних умов формування в учнів здатності до досліджень?

По-перше, це власне здатність самого вчителя до інтеграції дослідницького підходу в навчання математики. У посібнику П. Мороза наведено результати опитування вчителів, які свідчать, що основними негативними чинниками, що ускладнюють впровадження дослідницької діяльності в процес навчання є, перш за все, недостатня теоретична та практична готовність вчителів щодо реалізації методики формування дослідницьких вмінь учнів (Мороз, 2018). Поняття дослідницьких умінь стверджує А. Карлащук трактується вчителями по-різному. Одні з них дослідницькими вміннями називають уміння, які учні формують у процесі виконання лабораторних робіт, пов'язаних з яким-небудь експериментом (18%). Окремі вчителі вважають, що дослідницькі уміння – це уміння працювати з науковою літературою (2%) (Карлащук, 2001). Результати анкетування, зібрані А. Карлащук, свідчать про те, що під засобами формування дослідницьких умінь учнів учителі розуміють: участь учнів у підготовці виступів і рефератів за певною тематикою (32%), виконання учнями завдань-досліджень (18%), проведення експериментальних досліджень (14%), виконання дослідницьких проектів (15%), участь у науково-дослідницьких конференціях (24%).

По-друге, якщо вчитель має власні переконання щодо необхідності формування в учнів здатності до досліджень, то він скоріш за все має подбати про збудження в учнів вмотивованості до досліджень. Учні часто сприймають навчання як пасивне засвоєння інформації, а не як процес активного дослідження. В основу дослідницької поведінки закладено психологічну потребу в пошуковій активності. Прояв дослідницької поведінки через інтерес до діяльності висвітлено в низці сучасних психологічних досліджень. Зокрема Г. Колінець встановлено, що мотивація дослідницької поведінки є сильнішою, ніж мотивація безпеки. Дослідницька ініціативність є основою всіх видів діяльності та виконує основні функції в розвитку пізнавальних процесів всіх рівнів. Складовими сучасних тенденцій у вивченні дослідницької поведінки та інтересу є: аналіз їх розвитку упродовж життя; вивчення особистісних якостей та індивідуальних відмінностей; врахування соціальних факторів та їх впливу (Колінець, 1999).

Ще одним викликом у процесі формування в учнів здатності до досліджень є подолання психологічних бар'єрів в окремих учнів. До негативних чинників, що ускладнюють процес формування в учнів дослідницької компетентності, психологи відносять також такі особливості учнів, як: 1) боязкість висловлювати перед вчителем та учнями власну думку з того чи іншого питання; 2) стереотипність мислення, звичка виконувати типові завдання стандартним способом і як наслідок свідоме чи підсвідоме стримування нетрадиційних (оригінальних) підходів до розв'язання навчальних проблем з історії; 3) нездатність змінювати точку зору, змінювати пізнавальну перспективу. Учні можуть боятися помилок чи публічної критики, що гальмує їхнє бажання експериментувати.

Викликом у процесі формування в учнів здатності до досліджень є недостатність в учнів навичок критичного мислення. Багато школярів не вміють аналізувати інформацію, формулювати запитання, перевіряти достовірність джерел і робити обґрунтовані висновки. Під способами та прийомами оволодіння дослідницькою діяльністю розуміється уміння бачити проблему, висувати гіпотези, спостерігати, проводити експерименти, давати визначення поняттям.

На ще один виклик у формуванні здатності учнів до досліджень звертають нашу увагу результати досліджень McDonough (2015). K. McDonough, W. Crawford, J. Vleeschauwer (2015), які стверджують, що, хоча існують такі завдання, як дослідницькі та випускні проєкти, які вимагають спільної роботи учнів, кожен учень відповідає за досягнення вищого рівня індивідуальних навичок письма. Подібним чином R. Anggraini, Y. Rozimela, та D. Anwar (2020) додали, що співпраця, поєднана з письмом, надає учням можливість генерувати ідеї та надавати взаємний зворотний зв'язок. Між навичками письма та якістю дослідницьких робіт існує взаємозв’язок, який свідчить про позитивну кореляцію між цими аспектами. Це означає, що зі зростанням навичок письма учнів підвищується і якість їхніх дослідницьких робіт. Це також вказує на те, що використання учнями засвоєного та опанованого рівня письмових навичок має значний і позитивний вплив на якість створених ними дослідницьких робіт (Anggraini, 2020).

Важливим аспектом формування в учнів здатності до досліджень є формування вміння співпрацювати. Як зазначає Gapinski (2018), співпраця полягає у спільній роботі для досягнення актуальних цілей. Однак, неналежна організація співпраці призводить до труднощів у досягненні дослідницьких цілей, зокрема через конфлікти в групах, незалежну роботу окремих учасників і несприйняття різних точок зору. Нездатність визнавати та приймати думки інших роблять співпрацю у процесі дослідження неуспішною.

Garrett Patricio (2022) вказує на існування проблеми - стереотипне сприйняття учнями досліджень як складного й нудного процесу. Наприклад, дослідники зустрічали учнів, які називали дослідницьку діяльність найбільш ненависною, а навчальний предмет «Дослідження» вважали виснажливим предметом. Це має спонукати вчителів до глибокого аналізу, чому учні можуть боятися досліджень і не бажати займатися ними. Організовуючи дослідницьку діяльність учнів, потрібно враховувати те, що цей процес має носити системний та комплексний характер, ґрунтуватися на результатах пізнавальної діяльності й забезпечувати пошук оригінальних рішень виконання дослідницького завдання. Дослідницька діяльність є результатом прояву пошукової активності, закріпленої в дослідницькій поведінці, але не кожний прояв пошукової активності переходить в цілеспрямовану дослідницьку поведінку, якщо не забезпечений сприятливими умовами. Тому К. Постова вказує на необхідність підтримки проявів пошукової активності в учнів та створення інструментарію з діагностики спрямованості пошукової активності та програм її продуктивного розвитку (Постова, 2014).

Розуміння вчителем вказаних викликів, вирішення відповідних проблем, сприятиме створенню ефективного освітнього середовища, де учні будуть зацікавлені у дослідженнях і самостійному пізнанні. Нині варто збагачувати процес навчання математики в школі і змістом, і методами, і прийомами, які могли б забезпечити учням можливість активно долучатися до дослідницької діяльності, у процесі якої в них відбувалося б формування дослідницьких умінь.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідницька діяльність учнів – це процес одноосібної або спільної роботи учнів, яка організована вчителем з метою виявлення сутності досліджуваних явищ і процесів. Метою такої методичної діяльності вчителя є створення умов для розвитку творчої особистості, якій притаманні дослідницькі уміння. Необхідною умовою створення сприятливого середовища для формування в учнів дослідницьких умінь є інтеграція дослідницьких методів в освітній процес. Системний підхід дає змогу розглядати дослідницьке навчання як один з можливих типів його організації, як певну систему, що поєднує відповідну мету, завдання, зміст, методи й форми та передбачає важливі результати навчання учнів. Здатність до досліджень забезпечує учнів необхідними інструментами для самостійного здобуття знань, аналізу інформації та вироблення обґрунтованих рішень.

Формування в учнів здатності до досліджень це завдання, яке має бути усвідомлене вчителем як сприяння розвитку критичного мислення учнів, творчого підходу та вміння адаптуватися до викликів сучасного світу. Виклики, які має подолати вчитель для забезпечення необхідних умов формування в учнів здатності до досліджень: збудження в учнів вмотивованості до досліджень, потреби в пошуковій активності; недостатність в учнів навичок критичного мислення; іноді стереотипне сприйняття учнями досліджень як складного й нудного процесу; подолання психологічних бар’єрів в окремих учнів; належна організація співпраці в дослідницьких групах; опанування учнями необхідного рівня письмових навичок. Однак, головний виклик ми вбачаємо нині в недостатній теоретичній та практичній готовності вчителів до реалізації ефективної методики формування дослідницьких вмінь учнів. Тому українська методична наука має, зокрема, забезпечити вчителя сучасними науково обґрунтованими методичними рекомендаціями забезпечення необхідних умов формування в учнів здатності до досліджень та подолання вказаних вище викликів.

Перспективою подальшого дослідження є наукове обґрунтування методичних рекомендацій для формування в учнів здатності до досліджень в умовах залучення їх до математичних змагань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабійчук, С.М. (2017). *Дидактичні умови застосування геоінформаційних систем у дослідницькій діяльності старшокласників*. Дис. канд. пед. наук, Київський університет імені Бориса Грінченка. https://undip.org.ua/wp-content/uploads/2021/06/.
2. Васильєва, Д. В. (2016). Науково-дослідницька діяльність учнів в умовах реалізації компетентнісного підходу до навчання математики. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології,* 2, 196-202. http://nbuv.gov.ua/UJRN/pednauk_2016_2_26.
3. Вознюк, В. О. (2012). Підготовка обдарованих дітей до дослідницької діяльності. *Креативна педагогіка. Наук.-метод. академія міжнародного співробітництва з креативної педагогіки*, 5, 23-27. https://library.zu.edu.ua/doc/creat_pedagog/5/2012_5.pdf.

4. Голодюк, Л.С. (2015). Формування навчально-дослідницьких умінь учнів на уроках математики. *Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти,* 3 (7). https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/nz-pmfmto/article/view/128.
5. Гончаренко, С. У. (1997). *Український педагогічний словник*. Либідь. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint
6. Постанова КМУ «Державний стандарт базової середньої освіти» (2020). № 898 https://ru.osvita.ua/.
7. Дика, Н. (2023). Дидактичні умови формування дослідницьких умінь в учнів початкової школи засобом міні-досліджень. *Актуальні питання гуманітарних наук*, 65, 1. http://www.aphn-journal.in.ua/archive/65_2023/part_1/48.pdf.
8. Дубасенюк, А. О. (2012). Сутність дослідницького методу навчання у підготовці обдарованих учнів до дослідницької діяльності. *Креативна педагогіка. Академія міжнародного співробітництва з креативної педагогіки*, 5, 14-18. https://library.zu.edu.ua/doc/creat_pedagog/5/2012_5.pdf
9. Желязков, В. В. (2018). Використання навчально-дослідницьких завдань на уроках біології як засіб розвитку мислення учнів. *Екологічний вісник Криворіжжя, 3*, 106-109. https://www.researchgate.net/publication/361342439
10. Заболотний, О. В. (2007). Формування дослідницьких умінь учнів у процесі вивчення синтаксису української мови. https://www.narodnaosvita.kiev.ua/
11. Карлащук, А. Ю. (2001). *Формування дослідницьких умінь школярів у процесі розв'язування математичних задач з параметрами.* Дис. канд. пед. наук, Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова. https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/
12. Колінець, Г. Г. (1999). *Психологічні передумови формування математичних дослідницьких здібностей у старшокласників*. Дис. канд. психол. наук, Інститут психології ім. Г.С.Костюка АПН України.
13. Лиходєєва, Г. В. (2009). Формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики. Дис. канд. пед. наук, Бердянський державний педагогічний університет. https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/
14. Матяш, О.І. (2012). Удосконалення змісту самостійної дослідницької діяльності студентів – майбутніх учителів математики. *Сучасні стратегії та технології підготовки фахівців у вищій школі*, 156-158.
15. Матяш, О.І. & Волкодав, Т.П. (2015). Удосконалення дослідницької діяльності студентів в умовах використання інформаційних технологій. *Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету. Серія: Педагогіка*, 1, 120-125. http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/.
16. Мороз, П. В. (2018). *Дослідницька діяльність учнів у процесі навчання всесвітньої історії в основній школі*. ТОВ «КОНВІ ПРІНТ». https://undip.org.ua/wp-content/uploads/2021/07/dosl_08.11.2018_2.pdf
17. Міхно, О. П. (2010). *Організація дослідницької діяльності старшокласників у процесі вивчення української літератури*. Дис. канд. пед. наук, Ін-т педагогіки АПН України. http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis64r_81/cgiirbis_64
18. Нечипуренко, П. (2016). Навчально-дослідницька діяльність учнів з хімії у профільній школі як засіб формування дослідницьких компетентностей. *Інформаційно-комунікаційні технології в освіті*, 135-143. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/166145/2/18_1N.pdf
19. Пихтар, М.П. (2011). *Розвиток математичних здібностей школярів у діяльності Малої академії наук.* Дис. канд. пед. наук, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/_dis.pdf
20. Пономарів, О. Д. (2001). *Культура слова: Мовностилістичні поради*. Либідь. https://ru.scribd.com/doc/21209737/
21. Постова, К.Г. (2014). *Психологічні умови розвитку дослідницьких здібностей обдарованих учнів: монографія*. Інститут обдарованої дитини. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/9884/1/
22. Пустовіт, Г. П. (2011). Дослідницька діяльність учнів у позашкільному навчальному закладі як дидактичний засіб. *Рідна школа*, 12, 12-15. http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv
23. Шумицька, Г. В. (2005). Методологічні аспекти науково-дослідницької роботи учнів у школах нового типу. *Освіта Закарпаття*, 2, 69-72.
24. Ягенська, Г.В., & Степанюк, А.В. (2021). *Формування дослідницьких умінь школярів у галузі природничих наук (друга половина XX – початок XXI століття)*. ТНПУ ім. В. Гнатюка. http://dspace.tnpu.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/23521/1/Yahenska_Stepanyuk_Form_dosl_umin_mon.pdf
25. Anggraini, R., Rozimela, Y., & Anwar, D. (2020). The Effects of Collaborative Writing on EFL Learners' Writing Skills and Their Perception of the Strategy. *Journal of Language Teaching and Research, 11*(2). https://www.academypublication.com/issues2/jltr/vol11/02/25.pdf
26. Gapinski, A. (2018). Assessment of Effectiveness of Teamwork Skills Learning in Collaborative Learning. *Journal of Management and Engineering Integration, 11* (2). https://www.researchgate.net/publication/332186339
27. Garrett Patricio. (2022). Research, Writing, and Collaborative Skills, and Research Output Quality of Senior High School Students Under the New Normal. *Journal of World Englishes and Educational Practices, 4*(2), 35-69. https://www.researchgate.net/publication/361093227
28. Moore, S. D., & Teter, K. (2014). Group-effort applied research: Expanding opportunities for undergraduate research through original, class-based research projects. *Biochemistry and Molecular Biology Education, 42*(4), 331-338. https://iubmb.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/bmb.20802
29. McDonough, K., Crawford, W. J., & Vleeschauwer, J. D., (2015). Thai EFL learners' interaction during collaborative writing tasks and its relationship to text quality. In M. Sato & S. Ballinger (Ed). Peer interaction and second language learning: Pedagogical potential and research agenda. *Language Learning & Language Teaching, 45* (2016), 185-208. https://www.researchgate.net/publication/315585120_7
30. Purcell, K., Rainie, L., Buchanan, J., Friedrich, L., Jacklin, A., Chen, C., & Zickuhr, K. (2012). *Teaching Research Skills in Today's Digital Environment*. https://www.pewresearch.org/internet/2012/11/01/part-iv-teaching-research-skills-in-todays-digital-environment/

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Babiichuk, S.M. (2017). Dydaktychni umovy zastosuvannia heoinformatsiinykh system u doslidnytskii diialnosti starshoklasnykiv. Dys. kand. ped. nauk, Kyivskyi universytet imeni Borysa Hrinchenka. https://undip.org.ua/wp-content/uploads/2021/06/.
2. Vasylieva, D. V. (2016). Naukovo-doslidnytska diialnist uchniv v umovakh realizatsii kompetentnisnoho pidkhodu do navchannia matematyky. Pedahohichni nauky: teoriia, istoriia, innovatsiini tekhnolohii, 2, 196-202. http://nbuv.gov.ua/UJRN/pednauk_2016_2_26.
3. Vozniuk, V. O. (2012). Pidhotovka obdarovanykh ditei do doslidnytskoi diialnosti. Kreatyvna pedahohika. Nauk.-metod. akademiia mizhnarodnoho spivrobitnytstva z kreatyvnoi pedahohiky, 5, 23-27. https://library.zu.edu.ua/doc/creat_pedagog/5/2012_5.pdf.
4. Holodiuk, L.S. (2015). Formuvannia navchalno-doslidnytskykh umin uchniv na urokakh matematyky. Naukovi zapysky. Seriia: Problemy metodyky fizyko-matematychnoi i tekhnolohichnoi osvity, 3 (7). https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/nz-pmfmto/article/view/128.
5. Honcharenko, S. U. (1997). Ukrainskyi pedahohichnyi slovnyk. Lybid. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint
6. Postanova KMU «Derzhavnyi standart bazovoi serednoi osvity» (2020). № 898 https://ru.osvita.ua/.
7. Dyka, N. (2023). Dydaktychni umovy formuvannia doslidnytskykh umin v uchniv pochatkovoi shkoly zasobom mini-doslidzhen. Aktualni pytannia humanitarnykh nauk, 65, 1. http://www.aphn-journal.in.ua/archive/65_2023/part_1/48.pdf.
8. Dubaseniuk, A. O. (2012). Sutnist doslidnytskoho metodu navchannia u pidhotovtsi obdarovanykh uchniv do doslidnytskoi diialnosti. Kreatyvna pedahohika. Akademiia mizhnarodnoho spivrobitnytstva z kreatyvnoi pedahohiky, 5, 14-18. https://library.zu.edu.ua/doc/creat_pedagog/5/2012_5.pdf.

9. Zheliazkov, V. V. (2018). Vykorystannia navchalno-doslidnytskykh zavdan na urokakh biolohii yak zasib rozvytku myslennia uchniv. Ekolohichnyi visnyk Kryvorizhzhia, 3, 106-109. https://www.researchgate.net/publication/361342439
10. Zabolotnyi, O. V. (2007). Formuvannia doslidnytskykh umin uchniv u protsesi vyvchennia syntaksysu ukrainskoi movy. https://www.narodnaosvita.kiev.ua/
11. Karlashchuk, A. Iu. (2001). Formuvannia doslidnytskykh umin shkoliariv u protsesi rozv'iazuvannia matematychnykh zadach z parametramy. Dys. kand. ped. nauk, Natsionalnyi pedahohichnyi universytet im. M. P. Drahomanova. https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/
12. Kolinets, H. H. (1999). Psykholohichni peredumovy formuvannia matematychnykh doslidnytskykh zdibnostei u starshoklasnykiv. Dys. kand. psykhol. nauk, Instytut psykholohii im. H.S.Kostiuka APN Ukrainy.
13. Lykhodieieva, H. V. (2009). Formuvannia navchalno-doslidnytskykh umin uchniv u protsesi navchannia elementiv stokhastyky. Dys. kand. ped. nauk, Berdianskyi derzhavnyi pedahohichnyi universytet. https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/
14. Matiash, O.I. (2012). Udoskonalennia zmistu samostiinoi doslidnytskoi diialnosti studentiv – maibutnikh uchyteliv matematyky. Suchasni stratehii ta tekhnolohii pidhotovky fakhivtsiv u vyshchii shkoli, 156-158.
15. Matiash, O.I. & Volkodav, T.P. (2015). Udoskonalennia doslidnytskoi diialnosti studentiv v umovakh vykorystannia informatsiinykh tekhnolohii. Naukovyi visnyk Melitopolskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu. Seriia: Pedahohika, 1, 120-125. http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/.
16. Moroz, P. V. (2018). Doslidnytska diialnist uchniv u protsesi navchannia vsesvitnoi istorii v osnovnii shkoli. TOV «KONVI PRINT». https://undip.org.ua/wp-content/uploads/2021/07/dosl_08.11.2018_2.pdf.
17. Mikhno, O. P. (2010). Orhanizatsiia doslidnytskoi diialnosti starshoklasnykiv u protsesi vyvchennia ukrainskoi literatury. Dys. kand. ped. nauk, In-t pedahohiky APN Ukrainy. http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis64r_81/cgiirbis_64.
18. Nechypurenko, P. (2016). Navchalno-doslidnytska diialnist uchniv z khimii u profilnii shkoli yak zasib formuvannia doslidnytskykh kompetentnostei. Informatsiino-komunikatsiini tekhnolohii v osviti, 135-143. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/166145/2/18_1N.pdf.
19. Pykhtar, M.P. (2011). Rozvytok matematychnykh zdibnostei shkoliariv u diialnosti Maloi akademii nauk. Dys. kand. ped. nauk, Nats. ped. un-t im. M. P. Drahomanova. https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/_dis.pdf.
20. Ponomariv, O. D. (2001). Kultura slova: Movnostylistychni porady. Lybid. https://ru.scribd.com/doc/21209737/.
21. Postova, K.H. (2014). Psykholohichni umovy rozvytku doslidnytskykh zdibnostei obdarovanykh uchniv: monohrafiia. Instytut obdarovanoi dytyny. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/9884/1/.
22. Pustovit, H. P. (2011). Doslidnytska diialnist uchniv u pozashkilnomu navchalnomu zakladi yak dydaktychnyi zasib. Ridna shkola, 12, 12-15. http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv.
23. Shumytska, H. V. (2005). Metodolohichni aspekty naukovo-doslidnytskoi roboty uchniv u shkolakh novoho typu. Osvita Zakarpattia, 2, 69-72.
24. Yahenska, H.V., & Stepaniuk, A.V. (2021). Formuvannia doslidnytskykh umin shkoliariv u haluzi pryrodnychykh nauk (druha polovyna XX – pochatok XXI stolittia). TNPU im. V. Hnatiuka. http://dspace.tnpu.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/23521/1/Yahenska_Stepanyuk_Form_dosl_umin_mon.pdf
25. Anggraini, R., Rozimela, Y., and Anwar, D. (2020). The Effects of Collaborative Writing on EFL Learners' Writing Skills and Their Perception of the Strategy. Journal of Language Teaching and Research, 11(2). https://www.academypublication.com/issues2/jltr/vol11/02/25.pdf
26. Gapinski, A. (2018). Assessment of Effectiveness of Teamwork Skills Learning in Collaborative Learning. Journal of Management and Engineering Integration. 11 (2). https://www.researchgate.net/publication/332186339_
27. Garrett Patricio. (2022). Research, Writing, and Collaborative Skills, and Research Output Quality of Senior High School Students Under the New Normal. Journal of World Englishes and Educational Practices 4(2):35-69. https://www.researchgate.net/publication/361093227_
28. Moore, S. D. & Teter, K. (2014). Group-effort applied research: Expanding opportunities for undergraduate research through original, class-based research projects. Biochemistry and Molecular Biology Education, 42(4), 331-338. https://iubmb.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/bmb.20802.
29. McDonough, K., Crawford, W. J., & Vleeschauwer, J. D., (2015). Thai EFL learners' interaction during collaborative writing tasks and its relationship to text quality. In M. Sato & S. Ballinger (Ed). Peer interaction and second language learning: Pedagogical potential and research agenda. Language Learning & Language Teaching, 45 (2016), 185-208. https://www.researchgate.net/publication/315585120_7_
30. Purcell, K., Rainie, L., Buchanan, J., Friedrich, L., Jacklin, A., Chen, C., & Zickuhr, K. (2012). Teaching Research Skills in Today's Digital Environment. https://www.pewresearch.org/internet/2012/11/01/part-iv-teaching-research-skills-in-todays-digital-environment/

| *Матеріал надійшов до редакції: 03.01.2025 р.* | *Прийнято до друку: 18.02.2025 р.* | *Опубліковано: 29.04.2025 р.* |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)

p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X **2025, 40(2)**, https://doi.org/**10.31110/fmo2025.v40i2-05**

УДК: 378.046-021.68:51

АСПІРАНТУРА З ТЕОРІЇ І МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ: СУЧАСНИЙ ДОСВІД І НАПРЯМИ РОЗВИТКУ

Любов МИХАЙЛЕНКО ✉
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Україна
mikhailenkolf@gmail.com,
https://orcid.org/0000-0001-5051-5561

Іван ХУТЧЕНКО
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Україна
chytor96@gmail.com, https://orcid.org/0009-0002-9022-6996

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Підготовка наукових кадрів у галузі теорії і методики навчання математики та залучення молодих науковців до академічної спільноти є актуальною проблемою. В Україні за останні п'ять років захищено лише чотири дисертації за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика), що вказує на критичну потребу в оновленні підходів до підготовки PhD і EdD.*

Матеріали і методи. *Досліджено досвід підготовки докторів філософії та освітніх докторів із математичної освіти у США, Великій Британії та Китаї на основі наукових публікацій, звітів ОЕСР та національних освітніх стратегій.*

Результати. *Китайська система підготовки докторів філософії демонструє динамічне зростання та посідає провідні позиції у світі за кількістю здобувачів і рівнем фінансування досліджень. Освітня політика КНР спрямована на залучення талановитих студентів, розвиток настав-ництва та інтеграцію наукових кадрів у шкільну освіту, що сприяє інноваційному поступу країни. Досліджено сучасні напрями підготовки науково-педагогічних кадрів у галузі математичної освіти у Великобританії на прикладі трьох провідних університетів. Окреслено особливості програм підготовки докторів філософії (PhD) та докторів педагогічних наук (EdD), їхні вимоги, структуру та перспективи випускників у міжнародному академічному середовищі. Розглянуто актуальні тенденції підготовки докторів математичної освіти у США, зокрема особливості програм PhD та Ed.D, їхні вимоги, кар'єрні перспективи та освітній зміст. Аналізується можливість онлайн-навчання, структура курсів, стажування, підсумкові оцінювання та дослідницька складова, а також відмінності між підходами до підготовки освітніх лідерів і науковців у сфері математичної освіти.*

Висновки. *Актуальним напрямом розвитку аспірантури з теорії і методики навчання математики є впровадження освітньо-наукових програм підготовки EdD у сфері методики навчання математики, орієнтованих на вчителів-практиків та освітніх лідерів. Подальші дослідження мають бути спрямовані на розширення практичної підготовки та вдосконалення державної політики підтримки молодих науковців.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *аспірантура з теорії і методики навчання математики; доктор філософії; науково-педагогічні кадри в галузі математичної освіти.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Михайленко Л., Хутченко І. Аспірантура з теорії і методики навчання математики: сучасний досвід і напрями розвитку. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 36-42. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-05.

POSTGRADUATE STUDIES IN THE THEORY AND METHODS OF TEACHING MATHEMATICS: CURRENT EXPERIENCE AND DEVELOPMENT DIRECTIONS

Lyubov MYKHAILENKO ✉
Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Ukraine
mikhailenkolf@gmail.com,
https://orcid.org/0000-0001-5051-5561

Ivan KHUTCHENKO
Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Ukraine
chytor96@gmail.com, https://orcid.org/0009-0002-9022-6996

ABSTRACT

Formulation of the problem*. The training of research personnel in the theory and methods of teaching mathematics and the engagement of young scholars in the academic community are pressing issues. In Ukraine, only four dissertations have been defended in the last five years in the specialty 014 Secondary Education (Mathematics), highlighting a critical need to modernize PhD and EdD training approaches.*

Materials and methods. *Based on academic publications, OECD reports, and national educational strategies, the study examines the experience of training Doctor of Philosophy (PhD) and Doctor of Education (EdD) graduates in mathematics education in the USA, the UK, and China.*

Results. *China's PhD training system demonstrates dynamic growth and ranks among the world's leaders in terms of the number of doctoral candidates and research funding. The country's education policy focuses on attracting talented students, fostering mentorship, and integrating research personnel into school education, driving innovation. The study explores the current directions of mathematics education research training in the UK, based on three leading universities. The characteristics of PhD and EdD programs, their requirements, structure, and graduates' prospects in the international academic environment are outlined. The study also examines trends in doctoral training in mathematics education in the USA, highlighting the specifics of PhD and EdD programs, their requirements, career prospects, and educational content. The analysis covers online learning opportunities, course structure, internships, final assessments, research components, and differences in preparing educational leaders versus researchers in mathematics education.*

Conclusion. *A key direction for developing postgraduate studies in the theory and methods of teaching mathematics is the implementation of EdD programs in mathematics education, tailored to practicing teachers and educational leaders. Further research should focus on expanding practical training and improving state policies to support young researchers.*

KEYWORDS: *postgraduate studies in the theory and methods of teaching mathematics; Doctor of Philosophy; research and teaching personnel in mathematics education.*

FOR CITATION: Mykhailenko, L., & Khutchenko, I. (2025). Postgraduate studies in the theory and methods of teaching mathematics: current experience and development directions. *Physical and Mathematical Education*, *40*(2), 36-42. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-05.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасний розвиток системи вищої освіти в Україні висуває нові виклики перед підготовкою наукових кадрів, зокрема докторів філософії за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика). У цьому контексті аспірантура відіграє ключову роль у формуванні висококваліфікованих фахівців, здатних розв'язувати складні науково-педагогічні завдання та впроваджувати інноваційні методики навчання. Водночас у світовій практиці спостерігається тенденція до зменшення кількості вступників до аспірантури (за винятком України під час воєнного стану). За даними звітів Організації економічного співробітництва та розвитку (ОЕСР), основними причинами цього є зростання вартості навчання та зниження суспільної довіри до реальної цінності вищої освіти. У відповідь на ці виклики університети розробляють стратегії залучення майбутніх докторантів, пропонуючи стипендії, знижуючи оплату за навчання та акцентуючи увагу на можливостях професійного зростання, які відкриває наукова освіта.

Одним із важливих викликів для університетів країн ОЕСР є старіння академічного персоналу. Станом на сьогодні 40% викладачів мають вік 50 років і більше, а в Італії та Греції цей показник перевищує 50%. Це викликає занепокоєння щодо майбутнього кадрового оновлення, оскільки частина викладачів вийде на пенсію впродовж наступного десятиліття. Водночас молоді викладачі (до 30 років) становлять лише 7-9% академічного персоналу, що свідчить про складнощі їхньої інтеграції в систему вищої освіти. Найчастіше вони долучаються до академічного середовища ще під час навчання в аспірантурі. Крім того, демографічні зміни – зниження народжуваності та старіння населення – зменшують попит на викладачів, ускладнюючи процес оновлення кадрів (Anon, 2024).

Звіт «Стан академічної кар'єри в країнах ОЕСР: огляд доказів» надрукований у 2024 році виявляє низку важливих проблем у вищій освіті (Anon, 2024). До основних викликів для науковців відносять:

- збільшення залежності від нестабільних та короткострокових контрактів, які не забезпечують належної стабільності;
- значне перевантаження, яке негативно впливає на баланс між професійним і особистим життям;
- зосередження викладачів переважно на дослідницьких результатах, тоді як викладацька діяльність, робота із студентами та інші обов'язки залишаються на другому плані;
- недостатність академічної освіти для всебічної підготовки вчених до виконання багатогранних професійних ролей. З огляду на це, зростає потреба у безперервному професійному навчанні, наприклад, щоб забезпечити адаптацію до цифрового середовища викладання.

Схожі виклики постають і перед українською академічною спільнотою. Зокрема, за останні п'ять років в Україні було виконано та захищено лише чотири дисертаційних досліджень за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика), що є критично недостатнім показником (Матяш & Ящук, 2024a; Ящук, 2024). Це свідчить про нагальну потребу в аналізі сучасного стану методичної науки та врахуванні світових тенденцій у підготовці наукових кадрів у галузі математичної освіти. Впровадження міжнародного досвіду та оновлення підходів до аспірантської підготовки сприятимуть формуванню фахівців, здатних ефективно відповідати на актуальні виклики освітньої галузі.

Аналіз актуальних досліджень. Питання вдосконалення підготовки наукових кадрів у галузі теорії і методики навчання математики та залучення молодих науковців до академічної спільноти є актуальним і широко обговорюється в наукових колах. Основна увага досліджень у цій сфері зосереджена на кількох ключових аспектах: організації освітнього процесу в аспірантурі, впровадженні міждисциплінарних підходів, використанні новітніх технологій у науково-педагогічній підготовці та розробці інструментів для оцінювання ефективності підготовки аспірантів.

Українські науковиці О. Матяш та К. Ящук (Shvets et al., 2020; Матяш & Ящук, 2024b; Ящук, 2024; Matiash et al., 2025) у своїх роботах аналізують проблематику дисертаційних досліджень із теорії і методики навчання математики, описують діяльність сучасних науково-педагогічних шкіл з теорії і методики навчання математики та приділяють увагу формуванню у майбутніх учителів математики національно-освітньої предметної компетентності.

Міжнародні дослідники, такі як Б. Шварц (Schwarz B.), Г. Кайзер (Kaiser G.) (Schwarz and Kaiser, 2019), Н. Пресмег (Presmeg N.), Дж. Кілпатрік (Kilpatrick J.) (Presmeg and Kilpatrick, 2019), К. Лу (Lu C.) (Lu, Peng, and Chen, 2025), Дж. Чжу (Zhu J.), Ю. Чжан (Zhang Y.) (Zhu et al. ,2025; Zhu, Zhang, and Zheng, 2024) висвітлюють сучасні тенденції у математичній освіті, а також прогнозують можливі напрямки майбутніх досліджень. В їхніх роботах особливий акцент робиться на практико орієнтованій підготовці аспірантів, яка включає активну участь у міждисциплінарних проєктах та співпраці з науковими установами. Важливе місце посідає також гнучкість освітніх програм, що дозволяє аспірантам формувати індивідуальні траєкторії навчання відповідно до їхніх наукових інтересів та актуальних запитів ринку праці.

О. Спірін, Ю. Носенко, А. Яцишин (Spirin, Nosenko, and Iatsyshyn 2016) здійснили ґрунтовний аналіз сучасних вимог до підвищення ефективності підготовки наукових кадрів вищої кваліфікації для інформатизації освіти. Вони охарактеризували організаційно-педагогічні умови, необхідні для якісної підготовки майбутніх докторів наук, та представили досвід їх успішної реалізації в Інституті інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України.

Отже, національні та міжнародні дослідження підкреслюють важливість удосконалення підготовки майбутніх науково-педагогічних кадрів з теорії і методики навчання математики, орієнтуючи її на сучасні виклики та можливості розвитку.

Мета статті. Аналіз сучасного зарубіжного досвіду підготовки PhD і EdD у галузі математичної освіти для визначення перспективних практик, які можна адаптувати до українських реалій. Стаття спрямована на окреслення напрямів удосконалення цієї освітньої ланки, щоб підвищити її ефективність та відповідність сучасним викликам.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Аналіз, узагальнення та систематизація наукових публікацій, звітів ОЕСР, національних освітніх стратегій та програм підготовки аспірантів у галузі математичної освіти, статистичних даних.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

У більшості зарубіжних країн студенти після завершення бакалаврату можуть продовжити навчання на магістерських чи докторських програмах або здобути інші кваліфікації. Організація та структура цієї частини вищої освіти значно варіюються залежно від країни та навчального закладу.

Докторські програми з математичної освіти бувають двох видів, і можуть присвоювати ступінь Ed.D (Doctor of Education) або PhD (Doctor of Philosophy in Education). EdD є професійним ступенем, орієнтованим на підготовку фахівців для керівних посад у сфері освіти. PhD є академічним ступенем, спрямованим на підготовку випускників до науково-дослідницької та викладацької діяльності. Основною відмінністю програм є акцент на практичному застосуванні досліджень у випадку EdD, тоді як PhD зосереджений виключно на розвитку наукових досліджень. Важливою характеристикою є й вимога до періоду обов'язкової присутності аспіранта в навчальному закладі для активної участі в освітньому процесі: для здобуття EdD необхідна обов'язкова присутність у навчальному закладі для активної участі в навчальному процесі, тоді як PhD не потребує такої форми участі, дозволяючи проводити дослідження дистанційно. Крім того, сфери застосування ступенів також відрізняються: EdD є більш універсальним і знаходить застосування у різних галузях, включаючи управлінську, освітню та державну, тоді як PhD орієнтований переважно на академічне середовище. Ці відмінності визначають особливості підготовки та подальшої професійної реалізації випускників кожної з програм (Myers, 2024).

Звіти Організації економічного співробітництва та розвитку (OECP) містять перелік індикаторів, що застосовуються для оцінювання якості освіти (OECD Indicators, 2022). Серед них – такі критерії, як набір студентів ЗВО, співвідношення студентів і викладачів, віковий склад академічного персоналу, розподіл професорсько-викладацького складу за основними функціями тощо. Окремо виокремлено індикатори, що застосовуються для оцінювання якості підготовки в аспірантурі (Zhu et al., 2025): співвідношення кількості докторських ступенів до загальної кількості аспірантів; річний темп набору аспірантів за останні п'ять років; частка осіб віком 25-34 роки із вченими ступенями; кількість журнальних публікацій, які були проіндексовані в WoS; співвідношення іноземних аспірантів до загальної кількості аспірантів; кількість присвоєних наукових ступенів; співвідношення студентів і викладачів; фінансування науково-дослідних робіт (НДР); частка університетів країни, які входять до топ-50 світових рейтингів, порівняно із загальною кількістю університетів. Дані за цими критеріями було нормалізовано за шкалою від 0 до 100, а середній бал використовувався для ранжування країн. У підсумку визначено 10 країн-лідерів у підготовці наукових кадрів: США, Великобританія, Франція, Канада, Китай, Нідерланди, Німеччина, Австралія, Японія, Південна Корея (Zhu et al., 2025, 2024). У статті розглядається досвід підготовки PhD і EdD із математичної освіти у трьох країнах: США, Великій Британії та Китаї. Вибір цих країн зумовлений їхнім лідерством у світових рейтингах якості освіти.

Особливості підготовки докторів філософії у Китаї. Китайська Народна Республіка входить до десятки країн лідерів за якістю підготовки докторів філософії та зокрема, посідає провідні позиції у світі за кількістю підготовлених здобувачів. Вона утримує лідерство за річними темпами набору аспірантів протягом останніх п'яти років. За кількістю присуджених наукових ступенів Китай поступається лише США, а за рівнем фінансування наукових досліджень посідає третє місце.

Значне збільшення прийому аспірантів за останні роки можна пояснити національною освітньою політикою Китаю, спрямованою на розширення загального масштабу вищої освіти. В останні десятиліття в Китаї спостерігався значний сплеск значущості та популярності професійних ступенів магістра та доктора наук, що було зумовлено сукупністю соціально-економічних факторів та політики уряду щодо освіти.

Китай здійснює реформу зарахування до аспірантури, орієнтуючись на залучення талановитих студентів через програми прямого вступу на докторантуру. Вона спрямована на академічно успішних студентів з китайським громадянством, які закінчили закордонні університети світового рівня, мають високий академічний рейтинг, дослідницький потенціал та прагнуть повернутися до Китаю. Це підвищує якість аспірантів і розширює науковий потенціал Китаю.

Значна увага відводиться процесам оптимізації відбору наставників, постійно відбувається професійний розвиток наставників та налагоджена система моніторингу взаємодії між керівниками й аспірантами. Вважається, що наставницькі стосунки є основою освітньої взаємодії в аспірантурі, яка впливає на якість підготовки та результати навчання. У національній політиці Китаю, керівники аспірантів визначаються ключовими особами, відповідальними за їхню підготовку.

У національній та освітній політиці Китаю з метою стимулювання економічного та технологічного розвитку ключову роль відведено підготовці висококваліфікованих наукових інженерних кадрів, зокрема підготовці наукових кадрів інженерних спеціальностей. З цією метою спрямовуються всі зусилля на створення нової генерації фахівців, здатних підтримувати інноваційний поступ країни. І як додаток до підготовки інженерних професійних аспірантів, деякі вчені намагаються обговорити важливість, необхідність і доцільність культивування магістерських і докторських ступенів в галузі освіти, зокрема підготовки магістра освіти та доктора математичної освіти. Підготовка докторантів в галузі освіти у Китаї фокусується на підвищенні професійної компетентності майбутніх вчителів, вчителів та викладачів. Особливий акцент зроблено на залученні талановитих студентів природничих і технічних дисциплін для викладання в початковій та середній школах, використовуючи інноваційні методи підготовки. МОН Китаю підтримує подвійні дипломи та довгостроковий професійний супровід учителів (Opinions of the Ministry of Education on the Implementation of the National Excellent Primary and Secondary School Teacher Training Program). Також на сьогодні в китайській системі освіти вітається, якщо науковець який отримав докторський ступінь з математики йде викладати математику до школи. Міністерство освіти Китаю активно підтримує створення середовища, яке заохочує дослідження та сприймає невдачі як частину навчального процесу, з метою підготовки висококваліфікованих викладачів та науковців. Завдяки такій політиці країна сприяє розвитку економіки, науки і освіти.

Сучасні напрями підготовки науково-педагогічних кадрів у галузі математичної освіти у Великобританії досліджено на прикладі трьох провідних університетів: Кембриджського університету (https://www.educ.cam.ac.uk/courses/postgraduate/doctoral/), Единбурзького університету (https://postgraduate.degrees.ed.ac.uk/index.php?r=site/view&edition=2025&id=953) та Університету Лафборо (https://www.lboro.ac.uk/study/postgraduate/research-degrees/phd-opportunities/#departments=maths-education-centre). У Великобританії багато університетів пропонують здобувати докторський ступінь у галузі математичної освіти. Програми поділяються на два основних типи: доктор педагогічних наук (EdD) та доктор філософії (PhD). Тривалість навчання на програмі PhD: 3-4 роки (денна форма), 5-7 років (заочна). PhD програма передбачає тісну співпрацю з освітніми установами та обов'язкове педагогічне стажування. Перший рік зосереджено на створенні спільноти серед докторантів та міждисциплінарних дискусіях. Наприкінці року дослідники подають реєстраційний звіт із планом дослідження, який обговорюється на viva (усному іспиті). Другий рік присвячено практичній дослідницькій роботі, яка триває 2-3 семестри, а також початковому аналізу даних. Третій рік охоплює глибокий аналіз даних, написання дисертації та її захист. Для заочників ці етапи рівномірно розподіляються на 5 років. Основна мета PhD програми полягає в підготовці оригінального дослідження, яке робить значний внесок у цю область. Остаточне присудження ступеня вирішується виключно на основі оцінки кандидатської дисертації та успішності кандидата на заключному усному іспиті. Багато аспірантів публікують частини своїх досліджень після отримання ступеня або на шляху до нього.

Програма EdD часто розуміється, як докторантура за сумісництвом призначена для професіоналів, які прагнуть розширити своє розуміння та вдосконалити практику. Перші два роки включають відвідування сесій з методів дослідження, спрямованих особливо на тих, хто зацікавлений у вивченні та вдосконаленні професійної практики та підготовку реєстраційного портфоліо, яке оцінюється на viva. Наступні роки зосереджені на зборі даних, їх аналізі та написанні дисертації. Тривалість навчання – 5-6 років (заочно).

У Великобританії, більшість програм PhD і EdD не передбачають дистанційної форми навчання. Наприклад, для докторантів Кембриджського університету існує вимога, що вони повинні проживати на відстані не більше чотирьох годин їзди від університету. У деяких університетах вступна кампанія триває цілий рік, а зарахування відбувається щокварталу. Кандидати на вступ у докторантуру повинні отримати ступінь магістра Великобританії (професійний магістр або магістр дослідник).

Доктор філософії є науковим ступенем, тому від претендентів на цей курс очікується наявність розвинених дослідницьких здібностей та навичок у вибраній галузі дослідження. У багатьох університетах очікується, що аспіранти вступають до програми з уже визначеними темами дослідження та керівниками, а також частина претендентів може мати попередньо забезпечене фінансування. Крім того, від аспірантів очікують залучення до дослідницьких напрямів, визначених кафедрою. Наприклад, у Лафборо кафедра зазначає на своєму сайті, що займається вивченням фундаментальних процесів, пов'язаних з вивченням математики, а також аналізом педагогічної практики, зокрема викладання, навчання та оцінювання.

У багатьох університетах для вступу потрібна дослідницька пропозиція. Вимоги до неї розміщені на сайтах навчальних закладів. Разом із дослідницькою пропозицією можуть вимагати ще: коротке резюме з вказаним досвідом, навичками; супровідний лист, у якому обґрунтовується мета дослідження; есе на тему, що стосується викладання/навчання математики (з посиланням на академічну літературу).

Випускники докторантури педагогічних факультетів працюють не лише у Великій Британії, а й в інших країнах, зокрема в Австралії, Чилі, Китаї, Хорватії, Гані, Гонконгу, Йорданії, Кенії, Лівані, Малайзії, Швейцарії, Таїланді, США та багатьох інших. Вони займаються викладанням і науковими дослідженнями в університетах, беруть участь у формуванні освітньої політики для урядових і неурядових організацій, працюють у сфері управлінського консалтингу та адміністрування. Крім того, випускники обіймають посади в міжнародних організаціях, таких як Рада Безпеки ООН, ЮНІСЕФ, Державна служба, BBC Media Action, а також у провідних університетах Великої Британії та інших країн світу.

Актуальні тенденції підготовки докторів математичної освіти у США. Сполучені Штати Америки є лідером серед країн-членів Організації економічного співробітництва та розвитку за багатьма показниками якості післябакалаврської освіти. У США чітко розрізняють докторські програми з математичної освіти Ed.D та PhD. Університети детально пояснюють їхні відмінності, зокрема через кар'єрні перспективи. Професійні можливості зі ступенем Ed.D: адміністратор вищої освіти (у коледжах або університетах наглядають за науковою діяльністю викладачів, науковцями, вступом або справами студентів. Деякі посади, які підпадають під цю категорію, включають президент, віце-президент, проректор і декан); адміністратор початкової та середньої школи (керують навчальними програмами, витратами та персоналом усіх навчальних закладів у своєму окрузі); координатор з навчання (створюють і керують шкільними програмами та іншими навчальними матеріалами; допомагають вчителям впроваджувати ефективні стратегії навчання в класі та вимірювати ефективність того, що викладають і як). Зі ступенем PhD можна отримати посади: викладач вищої школи; академічний дослідник.

На відміну від Великобританії, багато університетів США пропонують онлайн докторантуру для вчителів математики (пропонується вступ на докторські програми, що переважно орієнтуються на вчителів математики). У перші роки навчання у аспірантурі, студентам пропонується обирати навчальні курси (Third-cycle (doctoral) programme in mathematics education).

Більшість освітніх онлайн-програм доктора філософії вимагають від аспірантів попереднього досвіду у сфері математичної освіти. Докторські програми зазвичай охоплюють складніші теми. Наприклад, в Університеті штату Іллінойс аспіранти можуть вивчати додаткові курси з прикладної та обчислювальної математики. Курс «Пізнання та навчання на курсах математики» є важливою частиною багатьох програм, оскільки ефективне викладання математики залежить від розуміння когнітивних процесів, які відбуваються під час засвоєння нових концепцій. Докторський ступінь засвідчує рівень експерта та лідера у своїй галузі, тому багато програм включають курси з освітнього лідерства. У деяких програмах акцент робиться на лідерстві в класі математики, тоді як інші приділяють більше уваги управлінню на рівні департаменту чи шкільного округу. Ключовою складовою всіх освітніх онлайн-програм доктора філософії з математичної освіти є вивчення теорії освіти. На відповідних курсах аспіранти досліджують різні підходи до процесу навчання і вивчають способи їх застосування у власній викладацькій діяльності або при розробці навчальних програм. Крім того, багато докторських програм з математичної освіти пропонують факультативи та/або семінари з вузькоспеціалізованих тем, які орієнтовані на дослідницькі інтереси аспірантів.

Для вступу на програму PhD з математичної освіти абітурієнти мають відповідати певним вимогам, зокрема: успішне завершення курсів з математичної освіти на рівні бакалаврату та магістратури; досвід роботи у сфері математики або освіти; відповідність встановленим академічним стандартам, зокрема мінімальному середньому балу дипломів бакалавра та магістра; наявність рекомендаційних листів.

У багатьох докторських програмах передбачено стажування або педагогічну практику в освітньому середовищі. Це є обов’язковим компонентом програм Ed.D, де аспіранти реалізують проєкти в місцевих школах, застосовуючи отримані знання на практиці. У PhD-програмах стажування менш поширене, проте аспіранти часто працюють викладачами або асистентами, що дозволяє їм здобути практичний досвід та глибше зрозуміти академічне середовище.

Деякі PhD та Ed.D програми передбачають складання підсумкового іспиту, який оцінює засвоєння аспірантами основних дисциплін та визначає їхню готовність до роботи у сфері математичної освіти. На відміну від інших докторських програм (наприклад, у психології), ці іспити не є стандартизованими, і їхній зміст залежить від вимог конкретного університету.

Завершальний етап PhD-програм передбачає написання дисертації, яка зазвичай є обов’язковою. Це масштабне дослідження, що може тривати до трьох років і потребує захисту перед комісією викладачів. В Ed.D програмах частіше передбачено підсумковий проєкт (Capstone Project), який є менш об’ємним і більш практично орієнтованим. Він включає дослідження, результати якого повинні мати прикладне значення для розв’язання конкретних освітніх завдань.

Індіанський університет у Блумінгтоні пропонує онлайн-програми Ed.D та Ph.D у сфері математичної освіти. Програма Ed.D орієнтована на підготовку освітніх лідерів для шкільних округів та включає такі ключові аспекти: методи дослідження для вдосконалення математичної освіти; ефективні стратегії викладання; розвиток математичного мислення учнів; використання цифрових технологій у навчанні математики; інноваційні підходи до оцінювання. Програма Ph.D зосереджена на дослідженнях у галузі викладання математики в системі K–12. Основні напрямки: методики навчання математики; вплив переконань учнів та вчителів на навчальний процес; інтеграція технологій у викладання.

Більшість аспірантів програм є практикуючими вчителями, тому навчальний процес адаптовано до їхніх графіків і дає змогу поєднувати роботу з навчанням. Наприклад, у Техаському університеті докторська програма з навчальних планів і викладання з акцентом на математичній освіті готує фахівців до викладання та розробки освітніх програм на різних рівнях освіти. Основні курси програми: теорія навчальних планів; історія освіти; філософські підходи в педагогіці. Дослідницька складова: аспіранти опановують методології досліджень (кількісні, якісні або змішані) та можуть спеціалізуватися на таких напрямах, як педагогічна освіта, освітні технології, філософія викладання або історія освіти. Фінальним етапом програми є дисертаційне дослідження, присвячене технологіям у викладанні математики.

Окрім традиційних форм підготовки аспірантів в університетах, існують міжнародні ініціативи, до яких можуть долучатися й українські молоді дослідники. Однією з таких платформ є Європейська спільнота досліджень математичної освіти (ERME), що активно підтримує аспірантів і молодих учених, які лише розпочинають свій науковий шлях.

Зокрема, у межах ERME функціонує спеціальна спільнота YERME (Young European Researchers in Mathematics Education), яка надає можливості для професійного розвитку, обміну досвідом та співпраці. Діяльність YERME охоплює дві ключові події, що відбуваються раз на два роки: YERME Day та YERME Summer School (YESS). YERME Day проводиться напередодні конференції CERME та включає: пленарну лекцію молодого науковця; роботу в робочих групах з обговорення ключових аспектів дослідження: формулювання питань, методології, аналізу даних, підготовки публікацій і презентацій. Літня школа YERME (YESS) - тижнева програма, що проходить у роки без ERME, передбачає: лекції провідних науковців; щоденні робочі групи з аналізом досліджень під керівництвом менторів; дискусії щодо вдосконалення дослідницьких навичок і розширення наукових контактів. Літня школа також є платформою для знайомств, обговорення ідей та започаткування співпраці.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Українська аспірантура з теорії і методики навчання математики має власні унікальні напрацювання, які необхідно зберігати та розвивати, інтегруючи їх із сучасними міжнародними підходами. Сьогодні в Україні спостерігається поступовий перехід до міжнародних стандартів підготовки PhD. Нещодавно Україна відмовилась від присвоєння наукового ступеня кандидата педагогічних наук. Доцільно, щоб Україна сприяла розвитку обох напрямів підготовки аспірантів у галузі математичної освіти – як за ступенем PhD, так і EdD. Це забезпечить ширший вибір освітніх траєкторій, що відповідатимуть потребам як академічної спільноти, так і практичної сфери освіти.

Актуальним напрямом розвитку є впровадження освітньо-наукових програм підготовки EdD або кандидатів педагогічних наук у сфері методики навчання математики, орієнтованих на вчителів-практиків та освітніх лідерів. Така підготовка сприятиме ефективній реалізації реформи НУШ, оскільки інноваційні зміни у математичній освіті потребують професійного супроводу з боку методичних керівників, супервізорів і науковців. Формування в Україні системи підготовки освітніх лідерів із науковим ступенем (PhD або EdD) дозволить покращити якість професійного розвитку вчителів та загальний рівень математичної освіти.

Одним із важливих аспектів, які потребують вдосконалення, є практична підготовка аспірантів. В українських освітньо-наукових програмах PhD за спеціальністю Середня освіта (Математика) передбачені педагогічні, асистентські, науково-дослідні практики, однак ця практична складова, зазвичай, має обмежений часовий ресурс. Міжнародний досвід свідчить про ефективність довготривалого стажування (2–3 семестри), що дозволяє аспірантам здобути реальний досвід роботи у закладах освіти та впровадити результати власних досліджень на практиці.

Подальші дослідження можуть бути зосереджені на розробці моделей підготовки докторів філософії та освітніх докторів (PhD і EdD) в Україні з урахуванням сучасних міжнародних тенденцій. Важливу роль у цьому процесі має відігравати державна політика, спрямована на створення сприятливих умов для залучення молодих науковців у галузь математичної освіти, розширення можливостей для міжнародної співпраці та запровадження ефективних механізмів підтримки їх наукової діяльності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Anon. 2024. *The State of Academic Careers in OECD Countries*. https://doi.org/10.1787/ea9d3108-en.
2. Lu, C., Peng, B., & Chen, X. (2025). Professional Education in China. In: Feng, Z., Wang, Q., Liu, N. (eds) *Education in China and the World*. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-97-7415-9_7.
3. Matiash, O., Mykhailenko, L., Tiutiunnyk, D., Yashchuk, K., & Kateryniuk, H. (2025). Advantages and disadvantages of laboratory lessons in mathematics teaching methodology under emergency remote teaching conditions. *Social Sciences & Humanities Open*, 11, 101236. https://doi.org/10.1016/j.ssaho.2024.101236.
4. Myers, A. (2024). *Explore Top PhDs in Math Education Online: Best of 2024*. PhDs.me. https://www.phds.me/online-programs/phd-in-education/math-education/.
5. OECD (2022). *Education at Glance 2022: OECD Indicators* , OECD Publishing, Париж, https://doi.org/10.1787/3197152b-en.
6. Opinions of the Ministry of Education on the Implementation of the National Excellent Primary and Secondary School Teacher Training Program (2023). http://www.moe.gov.cn/srcsite/A10/s7011/202307/t20230726_1070952.html.
7. Presmeg, N., & Kilpatrick, J. (2019). Pleasures, Power, and Pitfalls of Writing up Mathematics Education Research. In: Kaiser, G., Presmeg, N. (eds). *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_16.
8. Schwarz, B., & Kaiser, G. (2019). The Professional Development of Mathematics Teachers. In: Kaiser, G., Presmeg, N. (eds). *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_15
9. Shvets, V. O., Bevz, V. G., Shkolnyi, O. V., & Matiash, O. I. (2020). *Ukraine: School Mathematics Education in the Last 30 Years in book Eastern European Mathematics Education in the Decades of Change International Studies in the Histori of Mathematics and its Teaching*. Springer, 229-274. https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-38744-0_6.
10. Spirin, O. M., Nosenko, Y. H., & Iatsyshyn, A. V. (2016). Сучасні вимоги і зміст підготовки наукових кадрів вищої кваліфікації з інформаційно-комунікаційних технологій в освіті. *Information Technologies and Learning Tools*, 56(6), 219. https://doi.org/10.33407/itlt.v56i6.1526.
11. *Third-cycle (doctoral) programme in mathematics education*. Lnu.se. https://lnu.se/en/research/PhD-studies/mathematics-education/
12. Zhu, J., Zhang, Y., & Zheng, C. (2024). Graduate Education in China. *In Education in China and the World* (pp. 231-279). Springer Nature Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-99-5861-0_6.
13. Zhu, J., Zhang, Y., Qiu, T., & Pan, Y. (2025). Graduate Education in China. *In Education in China and the World* (pp. 261-309). Springer Nature Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-97-7415-9_6.
14. Матяш, О., & Ящук, К. (2024a). Ретроспективний огляд дисертацій українських дослідників з теорії і методики навчання математики. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 95-108. https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-95-108.
15. Матяш, О., & Ящук, К. (2024b). Формування у майбутніх учителів математики національно-освітньої предметної компетентності. *Věda a perspektivy*, 9(40). https://doi.org/10.52058/2695-1592-2024-9(40)-99-113.
16. Ящук, К. (2024). Огляд дисертаційних досліджень про історію становлення та розвитку методики навчання математики в Україні. *Фізико-математична освіта*, *39*(4), 40-45. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i4-06.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Anon. 2024. *The State of Academic Careers in OECD Countries*. https://doi.org/10.1787/ea9d3108-en.
2. Lu, C., Peng, B., & Chen, X. (2025). Professional Education in China. In: Feng, Z., Wang, Q., Liu, N. (eds) *Education in China and the World*. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-97-7415-9_7.
3. Matiash, O., Mykhailenko, L., Tiutiunnyk, D., Yashchuk, K., & Kateryniuk, H. (2025). Advantages and disadvantages of laboratory lessons in mathematics teaching methodology under emergency remote teaching conditions. *Social Sciences & Humanities Open*, 11, 101236. https://doi.org/10.1016/j.ssaho.2024.101236.
4. Myers, A. (2024). *Explore Top PhDs in Math Education Online: Best of 2024*. PhDs.me. https://www.phds.me/online-programs/phd-in-education/math-education/.
5. OECD (2022). *Education at Glance 2022: OECD Indicators* , OECD Publishing, Париж, https://doi.org/10.1787/3197152b-en.
6. Opinions of the Ministry of Education on the Implementation of the National Excellent Primary and Secondary School Teacher Training Program (2023). http://www.moe.gov.cn/srcsite/A10/s7011/202307/t20230726_1070952.html.
7. Presmeg, N., & Kilpatrick, J. (2019). Pleasures, Power, and Pitfalls of Writing up Mathematics Education Research. In: Kaiser, G., Presmeg, N. (eds). *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_16.
8. Schwarz, B., & Kaiser, G. (2019). The Professional Development of Mathematics Teachers. In: Kaiser, G., Presmeg, N. (eds). *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_15
9. Shvets, V. O., Bevz, V. G., Shkolnyi, O. V., & Matiash, O. I. (2020). *Ukraine: School Mathematics Education in the Last 30 Years in book Eastern European Mathematics Education in the Decades of Change International Studies in the Histori of Mathematics and its Teaching*. Springer, 229-274. https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-38744-0_6.
10. Spirin, O. M., Nosenko, Y. H., & Iatsyshyn, A. V. (2016). Сучасні вимоги і зміст підготовки наукових кадрів вищої кваліфікації з інформаційно-комунікаційних технологій в освіті. *Information Technologies and Learning Tools*, 56(6), 219. https://doi.org/10.33407/itlt.v56i6.1526.
11. *Third-cycle (doctoral) programme in mathematics education*. Lnu.se. https://lnu.se/en/research/PhD-studies/mathematics-education/
12. Zhu, J., Zhang, Y., & Zheng, C. (2024). Graduate Education in China. *In Education in China and the World* (pp. 231-279). Springer Nature Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-99-5861-0_6.

13. Zhu, J., Zhang, Y., Qiu, T., & Pan, Y. (2025). Graduate Education in China. *In Education in China and the World* (pp. 261-309). Springer Nature Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-97-7415-9_6.
14. Matiash, O., & Yashchuk, K. (2024a). Retrospektyvnyi ohliad dysertatsii ukrainskykh doslidnykiv z teorii i metodyky navchannia matematyky. [A retrospective review of dissertations by Ukrainian researchers on the theory and methodology of mathematics teaching] *Didactics of Mathematics: Theory, Experience, Innovations*, 2, 95-108. https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-95-108 (in Ukrainian).
15. Matiash, O., & Yashchuk, K. (2024b). Formuvannia u maibutnikh uchyteliv matematyky natsionalno-osvitnoi predmetnoi kompetentnosti. [Formation of national educational subject competence in future mathematics teachers] *Věda a perspektivy*, 9(40). https://doi.org/10.52058/2695-1592-2024-9(40)-99-113.
16. Yashchuk, K. (2024). Ohliad dysertatsiinykh doslidzhen pro istoriiu stanovlennia ta rozvytku metodyky navchannia matematyky v Ukraini [Overviewof dissertation research on the history of esteblishment and development methods of teaching mathematics in Ukraine]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education, 39*(4), 40-45. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i4-06 (in Ukrainian).

| Матеріал надійшов до редакції: 29.10.2025 р. | Прийнято до друку: 14.03.2025 р. | Опубліковано: 29.04.2025 р. |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2025, 40(2), https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-06
УДК: 372.853

ДОМАШНІЙ ЕКСПЕРИМЕНТ З ПЕРЕВІРКИ СПІВВІДНОШЕННЯ КОМПОНЕНТІВ ТЕНЗОРА ІНЕРЦІЇ ТОНКОЇ ПЛАСТИНИ

Сергій ПОДЛАСОВ ✉
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна
s.podlasov@kpi.ua
https:/orcid.org/0000-0002-3947-4401

Андрій СНАРСЬКИЙ
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна
a.snarskii@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4468-4542

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Для студентів першого курсу технічного університету при вивченні теми «Динаміка твердого тіла» в курсі фізики одним з найбільш складних є поняття тензор моменту інерції. Експериментальне визначення компонентів цього тензора та перевірка зв'язку між його діагональними компонентами для тонкої пластини повинно поліпшити розуміння цього поняття. В умовах дистанційного навчання проблема проведення експерименту по зазначеній вище темі може бути вирішена при дослідженні крутильних коливань із застосуванням легко доступного обладнання.*

Матеріали і методи. *Дослідження ґрунтується на аналізі програми курсу фізики для студентів бакалаврату технічного університету, огляді літературних джерел по темі дослідження. В умовах дистанційного навчання параметри крутильних коливань твердого тіла можна визначати використанням монофілярного підвісу та смартфона з MMS гіроскопом, у якому встановлений застосунок PhyPhox або ж Physics Toolbox Suite. Підвісом може слугувати тонкий сталевий чи мідний дріт, гумова нитка або ж інші.*

Результати. *Експериментальне визначення періодів крутильних коливань смартфона відносно різних осей показало, що незалежно від матеріалу пружної нитки виконується співвідношення $T_x^2 + T_y^2 = T_z^2$ з похибкою, що не перевищує 6%. Цей результат є підтвердженням співвідношення між діагональними компонентами тензора моменту інерції тонкої пластини $I_x + I_y = I_z$.*

Висновки. *Дослідження крутильних коливань при проведенні домашнього експерименту з використанням простого обладнання дозволяє з достатньою точністю перевірити виконання співвідношення між компонентами тензора моменту інерції тонкої пластини, роль якої виконує смартфон, оснащений MMS гіроскопом. Застосований спосіб підвішування смартфона на пружній нитці дозволяє також визначати моменти інерції відносно осей, які не співпадають з осями симетрії та сформувати у студентів правильне уявлення про вектор кутової швидкості.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *тензор моменту інерції; крутильні коливання; домашній експеримент.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Подласов С., Снарський А. Домашній експеримент з перевірки співвідношення компонентів тензора інерції тонкої пластини. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 43-48. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-06.

HOME EXPERIMENT TO CHECK THE RATIO OF THE COMPONENTS OF THE INERTIA TENSOR OF A THIN PLATE

Serhii PODLASOV ✉
National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine
s.podlasov@kpi.ua
https://orcid.org/0000-0002-3947-4401

Andrei SNARSKII
National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine
a.snarskii@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4468-4542

ABSTRACT

Formulation of the problem. *One of the most challenging concepts for first-year students of a technical university, when studying the topic "Solid state dynamics" in the physics course, is the concept of the moment of inertia tensor. The experimental determination of the components of this tensor and the verification of the relationship between its diagonal components for a thin plate should improve the understanding of this concept. In distance learning, the problem of experimenting on the aforementioned topic can be solved by studying torsional oscillations using easily accessible equipment.*

Materials and methods. *The study is based on the analysis of the physics course program for undergraduate students of a technical university and a review of the literature on the subject of the study. In distance learning, the parameters of torsional oscillations of a rigid body can be determined using a monophyletic suspension and a smartphone with an MMS gyroscope, by running the PhyPhox or Physics Toolbox Suite application. The suspension can be made of a thin steel or copper wire, a rubber thread, or other suitable materials.*

Results. *The experimental determination of the periods of torsional oscillation of a smartphone relative to different axes showed that, regardless of the material of the elastic thread, the ratio $T_x^2 + T_y^2 = T_z^2$ is fulfilled with an error not exceeding 6 %. This result confirms the relation between the diagonal components of the thin plate moment of inertia tensor $I_x + I_y = I_z$.*

Conclusions. *The study of torsional oscillations during a home experiment using simple equipment allows us to verify with sufficient accuracy the fulfillment of the relationship between the components of the tensor of the moment of inertia of a thin plate, the role of which is played by a smartphone equipped with an MMS gyroscope. The method used to suspend the smartphone on an elastic thread also allows us to determine the moments of inertia about axes that do not coincide with the axes of symmetry and to form a correct understanding of the angular velocity vector.*

KEYWORDS: *moment of inertia tensor; torsional oscillations; home experiment.*

FOR CITATION: Podlasov, S., & Snarskii, A. (2025). Home experiment to check the ratio of the components of the inertia tensor of a thin plate. *Physical and Mathematical Education*, *40*(2), 43-48. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-06.

ВСТУП

Постановка проблеми. Однією із складних тем курсу фізики для студентів першого курсу технічного університету, особливо тих, котрі починають її вивчення з першого семестру, в розділі «Механіка» є тема «Динаміка твердого тіла». Це зумовлено низкою причин, до яких, у першу чергу, слід віднести відсутність попередніх знань з цієї теми та необхідність усвідомлення цілого ряду нових математичних та фізичних понять, таких як векторний добуток, вектори кутової швидкості та прискорення, момент сили, момент імпульсу, тензор інерції. Їх інтеріоризація може бути суттєво поліпшена при самостійному виконані студентами експериментальних досліджень. В умовах дистанційного навчання деякі експерименти по визначенню величин, які використовуються при вивченні динаміки твердого тіла, студенти можуть проводити в дома з використанням доступного обладнання, зокрема, мобільного телефона. Тому актуальним постає завдання розробки методики такого експерименту та опрацювання його результатів.

Аналіз актуальних досліджень. Одним з важливих параметрів у динаміці твердого тіла є момент інерції. У науково-методичній літературі достатньо широка представлені методи його експериментального визначення. Genta & Delprete (1994) критично проаналізували різні експериментальні методики, засновані на вивченні періодичного або неперіодичного руху тіл. В основному, всі ці методи ґрунтуються на вимірюванні періоду крутильних коливань або вимірюванні часу скочування тіл з похилої площини. Перший спосіб застосовується для тіл будь-якої форми, другий – для тіл з осьовою або центральною симетрією (циліндр, куля). Крім того, момент інерції твердого тіла, яким можна вважати смартфон, Kaps at al (2021) запропонували визначати за максимальною кутовою швидкістю при його падінні.

Крутильні коливання реалізують, використовуючи уніфілярний (торсіонний маятник), біфілярний чи трифілярний підвіси. Так, Kuznetsova & Urvantseva (2014) використовували торсіонний маятник для визначення моменту інерції диска. У роботі Klaus (2017) представлено порівняння моменту інерції тіл, які були визначені за допомогою торсіонного та фізичного маятників. Zhao et al (2012) досліджували вплив сили опору повітря на результати визначення моменту інерції тіл на основі вимірювання періоду коливань торсіонного маятника.

Застосування біфілярного підвісу для визначення моменту інерції тіл за результатами вимірювання періоду крутильних коливань представлені в роботах Junos, Mohd Suhadis & Zihad (2014), Fukami & Higashino (2019). Автори останньої роботи рекомендують використовувати цей метод для визначення компонентів тензору інерції малих безпілотних літальних апаратів.

Tang & Shangguan(2011) запропонували використовувати трифілярний крутильний маятник для експериментального визначення центра тяжіння та тензора інерції для тіла неправильної форми. Запропонованої метод дозволив визначити момент інерції з похибкою до 1 % відносно теоретичного значення.

Вимірювання періоду крутильних коливань смартфона на підвісці з мідного дроту Kaps et al (2021) використали для визначення модуль зсуву міді.

Уніфілярний (https://www.uchtech.com.ua/ua/fm/fm15.html, https://www.uchtech.com.ua/ua/fm/fm21.html) та трифілярний (Лунев та ін., 2011) підвіси використовуються в навчальних лабораторіях для визначення моментів інерції тіл різної форми.

У домашніх експериментах для визначення кутової швидкості тіл, необхідної для обчислення моменту інерції, використовуються сигнали датчиків, які вмонтований в мобільні гаджети. Так, Sriyanti *et al* (2020) використали для цього сигнал магнітометра, Patrinopoulos & Kefalis (2015), Puttharugsa et al (2021) – сигнал гіроскопа.

Метою роботи є розробка методики домашнього експерименту по перевірці зв’язку між діагональними компонентами тензора інерції прямокутної пластини, роль якої виконує смартфон.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження ґрунтується на аналізі програми курсу фізики для студентів бакалаврату технічного університету, огляді літературних джерел по темі дослідження. В умовах дистанційного навчання параметри крутильних коливань твердого тіла можна визначати використанням монофілярного підвісу та смартфона з MMS гіроскопом, у якому встановлений застосунок PhyPhox або ж Physics Toolbox Suite. Підвісом може слугувати тонкий сталевий чи мідний дріт, гумова нитка або ж інші.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Момент інерції тіла відносно осі можна визначити за результатами обчислень або результатами експерименту. При неперервному розподілі маси у просторі момент інерції тіла визначається інтегруванням

$$I = \int r^2\, dm,$$

де dm – маса малого об’єму тіла, *r* – відстань до осі обертання. У стандартних курсах фізики момент інерції обчислюють для тіл з симетрією відносно точки (сфера, куля), відносно осі (кільце, диск, циліндр, конус), або відносно площини (прямокутний паралелепіпед).

Обчислення моменту інерції I тіла відносно осі можна спростити. Для цього поділимо тіло на малі елементи масою m_i, положення яких відносно початку відліку O задається радіусом-вектором $\vec{R}_i$ (рис. 1). В декартовій системі координат $R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$. Далі помножимо R_i^2 на масу виділеного елемента і визначимо величину

$$J = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right). \tag{1}$$

Момент інерції окремої матеріальної точки відносно осі визначається добутком її маси m_i на квадрат відстані до цієї осі. При використанні декартової системи координат ці відстані відносно осей X, Y, Z дорівнюють $y_i^2 + z_i^2$, $x_i^2 + z_i^2$, $x_i^2 + y_i^2$, отже моменти інерції відносно осей:

$$I_{xi} = m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right),\ I_{yi} = m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right),\ I_{zi} = m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right).$$

Додавши ці вирази, одержимо

$$I_{xi} + I_{yi} + I_{zi} = 2m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2). \quad (2)$$

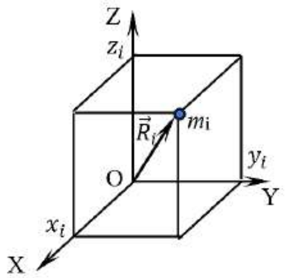


Рис. 1. Положення точки твердого тіла в декартовій системі координат

Джерело: авторська розробка.

Оскільки момент інерції є величиною адитивною, то для твердого тіла з урахуванням (1) маємо

$$I_x + I_y + I_z = 2\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2J. \quad (3)$$

Для тонкої пластин координати *z* = 0 усіх її точок, отже $J = \sum_i m_i\,(x_i^2 + y_i^2)$, а це є виразом моменту інерції тіла відносно осі OZ отже $I_x + I_y + I_z = 2I_z$, звідки,

$$I_x + I_y = I_z \quad (4)$$

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Достатньо простим експериментом, який може бути проведений в домашніх умовах, є перевірка виконання співвідношення (4). Сутність експерименту полягає у фіксації періоду крутильних коливань смартфона, підвішеного на пружній нитці (торсіонний маятник), навколо кожної з його трьох осей симетрії. Це можливо завдяки наявності MMS гіроскопа у більшості смартфонів.

Звичайно, смартфон не є тонкою пластиною і моменти його інерції відносно головних осей симетрії (рис. 2) повинні обчислюватися як для прямокутного паралелепіпеда:

$$I_x = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2),\ I_y = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2),\ I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2).$$

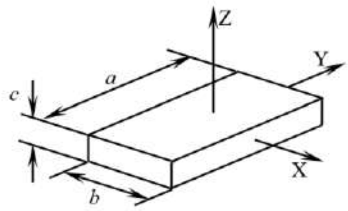
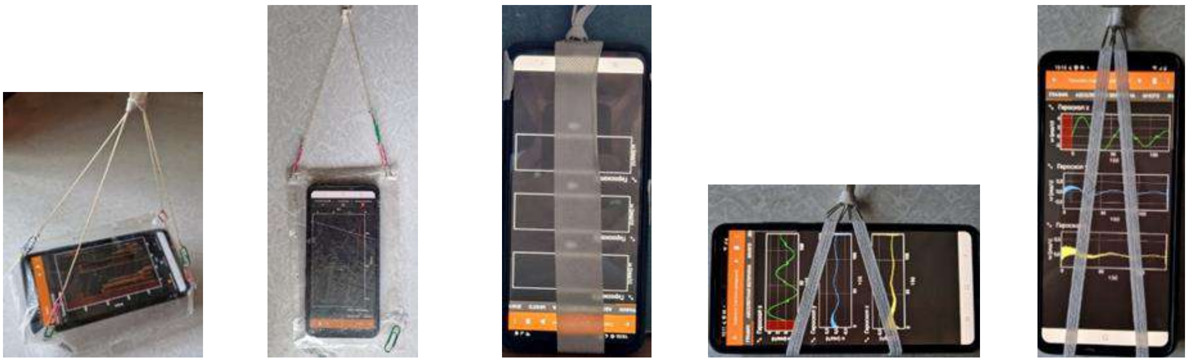


Рис. 2. Головні осі симетрії смартфона

Джерело: авторська розробка.

Але, наприклад, смартфон Samsung A51 має розміри 158,5×73,6×7,9 мм в масу 172 г. Відповідні моменти інерції складають $I_x = 3{,}61 \cdot 10^{-4}$ кг·м², $I_y = 7{,}85 \cdot 10^{-5}$ кг·м², $I_z = 4{,}38 \cdot 10^{-4}$ кг·м², отже похибка у виконанні співвідношення (4) не перевищує ≈ 0,4 %. Це дозволяє з достатньою точністю проводити експериментальну перевірку співвідношення $I_z = I_x + I_y$, досліджуючи крутильні коливання смартфона на пружній нитці.

Для підвішування смартфона на нитці можна використати пакетик, що має кріплення у чотирьох кутах (рис. 3а,б), або застосувавши бандаж з лейкопластиря (рис. 3в) чи гуми (рис. 3г,д).



а) б) в) г) д)

Рис. 3. Способи кріплення смартфона для дослідження крутильних коливань

Джерело: авторська розробка.

Підвісом може слугувати гумова нитка, чи дріт діаметром 0,2÷0,3 мм (на рис. 1 підвіс не показаний у зв'язку з його достатньо великою довжиною 50 ÷ 70 см).

Як добре відомо, період крутильних коливань тіла, підвішеного на пружній нитці, визначається як $T = 2\pi\sqrt{I/C}$, де C – модуль кручення нитки. З останнього виразу

$$I = C(T/2\pi)^2.$$

Підставивши цей вираз у (4), маємо:

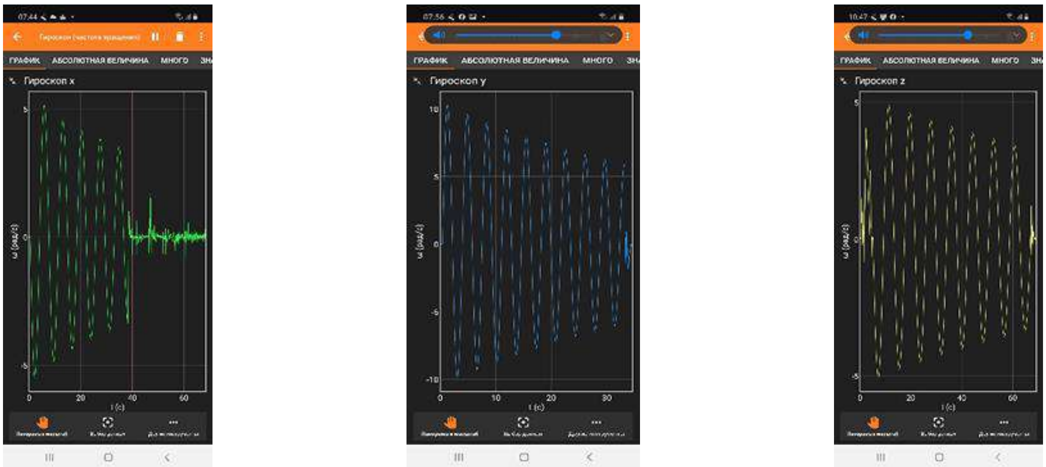
$$T_z^2 = T_x^2 + T_y^2. \tag{5}$$

Виконання умови (5) за результатами експерименту слугує підтвердженням справедливості виразу (4).

Фіксувати залежність від часу кутової швидкості смартфона дозволяють вільно поширювані застосунки PhyPhox або Physics Tolbox Suite. Як свідчить досвід, більш зручно користуватися PhyPhox, оскільки він надає суттєво більше можливостей для перегляду на екрані смартфона результатів експерименту, а також дозволяє дистанційно керувати експериментом та фіксувати експериментальні дані, використовуючи комп'ютер (ноутбук, планшет).

Перевірка виконання умови (5) проводилася з використанням в якості підвісу сталевого та мідного дротів, а також тонкої гумової стрічки.

На рис. 4 представлені залежності від часу кутової швидкості в коливальному русі навколо головних осей симетрії смартфона Samsung A51 на сталевій нитці діаметром 0,25 мм.



а) б) в)

Рис. 4. Копії екрану смартфона при дослідженні залежностей від часу кутової швидкості крутильних коливань смартфона відносно осей: а) OX, б) OY, в) OZ

Джерело: авторська розробка.

Можна припустити, що основною причиною загасання коливань є дія сили опору повітря, яка прямо пропорційна до швидкості руху. В такому разі залежність кутової швидкості від часу повинна описуватися рівнянням

$$\omega = \omega_m e^{-\beta t} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right), \tag{6}$$

де β – коефіцієнт загасання, T – період коливань, t – час, відлік якого починається від моменту початку крутильних коливань.

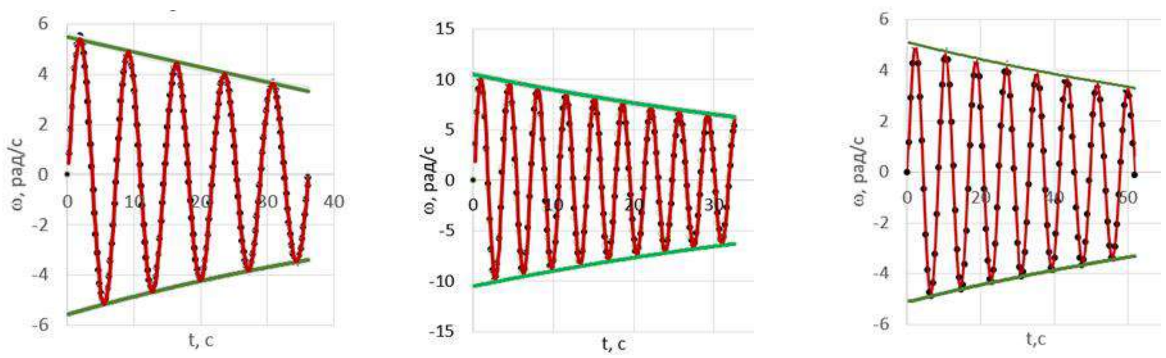
Аналіз експериментальних даних, одержаних із застосунка PhyPhox, дозволяє підібрати значення ω_m, T та β, які відповідають найкращому співпадінню теоретичної кривої з експериментальними значеннями. В таблиці 1 наведені результати підбору значень періодів крутильних коливань, а на рис. 5 – експериментальні результати та розрахунки за формулою (6) з підібраними параметрами. Для побудови графіків використані не всі значення, одержані з PhyPhox (їх може бути від 3000 до 30000 залежно від часу фіксації результатів), а тільки 100 – 150, взятих через рівні проміжки часу. Зауважимо також, що в усіх без винятку випадках коефіцієнт загасання β виявся малим ($(\beta/\omega)^2 = (\beta T/2\pi)^2 < 10^{-3}$), відтак, період власних коливань відрізняється від експериментальних значень не більше ніж на 0,05 %. Це дозволяє практично не враховувати загасання при перевірці умови (5).

Причин похибок може бути декілька, з яких найбільш суттєвими ми вважаємо: 1) неточність встановлення початкового кута закручування нитки підвісу для різних осей смартфона; 2) похибку визначення періоду крутильних коливань при підборі параметрів.

Таблиця 1. Періоди крутильних коливань смартфона на різних нитках підвісу

	T_x, с	T_y, с	T_z, с	Відносна похибка $\frac{T_z^2 - (T_x^2 + T_y^2)}{T_z^2} \cdot 100\ \%$
Сталь	5,94	2,80	6,60	1,0
Мідь	6,96	3,28	7,95	6,3
Гума	29,45	13,99	32,99	2,3

Джерело: авторська розробка.



а) б) в)

Рис. 5. Залежності від часу миттєвих значень кутової швидкості – червона лінія та амплітудних значень – зелена лінія при крутильних коливаннях смартфона на сталевій нитці відносно осей: а) ОХ, б) OY, в) OZ за результатами підбору параметрів. Точки – експериментальні дані

Джерело: авторська розробка.

Окрім перевірки співвідношення (4) дослідження крутильних коливань смартфона можна використати для визначення моменту інерції тіла відносно осі обертання, яка не співпадає з головними осями симетрії. Для цього необхідно підвісити смартфон на пружній нитці, наприклад, так, як показано на рис. 6. На екрані смартфона на сторінці «Multi» відображаються проекції вектора кутової швидкості на осі координат та її абсолютне значення. Кут нахилу головних осей смартфона відносно горизонту можна визначити в застосунку PhyPhox на сторінці «Inclination» або за допомогою таких безоплатних застосунків як «Рівень лазера», «Level» або аналогічних.

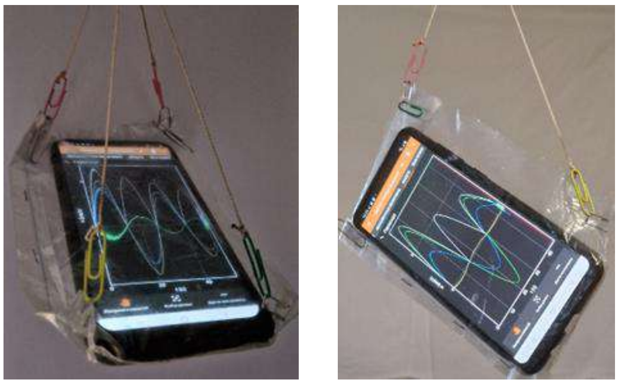


Рис. 6. Сторінка «Multi» («Багато») застосунку PhyPhox при вимірювання кутової швидкості крутильних коливань смартфона відносні осей обертання, що не співпадають з головними осями симетрії

Джерело: авторська розробка.

Результати таких вимірювань, по-перше, сприяють усвідомленню студентами того, що кутова швидкість – це вектор, який має відповідні проекції на осі координат, по-друге, дозволяє визначати моменти інерції тіла відносно осей обертання, які не співпадають з головними осями симетрії.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Експериментальне вивчення в домашньому експерименті крутильних коливань смартфона, який підвішений на пружній нитці, дозволяє перевірити теоретичне співвідношення між головними компонентами тензора інерції плоскої пластини. Враховуючи примітивність використаного експериментального «обладнання», похибку у виконанні умови (5) можна вважати прийнятною. Самостійне виконання студентами такого експерименту повинно сприяти інтеріоризації знань з розділів «Динаміка твердого тіла» та «Коливання» курсу фізики.

Нажаль, в домашніх умовах, одержані експериментальні результати не дозволяють обчислити величину компонентів тензора інерції, оскільки виявляється складно визначити момент кручення пружної нитки.

Вивчення залежності проекцій вектора кутової швидкості на осі координат при зміні кута між віссю OY системи координат смартфона та горизонтом дозволяє сформувати у студентів правильне уявлення про вектор кутової швидкості.

Перспективи подальших досліджень ми вбачаємо у впровадженні методики дослідження в навчальний процес і накопичення статистичних даних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Fukami, K., & Higashino, S.-I. (2019). Experimental method for determination of virtual inertia matrix using multivariate regression analysis. *Sensors and Materials*, 31 (12), 4247-4257. https://doi.org/10.18494/SAM.2019.2665.

2. Genta, G., Delprete, C. (1994) *Some considerations on the experimental determination of moments of inertia.* Meccanica 29, 125-141. https://doi.org/10.1007/BF01007497.
3. Junos, M.H., Mohd Suhadis, N., & Zihad, M. M. (2014). Experimental determination of the moment of inertias of USM e-UAV. *Applied Mechanics and Materials*, 465-466, pp. 368-372. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.465-466.368.
4. Kaps, A., Splith, T., & Stallmach, F. (2021). Implementation of smartphone-based experimental exercises for physics courses at universities. *Physics Education*, 56, 3. Phys. Educ. 56 035004. https://doi.org/10.1088/1361-6552/abdee2.
5. Kaps, A., Splith, T., & Stallmach, F. (2021). Shear Modulus Determination Using the Smartphone in a Torsion Pendulum. *The Physics Teacher*, № 4, p. 268-271. https://doi.org/10.1119/10.0004154
6. Klaus, L. (2017). Comparison of Two Experiments Based on a Physical and a Torsion Pendulum to Determine the Mass Moment of Inertia Including Measurement Uncertainties. *Measurement science review*, 17, 1, 9-18. https://doi.org/10.1515/msr-2017-0002.
7. Kuznetsova, T. E., & Urvantseva, N.L. (2014). Using torsional vibrations for determining moment of inertia of a disc. *Materials Physics and Mechanics*, 20 (2), 118-123. https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84904541474&partnerID=40&md5=929af7e9099931034cebaf5efed30781
8. Marinopoulos, M., & Kefalis, C. (2015). Angular velocity direct measurement and moment of inertia calculation of a rigid body using a smartphone. *Phys. Teach*. 53, 564-565. https://doi.org/10.1119/1.4935774
9. Puttharugsa, C., Chatchawaltheerat, T., Teeratchanan, P. (2021). Teaching the moment of inertia by measuring the angular speed with a smartphone's sensors. *Physics Education*, 56, 2. Phys. Educ. 56 023011. https://doi.org/10.1088/1361-6552/abdfaf.
10. Sriyanti, I., Ariska, M., Cahyati, N., & Jauhari, J. (2019). *Physics Education*, 55, 1. https://doi.org/10.1088/1361-6552/ab58ba.
11. Tang, L., & Shangguan, W.-B. (2011). An improved pendulum method for the determination of the center of gravity and inertia tensor for irregular-shaped bodies. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 44 (10), 1849-1859. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2011.09.004.
12. Zhao, Y., Zhang, X. L., Wang, J., & Tang, W. Y. (2012). Measurement of Moment of Inertia Based on Torsion Pendulum. *Advanced Materials Research*, 588-589, 964-967. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.588-589.964
13. Лунев, И. В., Жуков, Н. Н., Олейник, С. В., & Подшивалова О. В. (2011). *Механика. молекулярная физика и термодинамика*. Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т». 28. https://faculty6.khai.edu/uploads/literature/literature/1317037629550668420.pdf.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Fukami, K., & Higashino, S.-I. (2019). Experimental method for determination of virtual inertia matrix using multivariate regression analysis. *Sensors and Materials*, 31 (12), 4247-4257. https://doi.org/10.18494/SAM.2019.2665.
2. Genta, G., Delprete, C. (1994) *Some considerations on the experimental determination of moments of inertia.* Meccanica 29, 125-141. https://doi.org/10.1007/BF01007497.
3. Junos, M.H., Mohd Suhadis, N., & Zihad, M. M. (2014). Experimental determination of the moment of inertias of USM e-UAV. *Applied Mechanics and Materials*, 465-466, pp. 368-372. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.465-466.368.
4. Kaps, A., Splith, T., & Stallmach, F. (2021). Implementation of smartphone-based experimental exercises for physics courses at universities. *Physics Education*, 56, 3. Phys. Educ. 56 035004. https://doi.org/10.1088/1361-6552/abdee2.
5. Kaps, A., Splith, T., & Stallmach, F. (2021). Shear Modulus Determination Using the Smartphone in a Torsion Pendulum. *The Physics Teacher*, № 4, p. 268-271. https://doi.org/10.1119/10.0004154
6. Klaus, L. (2017). Comparison of Two Experiments Based on a Physical and a Torsion Pendulum to Determine the Mass Moment of Inertia Including Measurement Uncertainties. *Measurement science review*, 17, 1, 9-18. https://doi.org/10.1515/msr-2017-0002.
7. Kuznetsova, T. E., & Urvantseva, N.L. (2014). Using torsional vibrations for determining moment of inertia of a disc. *Materials Physics and Mechanics*, 20 (2), 118-123. https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84904541474&partnerID=40&md5=929af7e9099931034cebaf5efed30781
8. Marinopoulos, M., & Kefalis, C. (2015). Angular velocity direct measurement and moment of inertia calculation of a rigid body using a smartphone. *Phys. Teach*. 53, 564-565. https://doi.org/10.1119/1.4935774
9. Puttharugsa, C., Chatchawaltheerat, T., Teeratchanan, P. (2021). Teaching the moment of inertia by measuring the angular speed with a smartphone's sensors. *Physics Education*, 56, 2. Phys. Educ. 56 023011. https://doi.org/10.1088/1361-6552/abdfaf.
10. Sriyanti, I., Ariska, M., Cahyati, N., & Jauhari, J. (2019). *Physics Education*, 55, 1. https://doi.org/10.1088/1361-6552/ab58ba.
11. Tang, L., & Shangguan, W.-B. (2011). An improved pendulum method for the determination of the center of gravity and inertia tensor for irregular-shaped bodies. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 44 (10), 1849-1859. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2011.09.004.
12. Zhao, Y., Zhang, X. L., Wang, J., & Tang, W. Y. (2012). Measurement of Moment of Inertia Based on Torsion Pendulum. *Advanced Materials Research*, 588-589, 964-967. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.588-589.964
13. Lunev, Y. V., Zhukov, N. N., Oleinyk, S. V., & Podshyvalova O. V. (2011). *Mekhanyka. molekuliarnaia fyzyka y termodynamyka [Mechanics. molecular physics and thermodynamics].* Kh.: Nats. aэrokosm. un-t ym. N.E. Zhukovskoho «Khark. avyats. yn-t». Stor 28. https://faculty6.khai.edu/uploads/literature/literature/1317037629550668420.pdf. (in Russian).

| *Матеріал надійшов до редакції: 16.01.2025 р.* | *Прийнято до друку: 25.02.2025 р.* | *Опубліковано: 29.04.2025 р.* |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2025, 40(2), https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-07
УДК: 372.851

ЕКВІАФІННІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПЛОЩИНИ У МАТЕМАТИЧНІЙ ОСВІТІ ШКОЛЯРІВ ТА МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Микола ПРАЦЬОВИТИЙ ✉
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
prats4444@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6130-9413

Наталя ПРАВІЦКА
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна
n.pravitska@chnu.edu.ua, https://orcid.org/0009-0004-7651-9105

Софія РАТУШНЯК
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
ratush404@gmail.com, https://orcid.org/0009-0005-2849-6233

АНОТАЦІЯ

Робота присвячена одному з класів афінних перетворень площини (бієкцій площини на себе, які зберігають колінеарність точок), а саме перетворенням, головним інваріантом яких є площі квадровних фігур. Вони називаються еквіафінними і є метричними перетвореннями. Тому важливі як для математики, так і для її практичних застосувань.

Формулювання проблеми. *Афінні, зокрема еквіафінні, перетворення площини не вивчаються учнями у ШКГ, але вони фігурують у програмі університетського курсу Аналітичної геометрії для майбутніх учителів математики. Еквіафінні перетворення є окремим сегментом у темі ″Афінні перетворення площини″ (вони утворюють підгрупу групи афінних перетворень відносно операції «композиція перетворень»), яскравими представниками цього класу перетворень є гіперболічний та еліптичний повороти. Теоретичне висвітлення теми «Еквіафінні перетворення» легко зробити вповні автономним, тоді як важко знайти рафінований виклад питання «Еквіафінні перетворення площини» в навчально-методичній літературі (точніше, його просто не існує). Це і стало головною мотивацією для підготовки цієї роботи. Вмотивований вчитель математики може знайти у запронованому матеріалі вступ до теорії еквіафінних перетворень площини.*

Методи та матеріали. *Застосовано теоретичні методи науково-педагогічного пошуку та математичні методи для доведення математичних тверджень.*

Результати. *У статті здійснено елементарний виклад навчального теоретичного матеріалу з теми «еквіафінні перетворення площини». Він супроводжується коментарями і прикладами застосувань, задачами з розв'язками та задачами для самостійного розв'язування. Зокрема, у роботі виведено формули для обчислення площі трикутника, побудованого на двох векторах як на сторонах, та площі трикутника, визначеного координатами вершин у прямокутній декартовій системі координат, які є допоміжними фактами при обґрунтуванні критерію еквіафінності перетворення. Окрему увагу приділено двом «породним» еквіафінним перетворенням – гіперболічному та еліптичному повороту площини. У роботі також доведено ознаку руху у сім'ї афінних перетворень площини.*

Висновки. *Наведений виклад навчального матеріалу може бути використаний вчителем математики у системі гурткової роботи в школі або викладачами аналітичної геометрії для майбутніх учителів математики. Наведений*

EQUI-AFFINE TRANSFORMATIONS IN MATHEMATICAL EDUCATION OF SCHOOLCHILDREN AND FUTURE MATHEMATICS TEACHERS

Mykola PRATSIOVYTYI ✉
Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
prats4444@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6130-9413

Natalia PRAVITSKA
Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine
n.pravitska@chnu.edu.ua, https://orcid.org/0009-0004-7651-9105

Sofiia RATUSHNIAK
Dragomanov Ukrainian State University, Ukraine
ratush404@gmail.com, https://orcid.org/0009-0005-2849-6233

ABSTRACT

The work is devoted to a specific class of affine transformations of the plane (bijections of the plane onto itself that preserve the collinearity of points), namely transformations whose primary invariant is the areas of quadrilateral figures. These are referred to as equi-affine transformations and are considered metric transformations. They hold significance both in mathematics and its practical applications.

Formulation of the problem. *Affine transformations, particularly equi-affine transformations of the plane, are not studied by students in the school geometry curriculum. However, they are included in the university course in Analytical Geometry for future mathematics teachers. Equi-affine transformations represent a distinct segment within the broader topic of "Affine Transformations of the Plane" (they form a subgroup of the group of affine transformations under the operation of "a composition of transformations"). Notable examples of this class of transformations are hyperbolic and elliptical rotations. Theoretical Exposition. Equi-affine transformations can be presented as a fully autonomous subject. Yet, it is difficult to find a filtered exposition of the "Equi-affine Transformations of the Plane" in instructional and methodological literature (in fact, it simply does not exist). This challenge served as the primary motivation for working on this research. A motivated mathematics teacher can use the proposed material as an introduction to the theory of equi-affine transformations of the plane.*

Materials and methods. *Theoretical methods of scientific and pedagogical research and mathematical methods for proving mathematical statements are applied.*

Results. *This article provides a basic presentation of theoretical educational material on "Equi-affine Transformations of the Plane." It is supplemented with commentary, application examples, solved problems, and tasks for independent problem-solving. In particular, the work derives formulas for calculating the area of a triangle constructed on two vectors as sides and the area of a triangle determined by the coordinates of its vertices in a rectangular Cartesian coordinate system. These are auxiliary results used to substantiate the criterion of equi-affinity for a transformation. Special attention is given to two "progenitor" equi-affine transformations: the hyperbolic and elliptical rotations of the plane. Additionally, the work proves a criterion for isometry within the family of affine transformations of the plane.*

Conclusions. *The presented educational material can be utilized by mathematics teachers in extracurricular activities at schools or by instructors of analytical geometry for future mathematics teachers. This material is the basis for formulating problems* *матеріал є основою для формулювання проблем, пов’язаних із методикою вивчення теми, зокрема зі збалансованістю задачного матеріалу.*

related to the methodology of studying the topic, in particular, the balance of the task material..

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *геометричне перетворення площини; афінне перетворення; еквіафінне перетворення; критерій еквіафінності перетворення; гіперболічний поворот; еліптичний поворот; шкільний курс геометрії; гурткова робота в школі; майбутній вчитель математики.*

KEYWORDS: *geometric transformation of the plane; affine transformation; equi-affine transformation; a criterion of equi-affinity; hyperbolic rotation; elliptical rotation; school geometry curriculum; extracurricular activities in schools; future mathematics teacher.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Працьовитий М., Правіцка Н., Ратушняк С. Еквіафінні перетворення площини у математичній освіті школярів та майбутніх вчителів математики. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 49-56. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-07.

FOR CITATION: Pratsiovytyi, M., Pravitska, N., & Ratushniak, S. (2025). Equi-affine transformations in mathematical education of schoolchildren and future mathematics teachers. *Physical and Mathematical Education*, *40*(2), 49-56. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-07.

ВСТУП

Шкода, що в деяких шкільних підручниках не дотримуються вказаного означення і більше того, руйнують місток між наукою МАТЕМАТИКА і навчальною дисципліною, між університетськими геометричними курсами і шкільним курсом геометрії. І це тоді, коли метод геометричних перетворень є одним з головних загальних методів геометрії, зокрема елементарної. Школярі, які цікавляться математикою, мають мати змогу знати більше про перетворення, причому без спотворення наукових істин, а вчитель математики бути озброєним знаннями і вміннями, системним цілісним поглядом, здатним і готовим учню допомогти. Проблемі науковості, доступності та доцільності вивчення афінних перетворень присвячена дана стаття.

Теоретичний аналіз джерел навчальної літератури засвідчує практичну відсутність інформації, яка стосується еквіафінних перетворень площини, а вони утворюють важливу підгрупу групи всіх афінних перетворень і важливі для застосувань. Більше того, знайомство школярів з афінними перетвореннями варто розпочинати саме з еквіафінних перетворень, яким присвячена ця стаття.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Нагадаємо, що взаємно однозначне (бієктивне) відображення множини (тривимірного простору, площини, прямої) на себе називається її *перетворенням*. Це є загальноприйнятим в геометрії означенням. Інформація про еквіафінні перетворення площини частково наявна в наукових джерелах, але відсутня в навчально-методичній літературі.

Функції: $y = x$, $y = -x^2 + 1$, $y = x^n$ є прикладами перетворень відрізка $[0; 1]$ числової прямої. Прикладами перетворень площини є: рухи (центральна, осьова та ковзна симетрії, паралельне перенесення та поворот площини навколо фіксованої точки на заданий кут); перетворення подібності, зокрема гомотетія; інверсія площини (без виколотої точки) тощо. Клас перетворень тривимірного простору є суттєво масивніший, зокрема йому належать такі прості перетворення як центральна симетрія, симетрія відносно площини, сфери, стиск до площини та ін.

Далі мова йтиме про перетворення площини. Кожне з них можна задавати різними способами, зокрема аналітичним (за допомогою формули чи декількох формул). Якщо φ – перетворення площини і $\varphi(M) = M'$, то кажуть, що M' є образом точки M при перетворенні φ, а M – прообразом точки M'. Традиційно координати образу M' точки $M(x; y)$ позначають через $(x'; y')$. Формули перетворення площини, задані у прямокутній декартовій системі координат (ПДСК) мають загальний вигляд: $x' = f_1(x, y)$, $y' = f_2(x, y)$, де під $f_1(x, y), f_2(x, y)$ розуміються вирази зі змінними x та y (але не кожна пара таких формул задає перетворення площини). Вони встановлюють зв'язок між координатами $(x; y)$ точки та координатами її образу $(x'; y')$. Наприклад, формули $x' = -x$, $y' = y$ визначають осьову симетрію з віссю Oy, а формули $x' = x + a$, $y' = y + b$ – паралельне перенесення площини на вектор $\vec{s} = (a; b)$. Формули $x' = \frac{xr^2}{x^2+y^2}$, $y' = \frac{yr^2}{x^2+y^2}$ визначають інверсію площини з центром $O(0; 0)$ і радіусом $r > 0$.

Перетворення площини, яке кожну точку відображає в себе, називається тотожним. Воно задається формулами: $x' = x$, $y' = y$. Кожне перетворення, будучи бієктивним відображенням, має обернене. Якщо $f(M) = M'$, то обернене перетворення, яке позначається f^{-1}, точці M' ставить у відповідність точку M. При оберненому перетворенні образ і прообраз міняються ролями, тобто для перетворення $f(M) = M'$ оберненим є перетворення $f^{-1}(M') = M$.

Наприклад, для перетворення

$$f\colon \begin{cases} x' = f_1(x, y) = x - 2y, \\ y' = f_2(x, y) = x + y + 1 \end{cases}$$

знайти обернене означає: «обернути» задані формули, тобто виразити x та y через x' та y' і взаємозамінити позначення координат образу і прообразу (згідно з домовленостями позначати координати образу і прообразу відповідно x' і y' та x, y). У даному випадку:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{3} + \dfrac{2y'}{3} - \dfrac{2}{3}, \\ y = -\dfrac{x'}{3} + \dfrac{y'}{3} - \dfrac{1}{3}, \end{cases} \text{ і } f^{-1}\colon \begin{cases} x' = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2y}{3} - \dfrac{2}{3}, \\ y' = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Метод геометричних перетворень є одним з загальних методів дослідження геометричних об’єктів та розв’язування задач. Наведемо приклад ефективного використання методу геометричних перетворень площини для доведення геометричних нерівностей.

Задача (Всеукраїнська олімпіада з математики, III етап 22-23.01.2022 р. м. Львів). *На бісектрисі зовнішнього кута C трикутника ABC взято точку M, відмінну від точки C. Довести, що периметр $\triangle ABM$ більший за периметр $\triangle ABC$, тобто $P_{\triangle ABM} > P_{\triangle ABC}$.*

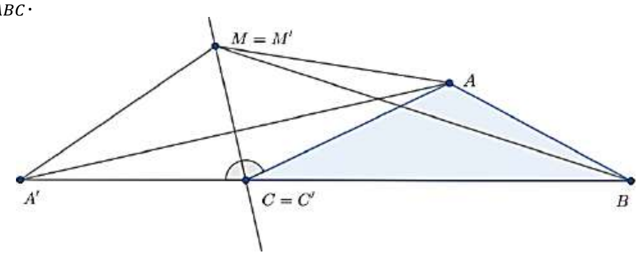


Рис. 1

Джерело: Всеукраїнська олімпіада з математики, III етап 22-23.01.2022 р. м. Львів

Розв'язання. Розглянемо симетрію площини f відносно бісектриси CM зовнішнього кута C трикутника ABC (див. Рис.1). Для неї точки M і C є нерухомими, а образ A' точки A лежить на прямій BC, $CA = CA'$, $MA = MA'$. Тоді

$$P_{\triangle ABM} = AB + BM + MA = AB + BM + MA'.$$

За нерівністю трикутника: $BM + MA' > A'B$. Але $A'B = A'C + CB = AC + CB$. Отже, $P_{\triangle ABM} > AB + A'C + CB = = AB + AC + BC = P_{\triangle ABC}$, що й вимагалось довести.

На основі перетворень можна побудувати всю теорію елементарної геометрії, зокрема шкільного курсу геометрії (це реалізовувалось у вітчизняній практиці в 70-тих роках попереднього століття (Колмогоров та ін., 1972)), але виявилось складним для школярів.

Перетворення, що зберігають міру, включаючи довжину, площу, об'єм, величину кута, відносять до класу метричних. Вони важливі для математики та її застосувань, зокрема для теорії ймовірностей, теорії динамічних систем та теорії фракталів. Одній з груп таких геометричних перетворень площини присвячена ця робота.

МЕТОДИ ТА МАТЕРІАЛИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Застосовано теоретичні методи науково-педагогічного пошуку та математичні методи для доведення математичних тверджень.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Афінні перетворення. Нагадаємо, що перетворення площини, яке кожні три точки, що лежать на одній прямій відображає в три точки, що теж належать одній прямій (тобто зберігає колінеарність точок), називається *афінним*. Афінні перетворення ще називають *колінеаціями*. Буквальний зміст терміну «колінеарність» означає «належність одній прямій». Зрозуміло, що рух (перетворення, що зберігає відстані) і перетворення подібності є частинним випадком афінного перетворення. Наведене означення носить суто геометричний зміст і є традиційним для геометричних курсів. Більше того, часто з педагогічних міркувань в означення афінного перетворення закладають надлишкову вимогу – збереження простого відношення трьох точок прямої, що є наслідком першої вимоги – збереження колінеарності точок (це випливає з відомих теорем Дарбу, які мають громіздкі доведення і займають багато лекційного часу).

Афінне перетворення у ПДСК аналітично задається формулами:

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1, \\ y' = a_2x + b_2y + c_2, \end{cases} \quad (1)$$

де $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, які пов'язують координати точки $(x; y)$ з координатами її образу $(x'; y')$. Іноді ці формули «закладають» в означення афінного перетворення, тобто перетворення площини, задане формулами (1), називають афінним. Після цього виводяться основні властивості афінного перетворення: збереження колінеарності точок і простого відношення трьох точок прямої, доводиться основна теорема теорії афінних перетворень. Перше з наведених означень афінного перетворення, будучи суто геометричним, є суттєво абстрактнішим і малопридатним для початкового ознайомлення з ним і школярів, і студентів нематематичних спеціальностей.

Будь-яке афінне перетворення площини у спряжених комплексних координатах виражається наступною формулою: $z' = az + b\bar{z} + c$, де $a, b, c -$ комплексні параметри, $z -$ змінна, причому $\delta = a\bar{a} - b\bar{b} \neq 0$, числа і – спряженні.

Афінні перетворення площини не вивчаються у шкільному курсі математики (ШКМ). Там фрагментарно фігурують лише рухи та перетворення подібності і то не в аналітичній формі. Більше того, самому перетворенню як поняттю приділено мало уваги у шкільних програмах та підручниках, а в існуючих викладках бракує строгості. Але це не має заважати вчителю, який усвідомлює роль і значення геометричних перетворень, у позакласній, зокрема гуртковій, роботі знайомити учнів з афінними перетвореннями, принаймні з окремими їх представниками, культивувати метод геометричних перетворень. Це є одним з аргументів для відповіді на запитання: «Навіщо в університетському курсі «Аналітичної геометрії» майбутні вчителі математики системно вивчають афінні перетворення площини на строгій аналітичній основі?» (Працьовитий, 2007; Працьовитий, 2013.). Вчитель математики і успішні учні мають чітко розмежовувати метричні і афінні задачі елементарної математики (Істер, 2022). Варто прививати учням вміння міркувати категоріями афінної геометрії.

Еквіафінні перетворення площини. Афінне перетворення площини називається *еквіафінним*, якщо воно зберігає площі многокутників.

Зауваження. Оскільки довільний многокутник розбивається на скінченну кількість трикутників, то для перевірки еквіафінності перетворення площини достатньо перевірити збереження площ трикутників.

Наступні факти, доведені елементарними засобами, можуть суттєво допомогти вчителю ознайомити учнів з еквіафінними перетвореннями площини.

Лема 1. *Площа трикутника* ΔABC *обчислюється за формулою*

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

Доведення. Справді, використовуючи відому з ШКМ формулу:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} ab \sin\varphi$$

і означення скалярного добутку векторів, виконаємо перетворення:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right| \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sqrt{1 - \cos^2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

Теорема 1. *Площа трикутника* ΔABC, *визначеного координатами вершин у ПДСК*: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ *обчислюється за формулою*:

$$S_{\Delta ABC} = \tfrac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|. \quad (2)$$

Доведення. Оскільки

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1), \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1),$$

то використовуючи формулу (1), маємо

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left[((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2) - \left((x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

Теорему доведено.

Наслідок. Площа трикутника з раціональними координатами вершин виражається раціональним числом.

Пропонуємо самостійно розв’язати наступні дві задачі.

Задача. Доведіть, що задане перетворення не є еквіафінним: $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

Задача. Знайти площу образу ΔABC, де $A(2; 3), B(3; 5), C(5; -2)$, під дією перетворення

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1, \\ y' = 6x - 3y - 4. \end{cases}$$

Гіперболічний поворот. Найпростішим прикладом еквіафінного перетворення, відмінного від руху, є перетворення f, яке задається формулами: $x' = kx$, $y' = \frac{1}{k}y$ і називається *гіперболічним поворотом*. Справді, якщо для трикутника ABC: $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$, $f(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$, то

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}\left|kx_1\left(\frac{1}{k}y_2 - \frac{1}{k}y_3\right) + kx_2\left(\frac{1}{k}y_3 - \frac{1}{k}y_1\right) + kx_3\left(\frac{1}{k}y_1 - \frac{1}{k}y_2\right)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = S_{\Delta ABC}.$$

Отже, гіперболічний поворот є еквіафінним перетворенням.

Формули гіперболічного повороту приводять до зв’язку координат образу і прообразу, який виражається рівністю $x'y' = xy$, тобто коли точка $M(x; y)$ належить гіперболі $\gamma: xy = c$, то її образ $M'(x'; y')$ також лежить на цій же гіперболі, оскільки $x'y' = xy = c$. Таким чином, гіпербола є інваріантною фігурою даного перетворення. Це і стало головною мотивацією для вибору терміну «гіперболічний поворот».

Зазначимо, що гіперболічний поворот іноді називають *перетворенням Лоренца*. Воно тісно пов’язане з неевклідовою *геометрією Лобачевського* і використовується в теорії відносності.

Задача. Знайти висоту $A'H'$ трикутника $\Delta A'B'C'$, що є образом ΔABC, де $A(2; 3), B(3; 5), C(5; -2)$, при перетворенні площини, яке задається формулами: $x' = 2x$, $y' = \frac{1}{2}y$.

Вказівка. Переконатись в тому, що дане перетворення зберігає площі фігур; обчислити площу трикутника ΔABC за формулою (2) і скористатись формулою $AH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{|B'C'|}$, де $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

Перетворення площини, задане формулами $x' = x$, $y' = ky$, де $k > 0$, називається стиском до осі Ox.

Задача 1. *Довести, що площа фігури, обмеженої еліпсом* $\gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *обчислюється за формулою* $S = \pi ab$.

Розв’язання. Формула, очевидно справджується для кола, що є еліпсом з рівними осями, тобто a=b. Коло з центром в початку координат і радіусом a: $x^2 + y^2 = a^2$ під дією стиску площини до осі Ox, який задається формулами

$$f: \begin{cases} x' = x, \\ y' = \dfrac{b}{a}y, \end{cases}$$

переходить в заданий еліпс γ. Враховуючи те, що при афінному перетворенні відношення площ образу і прообразу є константою $\Delta = 1 \cdot \frac{b}{a} - 0 \cdot 0 = \frac{b}{a}$, отримуємо $\frac{S_{\text{еліпс}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{b}{a}$, тобто $S_{\text{еліпс}} = \frac{b}{a}S_{\text{круга}} = \frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$, що й вимагалось довести.

КРИТЕРІЙ ЕКВІАФІННОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Теорема 2. *Афінне перетворення площини, задане у ПДСК формулами*

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + x_0, \\ y' = a_2x + b_2y + y_0, \end{cases} \tag{3}$$

є еквіафінним тоді і лише тоді, коли $\Delta = |a_1b_2 - a_2b_1| = 1$.

Доведення. Розглянемо вираз площі образу $A'B'C'$ трикутника ABC, заданого декартовими координатами вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3, y_3)$, під дією афінного перетворення (3), використовуючи формулу (2):

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}|x_1'(y_2' - y_3') + x_2'(y_3' - y_1') + x_3'(y_1' - y_2')| =$$
$$= \frac{1}{2}|(a_1x_1 + b_1y_1 + x_0)(a_2x_2 + b_2y_2 + y_0 - a_2x_3 - b_2y_3 - y_0) +$$
$$+(a_1x_2 + b_1y_2 + x_0)(a_2x_3 + b_2y_3 + y_0 - a_2x_1 - b_2y_1 - y_0) +$$
$$+(a_1x_3 + b_1y_3 + x_0)(a_2x_1 + b_2y_1 + y_0 - a_2x_2 - b_2y_2 - y_0)| =$$
$$= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3)(a_1b_2 - b_1a_2) + x_2(y_3 - y_1)(a_1b_2 - b_1a_2) + x_3(a_1b_2 - b_1a_2)|$$
$$= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)||a_1b_2 - a_2b_1| = |a_1b_2 - a_2b_1|S_{\Delta ABC}.$$

Отже, $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}$ тоді і лише тоді, коли $|a_1b_2 - a_2b_1| = 1$, що й вимагалось довести.

Наслідок. *Якщо афінне перетворення зберігає площу хоча б одного з трикутників, то воно є еквіафінним*.

Розглянемо приклад застосування теореми 2.

Задача 2. Трикутник $A_1B_1C_1$ є образом трикутника ABC при деякому афінному перетворенні f, а саме $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$, $C_1 = f(C)$. Знайти формули цього перетворення. Чи є афінне перетворення f еквіафінним, якщо в ПДСК задано $A(3; 0)$, $B(0; 3)$, $C(-1; 0)$, $A_1(7; 0)$, $B_1(1; 0)$, $C_1(0; 2)$?

Розв'язання. Знайдемо афінне перетворення f, використовуючи формули (3):

$$A_1 = f(A)\colon \begin{cases} 7 = a_1 \cdot 3 + b_1 \cdot 0 + x_0, \\ 0 = a_2 \cdot 3 + b_2 \cdot 0 + y_0, \end{cases}$$
$$B_1 = f(B)\colon \begin{cases} 1 = a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 3 + x_0, \\ 0 = a_2 \cdot 0 + b_2 \cdot 3 + y_0, \end{cases}$$
$$C_1 = f(C)\colon \begin{cases} 0 = a_1 \cdot (-1) + b_1 \cdot 0 + x_0, \\ 2 = a_2 \cdot (-1) + b_2 \cdot 0 + y_0. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} 3a_1 + x_0 = 7, \\ 3b_1 + x_0 = 1, \\ -a_1 + x_0 = 0, \end{cases} \begin{cases} 3a_2 + y_0 = 0, \\ 3b_2 + y_0 = 0, \\ -a_2 + y_0 = 2, \end{cases}$$
$$a_1 = \frac{7}{4} = x_0, b_1 = -\frac{1}{4}, a_2 = -\frac{1}{2} = b_2, y_0 = \frac{3}{2}.$$

Отже,

$$\begin{cases} x' = \frac{7}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{7}{4}, \\ y' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Оскільки $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = S_{\Delta A_1B_1C_1}$, то f згідно з попереднім наслідком є еквіафінним.

Еліптичний поворот. Перетворення площини, яке у ПДСК задається формулами

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - ky\sin\varphi, \\ y' = \frac{1}{k}x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

називається *еліптичним поворотом*. Інваріантною фігурою цього перетворення є еліпс $\frac{x^2}{k^2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Справді, підставляючи вирази x' та y' у рівняння еліпса $\frac{x'^2}{k^2b^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ знаходимо рівняння його прообразу:

$$\frac{(x\cos\varphi - ky\sin\varphi)^2}{k^2b^2} + \frac{\left(\frac{1}{k}x\sin\varphi + y\cos\varphi\right)^2}{b^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{k^2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Як бачимо, рівняння не змінило форму, що засвідчує інваріантність цієї фігури відносно даного перетворення. При $k = 1$ еліптичний поворот є звичайним поворотом площини навколо початку координат на кут φ.

Еліптичний поворот площини є еквіафінним перетворенням згідно з теоремою 2, оскільки $\Delta = |a_1b_2 - a_2b_1| = \cos^2\varphi + \frac{1}{k} \cdot k\sin^2\varphi = 1$.

Згідно з теоремою 2 перетворення площини, задане у ПДСК формулами

$$\begin{cases} x' = mx\cos\varphi \pm ky\sin\varphi + x_0, \\ y' = \frac{1}{k}x\sin\varphi \mp \frac{1}{m}y\cos\varphi + y_0, \end{cases}$$

є еквіафінним. Справді, $\Delta = |a_1b_2 - a_2b_1| = \mp(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \mp1$.

Критерій руху.

Означення. Пару векторів $\vec{a} = (a_1; a_2)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2)$ називають ортонормованою, якщо

$$a_1^2 + a_2^2 = 1 = b_1^2 + b_2^2 \text{ і } a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Лема 2. *Якщо пара векторів $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ортонормована, то $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1$.*

Доведення. 1 Спосіб (для учнів). Позначимо $M = a_1 b_2 - a_2 b_1$ і розглянемо

$$M^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2.$$

Оскільки $a_2^2 = 1 - a_1^2$, $b_2^2 = 1 - b_1^2$, $a_2 b_2 = -a_1 b_1$. Тоді

$$M^2 = a_1^2(1 - b_1^2) + 2a_1^2 b_1^2 + (1 - a_1^2) b_1^2 = a_1^2 + b_1^2.$$

Аналогічно, в силу рівноправності a_1 і a_2, b_1 і b_2, маємо

$$M^2 = a_2^2 + b_2^2.$$

Тоді $2M^2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) = 2$. Отже, $M = \pm 1$.

2 Спосіб (для студентів, які вивчили векторний добуток векторів). В ортонормованому базисі $< \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}, >$ тривимірного простору розглянемо вектори $\vec{a} = (a_1; a_2; 0)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; 0)$. Оскільки

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 = 0,$$

то $\vec{a} \perp \vec{b}$. Тому $cos\ \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 0$, а отже, синус напрямленого (орієнтованого) кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює ± 1. З іншого боку, згідно з означенням векторного добутку векторів маємо

$$\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \sqrt{0 + 0 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|.$$

Тому $\left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right| = 1$, а отже, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \pm 1$.

Лему доведено.

Теорема 3. *Перетворення площини f, задане формулами*

$$x' = a_1 x + b_1 y + x_0 \text{ і } y' = a_2 x + b_2 y + y_0,$$

де пара векторів $\vec{a} = (a_1; a_2)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2)$ є ортонормованою, є еквіафінним, більше того, воно є рухом – перетворенням, що зберігає відстані.

Доведення. Перша частина твердження є наслідком попередньої леми і теореми, оскільки з ортонормованості пари векторів $\vec{a} = (a_1; a_2)$ *і* $\vec{b} = (b_1; b_2)$маємо $|a_1 b_2 - a_2 b_1| = 1$, а згідно з теоремою2 перетворення є еквіафінним.

Покажемо, що дане перетворення зберігає відстанні. Нехай точки $A(x_A; y_A)$ і $B(x_B; y_B)$ задані своїми координатами в ПДСК. Тоді маємо координати образу цих точок

$$A'(a_1 x_A + b_1 y_A + x_0; a_2 x_A + b_2 y_A + y_0),$$
$$B'(a_1 x_B + b_1 y_B + x_0; a_2 x_B + b_2 y_B + y_0).$$

Виразимо відстань між точками A' і B':

$$|A'B'| = \sqrt{[a_1(x_B - x_A) + b_1(y_B - y_A)]^2 + [a_2(x_B - x_A) + b_2(y_B - y_A)]^2} =$$
$$= \sqrt{(x_B - x_A)^2[a_1^2 + a_2^2] + (y_B - y_A)^2[b_1^2 + b_2^2] + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)(x_B - x_A)(y_A - y_B)}$$
$$= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |AB|.$$

Отже, f є рухом.

Задача 3. Знайти афінне перетворення, відмінне від руху, для якого парабола: $y^2 = 2px$ є інваріантною фігурою, а її вершина – інваріантною точкою. І з'ясувати чи є воно еквіафінним.

Розв'язання. Скористаємось загальними формулами афінного перетворення:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + x_0, \\ y' = a_2 x + b_2 y + y_0. \end{cases}$$

Оскільки вершина $O(0; 0)$ є інваріантною, то $x_0 = 0, y_0 = 0$. Тому формули набувають вигляду

$$x' = a_1 x + b_1 y, y' = a_2 x + b_2 y.$$

Оскільки парабола γ є інваріантною фігурою, то її образ задається тим же рівнянням: $y'^2 = 2px'$. Тоді рівняння прообразу після підстановки виразів x' та y' набуває вигляду:

$$(a_2 x + b_2 y)^2 = 2p(a_1 x + b_1 y), a_2^2 x^2 + 2a_2 b_2 xy + b_2^2 y^2 = 2pa_1 x + 2pb_1 y.$$

Звідки $a_2 = 0$, $b_1 = 0$ і $y^2 = 2p \frac{a_1}{b_2^2} x$. Отже, афінне перетворення $\begin{cases} x' = c^2 x, \\ y' = cy, \end{cases}$ де $0 \neq c \neq 1$, задовольняє вимогу задачі. Воно відмінне від руху згідно з теоремою 3 і для нього задана парабола є інваріантною фігурою.

Оскільки $a_1 b_2 = a_2 b_1 = c^3 \neq \pm 1$, то знайдене афінне перетворення не є еквіафінним.

Означення. Афінне перетворення, відмінне від руху, інваріантною фігурою якого є парабола, називається параболічним поворотом.

ГРУПА ЕКВІАФІННИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТА ЇЇ ПІДГРУПИ

Множина всіх афінних перетворень площини відносно операції «композиція перетворень» (суперпозиція) утворює некомутативну групу (дві осьові симетрії з осями, що перетинаються, але не перпендикулярні, не комутують). Одним з головних інваріантів цієї групи є збереження простого відношення трьох точок однієї прямої. Її підгрупами є множина всіх перетворень подібності та множина рухів. Теорія інваріантів групи афінних перетворень називається *афінною геометрією*, тобто афінна геометрія з групової точки зору (погляд, запропонований в 1872 р. Ф.Клейном) вивчає властивості геометричних фігур і геометричних відношень (відповідностей), які зберігаються при будь-якому афінному перетворенні.

Множина всіх еквіафінних перетворень площини є підгрупою групи всіх афінних перетворень площини. Її головним інваріантом є збереження площ квадровних фігур, а отже, еквіафінне перетворення зберігає відношення рівновеликості та рівноскладеності, які еквівалентні в силу теореми Бояй-Гервіна. Підгрупами групи еквіафінних перетворень є множина рухів, а також множина всіх гіперболічних поворотів (перетворень, які задаються формулами: $x' = kx,\ y' = \frac{1}{k}y$). При k=1 маємо нейтральний (нульовий) елемент групи -- тотожне перетворення $x' = x,\ y' = y$, обернене перетворення задається формулами: $x' = \frac{1}{k}x,\ y' = ky$.

Зауважимо, що афінні перетворення не представленні у навчальному посібнику (Боровик та ін., 2003), рекомендованому МОН України для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних навчальних закладів, що є свідченням того, що не всі майбутні вчителі математики їх вивчають.

ВИСНОВКИ

Наведену вище коротку аналітичну теорію еквіафінних перетворень площини доступну для старшокласників можна включати у систему гурткової роботи з геометрії для школярів. Добре було б мати збалансовану систему яскравих задач, які ефектно розв'язуються з використанням еквіафінних перетворень площини. Це актуальне, на наш погляд, завдання ми плануємо виконати в майбутньому, але наразі такою добіркою не володіємо. Можливо хтось з читачів має такі приклади, запрошуємо до обговорення і співпраці. Зауважимо, що знайомство з формульною (координатною) формою задання та дослідження перетворень площини для школярів є новим (не вписується у традиційні схеми) і може суттєво розширити погляд на геометрію – науку, яка органічно поєднує синтетичні та аналітичні методи дослідження об'єктів.

Рекомендуємо читачеві ознайомитись з науковим поглядом на геометричні перетворення в ШКМ у (Бевз, 1977; Бевз та ін., 1982).

Задачі. 1. *Знайти прообраз еліпса* $\frac{x'^2}{k^2b^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ *при еквіафінному перетворенні* $\begin{cases} x' = kx\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + \frac{1}{k}y\cos\varphi\,. \end{cases}$

2. *Відомо, що* $a_1^2 + a_2^2 = c^2 = b_1^2 + b_2^2$, $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. *Яких значень може набувати вираз* $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$?

3. Перетворення площини, інваріантною фігурою якого є принаймні одна парабола, називається параболічним поворотом. Знайти формули афінного перетворення площини, яке параболу $y = -x^2$ переводять саму в себе, залишаючи вершину на місці. Встановити чи є вказаний параболічний поворот еквіафінним перетворенням?

4. Знайти критерій еквіафінності перетворення у термінах спряжених комплексних координат?

5. Знайти перетворення, обернене заданому:

$$\begin{cases} x' = mx\cos\varphi + ky\sin\varphi + x_0, \\ y' = \dfrac{1}{k}x\sin\varphi - \dfrac{1}{m}y\cos\varphi + y_0. \end{cases}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз, Г.П. (1977). *Методика викладання математики*. Вища школа.
2. Бевз, Г.П., Конфорович, А.Г., Резніченко, З.О., & Ченакал, Є.О. (1982). *Математика: Посібник для факультативних занять у 7 кл*. Радянська школа.
3. Боровик, В.Н., Зайченко, І.В., Мурач, М.М., & Яковець, В.П. (2003). *Геометричні перетворення площини: навчальний посібник*. Університетська книга.
4. Готман, Э.Г., & Скопец, З.А. (1988). *Задача одна – решения разные*. Радянська школа.
5. Істер, О.С. (2022). *Геометрія: підруч. для 9 кл. закладів загальної середньої освіти*. Генеза.
6. Колмогоров, А.М., Семенович, О.Ф., Нагібін, Ф.Ф., & Черкасов, Р.С. (1972). *Геометрія 6 клас*. Радянська школа.
7. Кушнір, І.А. (1994). *Методи розв'язування задач з геометрії*. Абрис.
8. Мерзляк, А.Г., Полонський, В.Б., & Якір, М.С. (2017). *Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів*. Гімназія.
9. Погорєлов, О.В. (1993). *Геометрія: підруч. для 7-11кл. серед. школи*. Освіта.
10. Працьовитий, М.В. (2007). *Геометричні перетворення. Теоретико-груповий погляд на геометрію*. НПУ імені М.П. Драгоманова.
11. Працьовитий, М.В. (2007). *Геометричні перетворення. Рухи площини*. НПУ імені М.П. Драгоманова.
12. Працьовитий, М.В. (2013). *Перетворення подібності площини з елементами теорії фракталів*. НПУ імені М.П. Драгоманова.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bevz, G.P. (1977). *Methods of teaching mathematics*. Vyshcha shkola (in Ukrainian).
2. Bevz, G.P., Konforovich, A.G., Reznichenko, Z.O., & Chenakal, E.O. (1982). *Mathematics: A manual for optional classes in the 7th grade*. Radianska shkola (in Ukrainian).
3. Borovik, V.N., Zaichenko, I.V., Murach, M.M., & Yakovets, V.P. (2003). *Geometric transformations of the plane: a textbook*. University book (in Ukrainian).

4. Gottman, E.G., & Skopets, Z.A. (1988). *One problem - different solutions*. Radianska shkola (in Ukrainian).
5. Easter, O.S. (2022). *Geometry: a textbook for 9th grade of general secondary education*. Genesis (in Ukrainian).
6. Kolmogorov, A.M., Semenovich, O.F., Nagibin, F.F., & Cherkasov, R.S. (1972). *Geometry 6th grade*. Radianska shkola.
7. Kushnir, I.A. (1994). Methods of solving problems in geometry. Abris (in Ukrainian).
8. Merzlyak, A.G., Polonsky, V.B., & Yakir, M.S. (2017). *Geometry for general educational institutions with in-depth study of mathematics: a textbook for 9th grade of general educational institutions*. Gymnasium (in Ukrainian).
9. Pogorelov, O.V. (1993). *Geometry: a textbook for 7-11 grades of secondary school*. Osvita (in Ukrainian).
10. Pratsovyty, M.V. (2007). *Geometric transformations. Theoretical and group view of geometry*. Drahomanov National Pedagogical University (in Ukrainian).
11. Pratsovytyi, M.V. (2007). *Geometric transformations. Isometric transformations of the plane*. Drahomanov National Pedagogical University (in Ukrainian).
12. Pratsovytyi, M.V. (2013). *Transformations of plane similarity with elements of fractal theory*. Drahomanov National Pedagogical University (in Ukrainian).

| *Матеріал надійшов до редакції: 20.01.2025 р.* | *Прийнято до друку: 27.02.2025 р.* | *Опубліковано: 29.04.2025 р.* |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)

p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X **2025, 40(2)**, https://doi.org/**10.31110/fmo2025.v40i2-08**

УДК: 004.942

ОПТИМІЗАЦІЯ НАЙКОРОТШОГО МАРШРУТУ ДЛЯ ВІЙСЬКОВИХ ОПЕРАЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ MS EXCEL ТА WOLFRAM MATHEMATICA

Ольга УДОДОВА ✉
Харківський національний університет Повітряних Сил імені І. Кожедуба, Україна
udodova_o@ukr.net, https://orcid.org/0000-0003-1072-0602

Сніжана ВОВЧУК
Харківський національний університет Повітряних Сил імені І. Кожедуба, Україна
snezhana.vovchuk@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6187-0059

АНОТАЦІЯ

У контексті сучасних військових операцій оптимізація маршрутів військових підрозділів має першорядне значення. Від вибору правильних маршрутів залежить ефективність виконання бойових завдань, безпека особового складу та ефективність логістичних процесів. Визначення найефективнішого маршруту є критично важливим при проведенні військових операцій, перевезенні вантажів та рятувальних місій тощо.

Формулювання проблеми. *Стрімкий розвиток комп'ютерного моделювання в різних галузях створив можливість проектувати складні системи, аналізувати їхні властивості та ефективно керувати ними в умовах обмеженого часу, ресурсів та неповної інформації. Для дослідження характе-ристик таких систем та вирішення ключових проблем управління необхідно вміти будувати їх математичні моделі.*

Матеріали і методи. *Для прийняття обґрунтованих рішень та підвищення ефективності виконання бойових та логістичних завдань майбутнім військовим фахівцям необхідно оволодіти навичками побудови математичних моделей. Для вирішення таких завдань можуть бути використані методи математичного моделювання, зокрема алгоритми пошуку найкоротшого шляху. Найпростішими системами для реалізації цих методів є MS Excel та Wolfram Mathematica, які мають потужні інструменти для аналізу та оптимізації маршрутів.*

Результати. *Запропоновані підходи були апробовані в навчальному процесі підготовки курсантів Харківського національного університету Повітряних Сил імені І. Кожедуба. Вони дозволяють курсантам засвоїти основи теорії графів, методів оптимізації та принципів військової логістики. Використання Wolfram Mathematica продемонструвало значні переваги у швидкості та точності обчислень порівняно з Excel, особливо у випадках динамічних змін маршруту.*

Висновки. *Викладання методів пошуку найкоротшого маршруту за допомогою MS Excel та Wolfram Mathematica допоможе курсантам розвивати навички аналітичного мислення, розуміти важливість алгоритмічних підходів військового планування, особливо для майбутніх військових аналітиків, інженерів, фахівців з логістики та інформаційних технологій.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *військова логістика; викладання задач оптимізації; задача про найкоротший шлях; MS Excel; "Розв'язувач", Wolfram Mathematica.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Удодова О., Вовчук С. Оптимізація найкоротшого маршруту для військових операцій за допомогою MS Excel та Wolfram Mathematica. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 57-62. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-08.

SHORTEST PATH OPTIMISATION FOR MILITARY OPERATIONS WITH MS EXCEL AND WOLFRAM MATHEMATICA

Olha UDODOVA ✉
Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Ukraine
udodova_o@ukr.net, https://orcid.org/0000-0003-1072-0602

Snizhana VOVCHUK
Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Ukraine
snezhana.vovchuk@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6187-0059

ABSTRACT

In the context of contemporary military operations, optimizing the routes of military units is of paramount importance. The selection of appropriate routes is pivotal in determining the efficiency of combat missions, the safety of personnel, and the efficacy of logistics processes. The identification of the most efficient route is a critical consideration in military operations, cargo transportation, and rescue missions.

Formulation of the problem. *The rapid development of computer modelling in various fields has created the possibility of designing complex systems, analyzing their properties, and managing them effectively in conditions of limited time, resources, and incomplete information. To study the characteristics of such systems and solve key management problems, it is necessary to be able to build their mathematical models.*

Materials and methods. *In order to make informed decisions and improve the efficiency of combat and logistics tasks, it is essential for future military specialists to master the construction of mathematical models. Mathematical modelling methods, in particular shortest path search algorithms, can be used to solve such problems. The simplest systems for implementing these methods are MS Excel and Wolfram Mathematica, which have powerful tools for route analysis and optimization.*

Results. *The proposed approaches have been tested in the educational process of training cadets at the Kharkiv National Air Force University named after I. Kozhedub. They allow students to learn the basics of graph theory, optimization methods, and military logistics principles. The use of Wolfram Mathematica has demonstrated significant advantages in terms of speed and accuracy of calculations compared to Excel, especially in cases of dynamic route changes.*

Conclusions. *The teaching methods for finding the shortest route using MS Excel and Wolfram Mathematica will help cadets develop analytical thinking skills, understand the importance of algorithmic approaches to military planning. This is especially important for future military analysts, engineers, logistics, and information technology specialists.*

KEYWORDS: *military logistics; teaching optimization problems; shortest path problem; MS Excel; Wolfram Mathematica.*

FOR CITATION: Udodova, O., & Vovchuk, S. (2025). Shortest path optimisation for military operations with MS Excel and Wolfram Mathematica. *Physical and Mathematical Education*, *40*(2), 57-62. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-08

ВСТУП

Постановка проблеми. У роботі розглядається проблема оптимізації маршрутів для військових підрозділів із використанням методів теорії графів та алгоритмів пошуку найкоротшого шляху. Традиційні підходи, такі як ручне планування та використання GPS навігації, є неефективними в умовах бойових дій через їхню нездатність швидко адаптуватися до змін тактичної обстановки, наявність заборонених або небезпечних зон та вимогу оперативної реакції на нові загрози. Поточні алгоритми, такі як алгоритм Дейкстри (Dijkstra, 1959), мають високу обчислювальну складність для великих графів (Sharifzadeh et al., 2008) і не підходять для динамічних сценаріїв (Loucks, 2022). Аналіз моделей тактичної обстановки, які використовуються для прийняття рішень при плануванні транспортних маршрутів, представлено у (Díaz-Madroñero et al., 2015).

Для вирішення завдань обрані інструменти MS Excel та Wolfram Mathematica. MS Excel зручний для статичного і базового аналізу даних без необхідності програмування, що робить його доступним інструментом для широкого кола користувачів. Wolfram Mathematica, з іншого боку, пропонує більш потужні можливості для математичного моделювання та обробки великих обсягів даних, а також функції візуалізації та адаптації до змін у реальному часі. Хоча Python (зокрема, бібліотека NetworkX) та MATLAB також є важливими засобами задач оптимізації, їх використання потребує додаткових знань програмування та ліцензійних витрат у випадку MATLAB (Loucks, 2022).

Аналіз актуальних досліджень. У 1959 році Едсгер Дейкстра розробив алгоритм пошуку найкоротшого шляху в графі, який дозволяє знайти оптимальний маршрут між двома вершинами зваженого графа. Дуже багато застосувань цієї проблематики також у графових структурах:

– в соціальних мережах. Наприклад, у сервісі LinkedIn алгоритми допомагають знайти найкоротший шлях між користувачами через "соціальні зв'язки" (Cao et al., 2011);

– у комунікаційних мережах, зокрема у маршрутизації та моніторингу мережевого трафіку (Chen et al., 2009);

– для оптимізації військово-медичного планування (Benhassine et al., 2024);

– для планування роботи дронів (Ham, 2020).

Алгоритм Дейкстри потребує перерахунку за алгоритмом повторно для динамічної ситуації. Алгоритм Беллмана-Форда не вимагає складних структурних даних, але він може зайняти більше пам’яті через збереження відстаней для всіх вершин і ребер. Більш гнучким за алгоритми Дейкстри та Беллмана-Форда є алгоритм A*, але він чутливий до вибору евристики (Shi et al., 2009). Порівняльний аналіз багатьох методів знаходження оптимального шляху досліджувався у (Бабич та ін., 2023). Симплекс-метод дозволяє включати додаткові фактори, наприклад, ліміт пального або ресурсів, обмеження часу, мінімізацію ризиків, а також підходить до завдань із змінними вагами, коли маршрут може змінюватися через нові загрози або погодні умови. Для військових завдань, де важливо мінімізувати ризики та витрати, треба навчити курсантів використовувати і аналізувати всі вказані методи.

Останнім часом зросло застосування ШІ-алгоритмів у сфері оптимізації та прийняття рішень (Трофименко та ін., 2024):

- Deep Learning (глибоке навчання) використовує нейромережі для аналізу великих обсягів даних і прогнозування оптимальних рішень. Цей метод ефективний, проте потребує значних обсягів даних і має високу обчислювальну складність.
- Reinforcement Learning (навчання з підкріпленням, RL) застосовується для ухвалення оптимальних рішень у динамічному середовищі, ґрунтуючись на системі винагород. Вимагає тривалого навчання та значних обчислювальних ресурсів.
- IoT-аналітика (Інтернет речей + ШІ) забезпечує збір і обробку даних у реальному часі з датчиків військової техніки та складів. Вона підвищує ефективність логістики, однак є вразливою до кібератак і залежить від стабільності зв’язку.

Застосування цих підходів у військовій логістиці відкриває нові можливості, проте потребує ретельного врахування ресурсів і ризиків.

Мета статті. Метою статті є аналіз методів навчання та використання інструментів оптимізації у військовій логістиці. Автори викладають дисципліни, що включають елементи оптимізації та комп’ютерного моделювання, для бакалаврів і магістрів Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба. Основу цих курсів становить теорія оптимізації, яка дозволяє розробляти алгоритми ефективного розподілу ресурсів, планування військових логістичних операцій і мінімізації ризиків. У межах дослідження пропонується розглянути особливості використання MS Excel і Wolfram Mathematica як навчальних середовищ для вирішення логістичних задач військового спрямування.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Введемо основні теоретичні поняття (Нікольський та ін., 2007). Графом називають пару G=(V,U), де V – непорожня скінченна множина елементів, які називають вершинами, а U – множина невпорядкованих пар різних елементів із V, які називаються ребрами. Граф називають орієнтованим, якщо U – множина впорядкованих пар елементів V. Зваженим називають граф, кожному ребру якого приписане дійсне число, яке називають вагою ребра. Вага ребра може визначати відстань, час або інший критерій оцінки переходу між вершинами.

Розглянута класична задача теорії графів – задача знаходження найкоротшого шляху. Ця задача є однією з фундаментальних проблем у методах оптимізації та теорії графів. Вона формулюється як задача визначення шляху між двома заданими вершинами графа таким чином, щоб сума ваг ребер цього шляху була мінімальна.

Військовий підрозділ має переміститися від точки V_1 до точки V_n. Територія представлена у вигляді графа: вершини V_2 , V_3, …, V_{n-1} – це стратегічні об’єкти, а ребра – дороги між ними. Кожна дорога має вагу (у нашому випадку відстань у кілометрах). Деякі дороги можуть бути небезпечними (V_i – V_{i+1}, i = 1, …, k). Знайти найкоротший і найменш небезпечний шлях.

Треба уникати маршрутів з високими ризиками, навіть якщо вони коротші. Вага ребер для небезпечних зон (Zhang et al., 2022) дорівнює:

$$B = a\,(w_s s + w_t t + w_d d),$$

де a – довжина шляху; s – витрати ресурсів на одиницю відстані; t – час, що витрачається на одиницю відстані; d – рівень небезпеки на одиницю відстані; w_s, w_t, w_d – вагові коефіцієнти, $w_s + w_t + w_d = 1$.

Для аналізу статичних ситуацій використовується надбудова "Розв’язувач" (Solver) у середовищі MS Excel, яка дозволяє знайти найкоротший маршрут на основі матриці вагових коефіцієнтів. Проте цей підхід має суттєві обмеження при моделюванні динамічних сценаріїв, оскільки не дозволяє швидко змінювати умови задачі (Loucks, 2022). Натомість для розв’язання задач із високою динамікою було застосовано Wolfram Mathematica, яка володіє широким спектром вбудованих функцій оптимізації та алгоритмів пошуку найкоротших шляхів у графах (наприклад, алгоритм Дейкстри (Dijkstra, 1959) та алгоритм Беллмана-Форда (Bellman, 1958; Ford, 1962)). Це дозволяє проводити швидкі обчислення навіть у складних умовах і з урахуванням багатьох змінних факторів. Wolfram Mathematica забезпечує не тільки високу швидкість виконання алгоритмів, а й можливість візуалізації маршрутів та оперативної адаптації до змін у реальному часі, що є критично важливим для військової логістики.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для розв’язання задачі використано два підходи:

1. MS Excel (“Розв’язувач”).
   – Підходить для статичних випадків, коли всі параметри відомі заздалегідь.
   – Використовує метод лінійного програмування та алгоритм гілок і меж.
   – Дає змогу знайти найкоротший шлях у простих умовах.
2. Wolfram Mathematica.
   – Дозволяє працювати з динамічними змінами в реальному часі.
   – Використовує потужні алгоритми теорії графів FindShortestPath, Graph тощо.
   – Здатна швидко обробляти великі графи та враховувати обмеження на певні ділянки маршруту.
   – Може бути інтегрована з GIS-системами для аналізу реальних карт місцевості (Levin & Kanza, 2014).

Розглянемо приклад моделювання та аналіз задачі про найкоротший шлях. Електронні таблиці MS Excel найпростіше використовувати для аналізу табличних даних, проведення розрахунків та побудови діаграм. Розглянемо перший підхід розв’язання задачі за допомогою інструментів оптимізації “Розв’язувач”. Для цього створимо таблицю, в якій запишемо дані задачі (рис. 1).

Рахуємо суму елементів у рядках та у стовпцях. Ці суми будуть використані для визначення обмежень на єдиність шляху. У комірці J15 вказуємо =SUM(B15:I15) (сума елементів у рядку) і протягуємо на весь стовпчик. У комірці B23 вказуємо =SUM(B15:B22) (сума елементів у стовпці) і протягуємо на весь рядок. У комірці цільової функції $K$16 вказуємо суму добутків значень таблиці відстаней на бінарні значення змінних =SUMPRODUCT(B3:I10;B15:I22). Значення змінної, що дорівнює нулю, вказує на відсутність шляху, а рівність одиниці – шлях існує.

На вкладці “Дані” запускаємо “Розв’язувач” і у діалоговому вікні вводимо параметри (рис. 2). Оптимізувати цільову функцію у $K$16 на мінімум. Змінювати комірки вказаних змінних $B$15:$I$22.

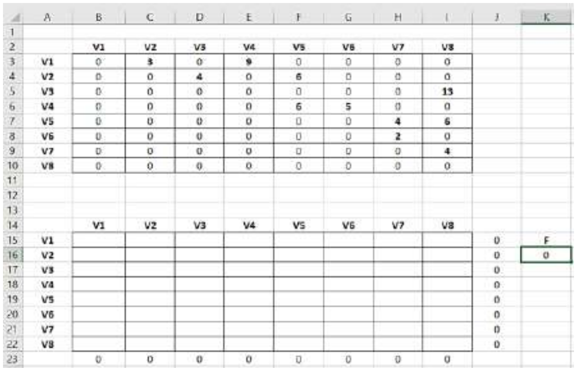


Рис. 1. Приклад таблиці відстаней та комірок змінних у MS Excel

Джерело: авторська розробка.

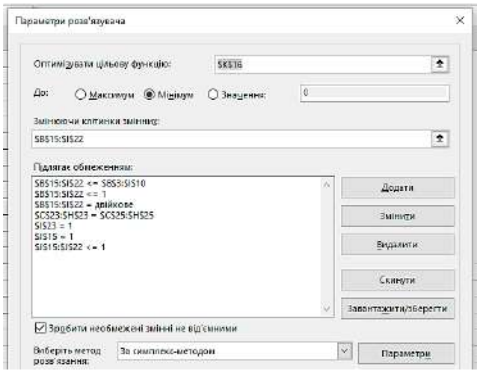


Рис. 2. Введені параметри “Розв’язувача” у MS Excel

Джерело: авторська розробка.

Проаналізуємо можливі обмеження симплекс-методу. Шлях повинен починатися з вершини V_1 і приходити у вершину V_8. Якщо у таблиці відстаней відсутній шлях між двома сусідніми вершинами, то і у таблиці змінних відповідна змінна дорівнює нулю. Переходимо між вершинами послідовно – до якої прийшли, з такої і виходимо.

– Обмеження $J$15 = 1 означає, що починаємо з вершини V1.

– Обмеження $I$23 = 1 означає, що прийдемо у вершину V8.

– Обмеження $B$15:$I$22 = бінарне вказує, що значення змінних 0 або 1.

– Обмеження $B$15:$I$22 <= 1 та $J$15:$J$22 <= 1 вказують, що у колонках сум змінних за рядками та за стовпцями найбільше значення 1, тобто обирається єдиний шлях.

– Обмеження-нерівність $B$15:$I$22 <= $B$3:$I$10 вказує на те, що там, де стоять нулі у таблиці відстаней, відповідного шляху немає, у розв'язку буде 0.

– Обмеження $C$23:$H$23 = $C$25:$H$25 означають, що протягом всього шляху, в яку вершину прийшли, з такої і виходимо.

Отримали розв'язок за допомогою симплекс-методу, усі обмеження й умови оптимальності виконані. З вершини V_1 треба переміститися у вершину V_2, з вершини V_2 у вершину V_5, з вершини V_5 у вершину V_8. Найкоротший шлях дорівнює 15 км. Якщо вершини будуть знаходитися в різних компонентах зв'язності в неорієнтованому графі, або якщо між ними немає жодного маршруту в орієнтованому графі, розв'язку не існує, тоді програма видасть цей результат також.

При використанні другого підходу, а саме, інструментів Wolfram Mathematica (Wolfram, 2003), створюємо орієнтований зважений граф та матрицю суміжності (рис. 3)

```
vertices = Range[8];
           |діапазон
graph = Graph[vertices,
        |граф
   {1 → 2, 1 → 4, 2 → 3, 2 → 5, 3 → 8, 4 → 5, 4 → 6,
    5 → 7, 5 → 8, 6 → 7, 7 → 8},
   EdgeWeight → {3, 9, 4, 6, 13, 6, 5, 4, 6, 2, 4},
   |вага ребра
   EdgeLabels → "EdgeWeight",
   |позначки для ребер
   VertexLabels → "Name"];
   |мітки для вершин

weightedAdjMatrix = WeightedAdjacencyMatrix[graph];
                    |матриця ваг графа
MatrixForm[weightedAdjMatrix]
|матрична форма
```

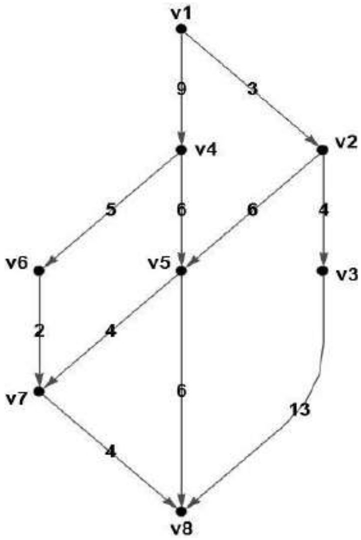


Рис. 3. Представлення території за допомогою графа у Wolfram Mathematica

Джерело: авторська розробка.

Для складних оптимізаційних задач можна розв'язувати задачу симплекс-методом з обмеженнями, які будуються аналогічно MS Excel (рис. 4):

```
solution = NMinimize[{objective, Join[flowConstraints, binaryConstraints]}, variables,
           |чисельна мінімізація   |з'єднати
  Method → "SimulatedAnnealing"]
```

Рис. 4. Розрахунок оптимального значення у Wolfram Mathematica

Джерело: авторська розробка.

Наприклад, обмеження для того, щоб шлях починався з вершини, до якої прийшов, має вигляд (рис. 5):

```
flowConstraints = Table[Which[i == 1, Total[variables[[Flatten[Position[edges, _DirectedEdge?(#[[1]] == i &)]]]]] == 1, i == 8,
                  |табл⋯ |умовний опе⋯ |підсумовувати |сплюст⋯ |позиція за зразком |орієнтоване ребро графа
    Total[variables[[Flatten[Position[edges, _DirectedEdge?(#[[2]] == i &)]]]]] == 1, True,
    |підсумовувати  |сплюст⋯ |позиція за зразком |орієнтоване ребро графа   |істина
    Total[variables[[Flatten[Position[edges, _DirectedEdge?(#[[1]] == i &)]]]]] ==
    |підсумовувати  |сплюст⋯ |позиція за зразком |орієнтоване ребро графа
     Total[variables[[Flatten[Position[edges, _DirectedEdge?(#[[2]] == i &)]]]]]], {i, vertices}];
     |підсумовувати  |сплюст⋯ |позиція за зразком |орієнтоване ребро графа
```

Рис. 5. Обмеження потоку для кожної вершини

Джерело: авторська розробка.

Але у Wolfram Mathematica існує багато корисних функцій для задач, пов'язаних з задачею про найкоротший шлях (рис. 6.)

```
Shortest Path (FindPath): {1, 2, 5, 8}
Shortest Path Edges: {1 ↔ 2, 2 ↔ 5, 5 ↔ 8}
Shortest Path Weight: 15
```

Рис. 6. Застосування функцій у Wolfram Mathematica

Джерело: авторська розробка.

Наприклад, для розв'язання задачі оптимізації маршруту евакуації поранених з реальними картами місцевості, використовуються функції:

1. Визначення графа:

```
g = Graph[{"A" → "B", "A" → "C", "B" → "D", "C" → "D", "D" → "E", "E" → "B"}, EdgeWeight → {10, 20, 30, 10, 15, 25},
  граф                                                                          вага ребра
  VertexLabels → "Name", EdgeLabels → "EdgeWeight"];
  мітки для вершин       позначки для ребер
```

2. З можливістю завантаження географічних даних:

```
geoData = GeoGraphics[{GeoMarker[GeoPosition[{50.45, 30.52}]], (*Київ*) GeoMarker[GeoPosition[{49.84, 24.03}], "Hospital"]
          гео-графіка  гео-маркер гео-координати                        гео-маркер гео-координати
  (*Львів*)}, GeoRange → Entity["Country", "Ukraine"], GeoBackground → None (*Вимикаємо фон для стабільності*)]
```

3. Відображення карти з маршрутом:

```
GeoGraphics[{GeoPath[{GeoPosition[{50.45, 30.52}], GeoPosition[{49.84, 24.03}]}],
гео-графіка  гео-крива гео-координати              гео-координати
  GeoMarker[GeoPosition[{50.45, 30.52}], "Київ"], GeoMarker[GeoPosition[{49.84, 24.03}], "Львів"]}, GeoBackground → None]
```

4. FindShortestPath[g,"A","B",Method->"Dijkstra"], що знаходить найкоротший шлях між двома вершинами графа.
5. Візуалізації графа:

```
HighlightGraph[g, PathGraph[{"A", "B", "D", "E", "B"}]]
граф з виокремленн···  граф маршруту
```

Також оптимізація маршруту прораховується з урахуванням небезпеки

weights={10+10*0.2,20+20*0.4,30+30*0.3,10+10*0.1,15+15*0.5,25+25*0.2}.

Запропоновані підходи були апробовані в навчальному процесі підготовки курсантів Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба. Вони дозволяють курсантам засвоїти основи теорії графів, методів оптимізації та принципів військової логістики. Використання Wolfram Mathematica продемонструвало значні переваги у швидкості та точності обчислень порівняно з MS Excel, особливо у випадках динамічних змін маршруту. Зокрема, Wolfram Mathematica показала на 40% більшу швидкість розрахунків та точність в умовах змінних сценаріїв порівняно з MS Excel. Додатково, для підтвердження переваг можна навести порівняльні таблиці швидкодії та точності обчислень (Kanza et al., 2010).

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Використання MS Excel для розв'язання задач пошуку найкоротшого маршруту обмежене статичними сценаріями та не забезпечує необхідної гнучкості для оперативного реагування на зміну бойової обстановки, але є простим у використанні, особливо для користувачів без досвіду програмування. Його інструменти, такі як таблиці та вбудовані функції, дозволяють проводити аналіз без складних обчислень.

Wolfram Mathematica у дослідженні було обрано як основний інструмент оптимізації маршрутів у військовій логістиці. Основні причини цього вибору включають:

1. Швидкість обчислень: Wolfram Mathematica дозволяє здійснювати обчислення з високою швидкістю, що є критичним у бойових умовах, де оперативність прийняття рішень має вирішальне значення.

2. Гнучкість у роботі з графами: Інструмент пропонує потужні алгоритми для роботи з графами, такі як FindShortestPath, GraphDistance, та FindShortestPathGraph, які забезпечують ефективний пошук оптимальних маршрутів у складних умовах.

3. Адаптація до змінних умов: Wolfram Mathematica дозволяє динамічно змінювати умови задачі і швидко адаптуватися до змін у тактичній обстановці, що є неможливим з використанням MS Excel.

4. Візуалізація та інтеграція з GIS: Інструмент забезпечує можливість візуалізації маршрутів та інтеграцію з GIS-системами для аналізу реальних карт місцевості, що дозволяє враховувати географічні особливості під час планування військових операцій.

5. Ефективність алгоритмів: Порівняльні тестування показали, що Wolfram Mathematica на 40% швидше здійснює розрахунки та забезпечує вищу точність у порівнянні з MS Excel. Зокрема, результати тестів демонструють значну перевагу у виконанні алгоритмів пошуку найкоротшого шляху та адаптації до реальних сценаріїв бойових дій (Kanza et al., 2010).

6. Можливість розширення: Wolfram Mathematica має багатий набір функцій для додаткового аналізу та оптимізації, таких як GeoDistance, GeoGraphics, GeoElevationData, та RandomGraph, що дозволяє проводити комплексний аналіз та моделювання різноманітних військових сценаріїв.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабич, В., Костенко, А., Плеша, В., Плеша, М., & Хмілярчук, Л. (2023). Задача пошуку найкоротшого шляху: порівняльний аналіз основних алгоритмів. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 2, 99-106, https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-12.
2. Нікольський, Ю. В., Пасічник, В. В., & Щербина, Ю. М. (2007). *Дискретна математика*. К.: Видавнича група BHV.
3. Трофименко, О. Г., Соколов, А. В., Логінова, Н. І., Ахмаметьєва, Г. В., & Чикунов, П. О. (2024). Штучний інтелект у сфері військової логістики. *Системні технології*, *5*(154), 164-171. https://doi.org/10.34185/1562-9945-5-154-2024-17.
4. Bellman, R. (1958). On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, *16*(1), 87-90.
5. Benhassine, M., Quinn, J., Stewart, D., Arsov, A. A., Ianc, D., Ivan, M., & Van Utterbeeck, F. (2024). Advancing military medical planning in large scale combat operations: Insights from computer simulation and experimentation in NATO's vigorous warrior exercise 2024. *Military Medicine*, *189*, 456-464. https://doi.org/10.1093/milmed/usae152 (https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85201741962&doi=10.1093%2fmilmed%2fusae152&partnerID=40&md5=0d5391c3d9ae82b8a776d546f647ef02)

6. Cao, L., Zhao, X., Zheng, H., & Zhao, B. (2011). Approximating shortest path in social graph. *UC Santa Barbara: Computer Science Department*.
7. Chen, K., Makki, K., & Pissinou, N. (2009). A real-time wireless route guidance system for urban traffic management and its performance evaluation. *In 2009 IEEE 70th Vehicular Technology Conference Fall* (pp. 1-5). http://dx.doi.org/10.1109/VETECF.2009.5378786
8. Díaz-Madroñero, M., Peidro, D., & Mula, J. (2015). A review of tactical optimization models for integrated production and transport routing planning decisions. *Computers and Industrial Engineering*, 88, 518-535. https://doi.org/10.1016/j.cie.2015.06.010.
9. Dijkstra, E.W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. Numerische Mathematik, 1, 269-271.
10. Ford, L. R., Jr., & Fulkerson, D. R. (1962). Flows in networks. Princeton University Press.
11. Ham, A. (2020). Drone-based material transfer system in a robotic mobile fulfillment center. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, *17*(2), 957-965. https://doi.org/10.1109/TASE.2019.2952523.
12. Kanza, Y., Levin, R., Sagiv, Y., & Safra, E. (2010). Interactive route search in the presence of order constraints. *Proceedings of the VLDB Endowment, 3*(1), 117-128. https://doi.org/10.14778/1920841.1920861.
13. Levin, R., & Kanza, Y. (2014). TARS: *Traffic-aware route search. GeoInformatica*, *18*(3), 461-500. https://doi.org/10.1007/s10707-013-0185-z.
14. Loucks, D.P. (2022). Solving Models Using Excel. *International Series in Operations Research and Management Science* (Vol. 318, pp. 65-74). https://doi.org/10.1007/978-3-030-93986-1_6.
15. Sharifzadeh, M., Kolahdouzan, M., Shahabi, C. (2008). The optimal sequenced route query. *VLDB Journal*, *17*(4), 765-787. https://doi.org/10.1007/s00778-006-0038-6.
16. Shi, H., Cao, W., Zhu, S., & Zhu, B. (2009). Applications of the improved A* algorithm for route planning. In *2009 2nd International Conference on Intelligent Computing Technology and Automation,* 1, 299-302). http://dx.doi.org/10.1109/ICICTA.2009.79.
17. Wolfram, S. (2003). *The Mathematica book (5th ed.).* Champaign: Wolfram Media.
18. Zhang, L., Wang, N., & Zhang, C. (2022). Research on optimization of logistics supply path selection based on genetic algorithm. *Highlights in Science, Engineering and Technology, 1*, 188-192. https://doi.org/10.54097/hset.v1i.460.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Babych, V., Kostenko, A., Plesha, V., Plesha, M., & Khmiliarchuk, L. (2023). Zadacha poshuku naikorotshoho shliakhu: porivnialnyi analiz osnovnykh alhorytmiv. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security, 2*, 99-106. https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-12 (in Ukrainian).
2. Nikolskyi, Yu. V., Pasichnyk, V. V., & Shcherbyna, Yu. M. (2007). Dyskretna matematyka. K.: Vydavnycha hrupa BHV. (in Ukrainian).
3. Trofymenko, O. H., Sokolov, A. V., Loginova, N. I., Akhmametiieva, H. V., & Chikunov, P. O. (2024). Artificial Intelligence in Military Logistics. *System Technologies, 5*(154), 164-171. https://doi.org/10.34185/1562-9945-5-154-2024-17.
4. Bellman, R. (1958). On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, *16*(1), 87-90.
5. Benhassine, M., Quinn, J., Stewart, D., Arsov, A. A., Ianc, D., Ivan, M., & Van Utterbeeck, F. (2024). Advancing military medical planning in large scale combat operations: Insights from computer simulation and experimentation in NATO's vigorous warrior exercise 2024. *Military Medicine, 189*, 456-464. https://doi.org/10.1093/milmed/usae152.
6. Cao, L., Zhao, X., Zheng, H., & Zhao, B. (2011). Approximating shortest path in social graph. *UC Santa Barbara: Computer Science Department*.
7. Chen, K., Makki, K., & Pissinou, N. (2009). A real-time wireless route guidance system for urban traffic management and its performance evaluation. *In 2009 IEEE 70th Vehicular Technology Conference Fall* (pp. 1-5). http://dx.doi.org/10.1109/VETECF.2009.5378786
8. Díaz-Madroñero, M., Peidro, D., & Mula, J. (2015). A review of tactical optimization models for integrated production and transport routing planning decisions. *Computers and Industrial Engineering*, 88, 518 - 535. https://doi.org/10.1016/j.cie.2015.06.010.
9. Dijkstra, E.W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. Numerische Mathematik, 1, 269-271.
10. Ford, L. R., Jr., & Fulkerson, D. R. (1962). Flows in networks. Princeton University Press.
11. Ham, A. (2020). Drone-based material transfer system in a robotic mobile fulfillment center. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, *17*(2), 957-965. https://doi.org/10.1109/TASE.2019.2952523.
12. Kanza, Y., Levin, R., Sagiv, Y., & Safra, E. (2010). Interactive route search in the presence of order constraints. *Proceedings of the VLDB Endowment, 3*(1), 117-128. https://doi.org/10.14778/1920841.1920861.
13. Levin, R., & Kanza, Y. (2014). TARS: *Traffic-aware route search. GeoInformatica*, *18*(3), 461-500. https://doi.org/10.1007/s10707-013-0185-z.
14. Loucks, D.P. (2022). Solving Models Using Excel. *International Series in Operations Research and Management Science* (Vol. 318, pp. 65-74). https://doi.org/10.1007/978-3-030-93986-1_6.
15. Sharifzadeh, M., Kolahdouzan, M., Shahabi, C. (2008). The optimal sequenced route query. *VLDB Journal*, *17*(4), 765-787. https://doi.org/10.1007/s00778-006-0038-6.
16. Shi, H., Cao, W., Zhu, S., & Zhu, B. (2009). Applications of the improved A* algorithm for route planning. In *2009 2nd International Conference on Intelligent Computing Technology and Automation,* 1, 299-302). http://dx.doi.org/10.1109/ICICTA.2009.79.
17. Wolfram, S. (2003). *The Mathematica book (5th ed.).* Champaign: Wolfram Media.
18. Zhang, L., Wang, N., & Zhang, C. (2022). Research on optimization of logistics supply path selection based on genetic algorithm. *Highlights in Science, Engineering and Technology, 1*, 188-192. https://doi.org/10.54097/hset.v1i.460.

| *Матеріал надійшов до редакції: 07.02.2025 р.* | *Прийнято до друку: 24.03.2025 р.* | *Опубліковано: 29.04.2025 р.* |

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2025, 40(2), https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-09
УДК: 373.5.091.3:512.23

ПРО ЄДИНИЙ ПІДХІД ДО ВИВЧЕННЯ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ ТОТОЖНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ АЛГЕБРАЇЧНИХ ВИРАЗІВ

Василь ШВЕЦЬ ✉
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна
v.o.shvets@udu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-2084-1336

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *У статті розкривається авторський методичний підхід до вивчення алгебраїчних виразів в курсі алгебри і початків аналізу в старшій профільній школі. Оскільки за цим підходом рекомендується вивчати ірраціональні, тригонометричні, показникові та логарифмічні вирази, то він названий єдиним узагальненим.*

Матеріали і методи. *За таким підходом вивчення кожного з видів алгебраїчних виразів рекомендується здійснювати в чотири етапи: підготовчий, базовий, практичний і прикладний. Кожний з етапів природньо узгоджується з елементами дидактичного циклу, який розглядається як укрупнена одиниця навчального процесу для вивчення певної навчальної теми курсу алгебри і початків аналізу. На підготовчому етапі має акцентуватись увага на практичних потребах, що спонукають розглядати вказані вирази, повідомляються історичні відомості про розв'язання проблемних питань зусиллями математиків різних часів, зміст і визначення розглядуваного виразу тощо. На базовому – вивчаються основні тотожні рівності, на практичному – формуються вміння і навички виконання перетворень виразів, а на прикладному – демонструється застосування отриманих знань вмінь і навичок під час розв'язування прикладних задач, де ці вирази використовуються в якості математичних моделей.*

Результати. *Зміст єдиного узагальненого підходу чітко проілюстровано автором в статті на прикладі вивчення теми «Тригонометричні вирази і їх перетворення» (21 год). Зрозуміло, що змістове наповнення кожного з етапів залежить від виду виразів, які вивчатимуться, але методичні схема (правило-орієнтир) – однаковий.*

Висновки. *Як показала апробація названого підходу його практичне використання є менш затратним в часі в порівнянні з традиційними підходами: він ефективний, модерний, більш інформативний, реалізує прикладну спрямованість навчання математики і заслуговує на увагу та використання під час навчання алгебри і початків аналізу в старшій профільній школі.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *алгебра і початки аналізу; алгебраїчний вираз; тригонометричні вирази і їх перетворення; єдиний узагальнений методичний підхід до вивчення.*

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Швець В. Про єдиний підхід до вивчення в курсі алгебри і початків аналізу тотожних перетворень алгебраїчних виразів. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 63-71. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-09.

ON THE UNIFORM APPROACH TO THE ALGEBRAIC EXPRESSIONS IDENTICAL TRANSFORMATIONS STUDY IN THE COURSE OF ALGEBRA AND THE BEGINNINGS OF ANALYSIS

Vasyl SHVETS ✉
Ukrainian State University named after Mykhailo Drahomanov, Ukraine
v.o.shvets@udu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-2084-1336

ABSTRACT

Formulation of the problem. *The article reveals the author's methodical approach to the study of algebraic expressions in the course of algebra and the beginnings of analysis in a senior professional school. Since this approach is recommended for studying irrational, trigonometric, exponential, and logarithmic expressions, it is called the only generalized one.*

Materials and methods. *According to this approach, it is recommended to study each type of algebraic expression in four stages: preparatory, basic, practical, and applied. Each of the stages is naturally consistent with the elements of the didactic cycle, which is considered as a consolidated unit of the educational process for the study of a specific educational topic of the algebra course and the beginnings of analysis. At the preparatory stage, attention should be focused on practical needs that prompt consideration of the specified expressions, historical information about the solution of problematic issues by the efforts of mathematicians of different times, the meaning and definition of the expression under consideration, etc., should be reported. At the basic level, the basic identical equalities are studied, at the practical level, the skills and abilities to perform transformations of expressions are formed, and at the applied level, the application of the acquired knowledge, skills and abilities is demonstrated when solving applied problems, where these expressions are used as mathematical models.*

Results. *The content of the unified generalized approach is clearly illustrated by the author in the article on the example of studying the topic "Trigonometric expressions and their transformations" (21 hours). It is clear that the content of each of the stages depends on the type of expressions to be studied, but the methodical scheme (guideline rule) is the same.*

Conclusions. *As the approbation of the mentioned approach showed, its practical use is less time-consuming compared to traditional approaches: it is effective, modern, more informative, implements the applied orientation of mathematics education, and deserves attention and use during the teaching of algebra and the beginnings of analysis in high school.*

KEYWORDS: *algebra and the beginnings of analysis; algebraic expression; trigonometric expressions and their transformations; a single generalized methodical approach to study.*

FOR CITATION: Shvets, V. (2025). On the uniform approach to the algebraic expressions identical transformations study in the course of algebra and the beginnings of analysis. *Physical and Mathematical Education*, *40*(2), 63-71. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-09.

ВСТУП

Однією із змістових ліній шкільного курсу математики є лінія «Вирази і їх перетворення». Вона розпочинається з 7 класу і продовжується аж до випускного класу середнього закладу освіти. В курсі алгебри основної школи учні вивчають одночлени, многочлени, дробово-раціональні вирази, вчаться їх спрощувати, доводити тотожну рівність, обчислювати числові значення для заданих значень змінних. У курсі алгебри і початків аналізу вивчення виразів і їх перетворень продовжується. Зокрема, вивчаються ірраціональні, тригонометричні, показникові і логарифмічні та інші вирази. Для їх вивчення можна використовувати методику вивчення кожного з них окремо яка включала б: як формувати поняття саме такого виразу; як вивчати основні тотожні рівності; як формувати в учнів вміння спрощувати вирази та доводити їх тотожну рівність; як вчити обчислювати значення, застосовувати перетворення таких виразів до розв'язування рівнянь і нерівностей тощо. Такий роздільний підхід, на наш погляд, є затратним, оскільки вимагає значного часового ресурсу на вивчення. А чи не можна запропонувати інший, менш затратний підхід, який був би більш науково інформаційним, сучасним і, що важливо, ефективнішим? Саме про такий підхід і йде мова в даній статті. Ми назвали його *єдиним (узагальненим) підходом до вивчення всіх алгебраїчних виразів* в курсі алгебри і початків аналізів. Щоб розкрити зміст такого підходу нагадаємо спочатку визначення поняття *алгебраїчного виразу* в шкільному курсі математики, яке було запропоноване нами в статті (Литвиненко та ін., 1999).

Нехай розглядається непорожня числова множина A, множина латинських букв $X = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ – якими позначені змінні величини та множина арифметичних операцій $Q = \{+, -, \times, :\}$.

Означення. Алгебраїчний вираз – це запис, складений із скінченного числа чисел, букв, поєднаних знаками арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення).

Зауважимо, що учням базової школи таке поняття та означення мають бути відомими, відомим є і те що його обсяг включає числові вирази, одночлени, многочлени, дробові вирази, дробово-раціональні вирази. Суть запропонованого нами підходу розкриємо на прикладі вивчення тригонометричних виразів і їх перетворень.

Мета статті: розкрити суть єдиного (узагальненого) методичного підходу до вивчення виразів і їх перетворень в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи, запропонувати цей підхід вчителям математики, фахівцям з теорії та методики навчання математики.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретичні – аналіз, синтез, порівняння, узагальнення теоретичного матеріалу, викладеного в навчальних та наукових джерелах. Емпіричні – опитування вчителів, математиків-методистів, вивчення діючих програм з математики, альтернативних підручників.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Тема: «Тригонометричні вирази і їх перетворення».

1. *Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів. Орієнтовне планування навчального процесу.*

Тригонометричні функції, як предмет вивчення в курсі Алгебри і початків аналізу, нині вивчаються в 10 класі старшої профільної школи. Зміст навчального матеріалу про такі функції в програмі викладений в двох навчальних темах: «Тригонометричні функції» (30 год) та «Тригонометричні рівняння і нерівності» (35 год).

Успішне вивчення обох тем, на наш погляд, можливе за умови, коли: відбудеться розділення, навчального матеріалу на окремі, логічно завершені підтеми; чітко визначена основна мета вивчення кожної підтеми та навчальні досягнення учнів; буде створене орієнтовне календарне планування навального процесу.

Тому рекомендуємо наступний розподіл вивчення тригонометричного матеріалу.

Підтема 3.1 Тригонометричні вирази та їх перетворення (21 год).

Підтема 3.2 Тригонометричні функції, їх властивості і графіки (17 год).

Підтема 3.3 Тригонометричні рівняння і нерівності (29 год).

Зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів, основна мета вивчення та календарне планування вивчення підтеми «Тригонометричні вирази та їх перетворення» подано нижче (див. таблиці 1, 2).

Таблиця 1. Підтема 3.1. «Тригонометричні вирази і їх перетворення» (21 год.)

Зміст навчального матеріалу	*Навчальні досягнення учнів*
Числова міра кута. Кут повороту і його міра. Синус, косинус, тангенс і котангенс числа – як тригонометричні числа. Поняття про тригонометричний вираз. Основні тригонометричні тотожності: - співвідношення між тригонометричними числами однієї і тієї змінної, - тригонометричні формули: додавання, зведення, половинної та подвійної змінної, - формули перетворення суми і різниці тригонометричних чисел в добуток, - перетворення добутку тригонометричних чисел у суму. Дії з тригонометричними виразами: спрощення, доведення тотожної рівності, обчислення значень.	*Виконує* перехід від градусної міри кута до числової і навпаки. *Формулює* визначення синуса, косинуса, тангенса числа та вміє ілюструвати їх на одиничному тригонометричному колі. *Має поняття* про тригонометричний вираз, тотожну рівність двох тригонометричних виразів. *Вміє користуватися* таблицею тригонометричних формул під час виконання дій з тригонометричними виразами. *Вміє виконувати* дії над тригонометричними виразами під час розв'язування практичних вправ та прикладних задач.

Джерело: авторська розробка.

Основна мета вивчення: *сформувати в учнів поняття тригонометричного (алгебраїчного) виразу, встановити основні тригонометричні тотожності і навчити застосовувати їх до виконання дій: спрощення; доведення тотожної рівності; обчислення значень.*

Таблиця 2. Орієнтовне календарне планування вивчення підтеми 3.1. «Тригонометричні вирази і їх перетворення»

№	Теми занять, види письмових робіт	К-ть год	Дата проведення
1	Радіанна міра кута. Кут повороту, числова міра кута повороту. Синус, косинус, тангенс, котангенс, як тригонометричні числа. Тригонометричні вирази	2	
2	Основні співвідношення між тригонометричними числами, знаки тригонометричних чисел СР-1	3	
3	Формули суми тригонометричних чисел. Формули зведення, подвійного і половинного аргументу значення змінної СР-2	4	
4	Формули перетворення суми тригонометричних чисел в добуток СР-3	3	
5	Формули перетворення добутку тригонометричних чисел в суму СР-4	3	
6	Дії над тригонометричними виразами: спрощення, доведення тотожної рівності, обчислення значень СР-5	3	
7	Тригонометричні вирази як математичні моделі розв'язування прикладних задач	2	
8	Контрольна робота	1	
	Всього:	21	

Джерело: авторська розробка.

Перші заняття з підтеми «Тригонометричні вирази та їх перетворення» рекомендуємо провести у формі шкільної лекції, на якому розкрити суть поняття тригонометричного числа як числової характеристики кута, розповісти про числову міру кута та кута повороту, сформувати поняття тригонометричного виразу.

2. *Шкільна лекція на тему «Числова міра кута. Тригонометричні числа».*

Термін «тригонометрія» походить *від грецьких слів τρίγονο — трикутник* та *μετρειν — вимірюю*, в прямому розумінні означає «вимірювання трикутника». Його вжив вперше у 1595 р. німецький математик *Варфаламей Пітіск* (1561-1613 рр.). Вимірюванням трикутників займались активно ще древні математики, коли вели астрономічні спостереження чи вимірювання на місцевості. Тому можна стверджувати, що тригонометрія, як математична наука, була довгий час частиною астрономії та географії. Згодом, вона виокремилася в самостійну галузь математики, а в шкільному курсі математики була довгий час навіть окремим навчальним предметом. З розвитком науки і техніки, зокрема, обчислювальної техніки, потреба в такому окремому предметі в шкільній освіті відпала.

На сьогодні тригонометричні знання представлені в шкільному курсі математики у вигляді окремих тем: *у геометрії* – «Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника» (8 кл); *у курсі алгебри і початків аналізу* – «Тригонометричні функції» та «Тригонометричні рівняння і нерівності» (10 кл).

З історії математики ми дізнаємось, що градусну міру кута запропонували *древні вавилоняни*. Спостерігаючи за рухом сонця на небесній сфері, вони помітили, що диск Сонця (рис. 1) на траєкторії руху зі Сходу і до Заходу вміщається 180 разів. Це природнє явище і було використане вавилонянами для вибору еталону вимірювання кутів. Кут, під яким з поверхні Землі видно диск Сонця прийняли за одиницю вимірювання, а пізніше, вона отримала назву ***градус*** (*від латинського gradus - крок*). Таким чином Сонце на небесній сфері за світловий день робить 180 кроків.

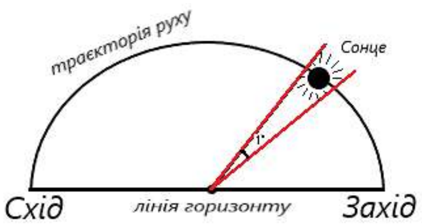


Рис. 1
Джерело: авторська розробка.

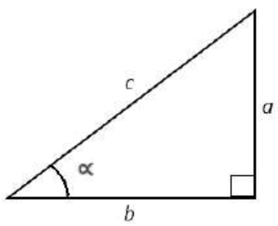


Рис. 2
Джерело: авторська розробка.

Саме тому в геометрії розгорнутий кут дорівнює $180°$. А оскільки у древніх вавилонян використовувалася шістдесяткова система числення, то $\frac{1}{60}$ градуса отримала назву мінута, а $\frac{1}{60}$ мінути – секунда. Отже, $1° = 60'$, $1' = 60''$ (подібні назви збереглися і до нині, для вимірювання часу). Градус застосовують і як одиницю вимірювання дуг кола.

Вивчаючи трикутники, древні математики помітили, що у всіх прямокутних трикутників із заданим гострим кутом $\propto$ (рис. 2) відношення протилежного катета a до гіпотенузи c одне й теж.

Таке відношення (число) $\frac{a}{c}$, характерне для кожного гострого кута $\propto$ прямокутного трикутника, вони й використовували в своїх астрономічних та географічних вимірюваннях та обчисленнях.

Назва *синус* для такого відношення і історія його введення поки що остаточно не встановлені. Відомо, що знак $sin \propto$ ввів швейцарський математик Леонард Ейлер у 1748 році, а древні грецькі математики, для потреб практики, склали *тригонометричні таблиці*. У них містилися довжини хорд, що відповідали центральним кутам кола сталого радіуса.

Фактично це були таблиці синусів, оскільки лінія синусів дорівнює половині хорди. Перші тригонометричні таблиці синусів склав давньогрецький астроном і математик Гіппарх (біля 150 років до нашої ери), він же визначив відстань від Землі до Місяця. Таблиці синусів складали також індійські, середньоазіатські математики. Вони розглядали і інше відношення в прямокутному трикутнику – прилеглого катета до гіпотенузи $\frac{b}{c}$. Таке відношення отримало назву *косинус* кута ∝, а з подання Л. Ейлера отримало знак $cos \propto$ (*від латинського complementi sinus – доповнення до синуса*). Пізніше математики ввели в практику інші тригонометричні числа для гострого кута прямокутного трикутника: *тангенс і котангенс, секанс і косеканс*. Довгий час в шкільному курсі математики використовувалися чотиризначні таблиці В. М. Брадіса. На сьогодні, у зв'язку з появою потужних обчислювальних засобів – калькуляторів, персональних комп'ютерів, потреба в таких таблицях відпала.

Тепер трикутники, і не тільки прямокутні, а й довільні, вчать розв'язувати у школі на уроках геометрії, користуючись теоремами синусів, косинусів та вище названими відношеннями. Будемо надалі, для зручності, для кожного кута ∝ називати його числові характеристики $sin \propto$, $cos \propto$, $tg \propto$, $ctg \propto$ *тригонометричними числами*.

З розвитком науки математика, зокрема, математичного аналізу, інших наук – фізики, механіки, електротехніки – виявилось, що градусна міра кута в багатьох застосуваннях незручна, оскільки доводиться вести обчислення за правилами шістдесяткової системи числення та правилами десяткової системи числення. Ці незручності спонукали математиків до введення числової міри кута (її ще іноді називають *радіанною мірою*).

Якщо розглянути два концентричних кола (рис. 3) з радіусами r_1 та r_2 (ці кола подібні), то в обох відношення довжин дуг A_1B_1 та A_2B_2, на які спирається вписаний кут ∝, до їх радіусів r_1 та r_2 – стале. Тобто $\frac{A_1B_1}{r_1} = \frac{A_2B_2}{r_2}$.

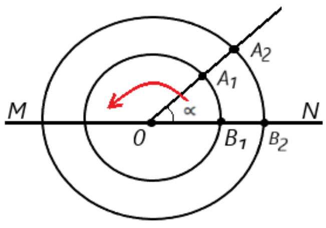


Рис. 3

Джерело: авторська розробка.

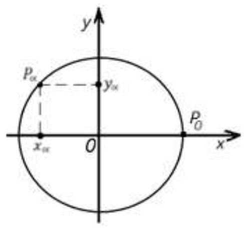


Рис. 4

Джерело: авторська розробка.

Цей факт і став визначальним у виборі нової одиниці вимірювання кутів. За числову одиницю вимірювання кутів вибрали величину кута, який спирається на дугу рівною за довжиною радіусу.

Таку одиницю вимірювання назвали *радіаном* (*від латинського radius - промінь*). Дрібніші одиниці відповідно дорівнюють 0,1; 0,01; 0,001; … радіана. Оскільки розгорнутий кут MON дорівнює $180°$, а довжина півкола дорівнює πr, то розгорнутий кут MON в радіанах буде дорівнювати числу $\propto = \frac{\pi r}{r} = \pi$.

Звідси випливають формули переведення градусної міри кута в радіанну (числову) і навпаки:

а) $180° = \pi$, $1° = \frac{\pi}{180}$ (радіана)$\approx 0{,}017453292 \ldots \approx 0{,}017$ (радіана);

б) $\pi = 180°$, $1\text{рад.} = \left(\frac{180°}{\pi}\right) \approx 57{,}2957795 \ldots \approx 57{,}3° = 57°18'$.

У таблиці 3 приведені градусна і радіанна міри найчастіше вживаних кутів.

Таблиця 3. Градусна і радіанна міри найчастіше вживаних кутів

Кут ∝	Градусна міра	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$
	Числова (радіанна) міра	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

У загальному випадку для довільного кута (як геометричної фігури) його міра в градусах $\propto^°$, а міра в радіанах ∝ визначаються за формулами (1) та (2):

$$\propto^° = \frac{\propto \cdot 180^°}{\pi} \quad (1)$$

$$\propto = \frac{\propto^° \cdot \pi}{180^°} \quad (2)$$

Оскільки міра дуги кола дорівнює мірі центрального кута, що на неї спирається, то й дуги стали вимірювати як в градусах, так і в радіанах. На практиці кути вимірюють транспортиром (градусним або радіанним)

Бурхливий розвиток в XIX ст. техніки, вивчення коливних та обертальних рухів у механіці, призвели до виникнення такого поняття як *кут повороту* та його міри, а з ним і поняття синуса, косинуса кута повороту.

Що ж таке *кут повороту*? З'ясуємо зміст цього поняття. Розглянемо коло і розміщену на ньому зі своїм початком в центрі цього кола прямокутну декартову систему координат XOY (рис. 4). Його називають *тригонометричним колом*.

Рух точки P_0 по колу називають *кутом повороту*. Довжину дуги ∝, яку проходить точка P_0, рухаючись по колу, $P_0P_\propto$ називають *мірою кута поворотку*. Якщо рух відбувається проти годинникової стрілки, то таке число береться зі знаком «+», а якщо за годинниковою стрілкою, то зі знаком «-».

Міра кута повороту таким чином стала виражатися і в градусах, і в радіанах, бути додатною чи від'ємною. Модулі цих чисел можуть бути і як завгодно великі, і як завгодно малі. Точка $P_{\propto}$ в системі координат *XOY* має абсцису $x_{\propto}$ та ординату $y_{\propto}$.

Виходячи з таких тлумачень, стали розглядати синус кута повороту $\propto$ та косинус кута повороту $\propto$ як відношення: $sin \propto = \frac{y_{\propto}}{R}$, $cos \propto = \frac{x_{\propto}}{R}$, де R – радіус кола. Таким поняттям в техніці, механіці, фізиці послуговується і нині.

Математики, які вивчають числові функції та їх властивості, провели узагальнення названих понять. Оскільки кожному дійсному числу $\propto$ можна поставити у відповідність за допомогою тригонометричного кола кут повороту $\propto$, а йому, в свою чергу, відповідно $sin \propto$ та $cos \propto$, то були введені такі поняття як *синус числа* $\propto$ *та косинус числа* $\propto$.

А для того, щоб спростити відношення $sin \propto$ і $cos \propto$, коло стали обирати з радіусом рівним одиниці довжини (*одиничне тригонометричне коло*). Тепер в математиці, зокрема в курсі Алгебри і початків аналізу дотримуються наступних означень.

Означення 1. Синусом числа $\propto$ *називається ордината точки* $P_{\propto}$ *одиничного кола, в яку переходить початкова точка* $P_0(1;0)$ *при повороті навколо центра кола на кут повороту* $\propto$ *рад, і позначається* $sin \propto$.

Означення 2. Косинусом числа $\propto$ *називається абсциса точки* $P_{\propto}$ *одиничного кола, в яку переходить початкова точка* $P_0(1;0)$ *при повороті навколо центра кола на кут повороту* $\propto$ *рад, і позначається* $cos \propto$.

Виходячи з названих означень розглядаються також відношення $\frac{sin\propto}{cos\propto}$ і $\frac{cos\propto}{sin\propto}$.

Їх назвали відповідно тангенсом числа $\propto$ та котангенсом числа $\propto$ і позначають $tg \propto = \frac{sin\propto}{cos\propto}$, $ctg \propto = \frac{cos\propto}{sin\propto}$.

Таким чином, для кожного дійсного числа $\propto \epsilon R$ існують його числові характеристики (тригонометричні числа) $sin \propto$, $cos \propto$, а також якщо $cos \propto \neq 0$ то існує і $tg \propto$, якщо $sin \propto \neq 0$ то існує і $ctg \propto$. Їх можна знайти з певною точністю за допомогою калькулятора. З'ясуємо, де ж відкладаються в одиничному тригонометричному колі названі числа. Відповідь на це запитання подано на рис. 5, 6, 7.

Для $sin \propto$, $cos \propto$

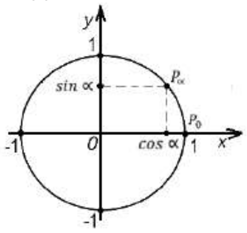


Рис. 5

Джерело: авторська розробка.

Для $tg \propto$

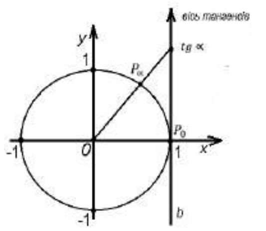


Рис. 6

Джерело: авторська розробка.

Для $ctg \propto$

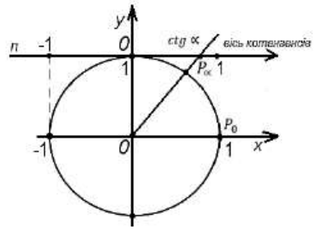


Рис. 7

Джерело: авторська розробка.

Фактично, одиничне коло з вісями OX, OY, b (вісь тангенсів) та n (вісь котангенсів) є ***графічною моделлю***, за якою встановлюється відповідність між множиною дійсних чисел R і тригонометричними числами $sin \propto$, $cos \propto$, $tg \propto$, $ctg \propto$. Саме коло, можна розглядати як кругову числову шкалу з початком в точці P_0, за якою на колі відкладаються додатні та від'ємні дійсні числа.

За допомогою одиничного тригонометричного кола, для окремих часто вживаних кутів була створена таблиця відповідних їм тригонометричних чисел (таблиця 4).

Таблиця 4. Таблиця відповідності

$\propto$	$0(0^0)$	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$\frac{2\pi}{3}$ (120°)	$\frac{3\pi}{4}$ (135°)	$\frac{5\pi}{6}$ (150°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
$sin \propto$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$cos \propto$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$tg \propto$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не існує	0
$ctg \propto$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не існує	0	не існує

** відповідність в таблиці між числами і їх тригонометричними числами обґрунтуйте самостійно.*

Надалі будемо вивчати тригонометричні вирази та їх перетворення. Розглядатимемо множину дійсних чисел R, множину тригонометричних чисел $T = \{sin \propto, cos \propto, tg \propto, ctg \propto\}$, де $\propto \epsilon R$ та множину арифметичних операцій над числами $O = \{+, -, \times, :\}$.

Тригонометричним виразом (*алгебраїчним виразом*) будемо називати запис, складений із скінченної кількості дійсних чисел з множини R, тригонометричних чисел, з множини T, поєднаних знаками арифметичних операцій з множини O.

Наприклад, тригонометричними виразами є записи: а) $2sin \propto + cos \propto$; б) $sin3 \propto - cos \propto$; в) $tg^2 \propto - cos2 \propto$.

Основною метою такого вивчення буде: - *навчитись спрощувати такі вирази; - доводити тотожну рівність виразів; - обчислювати числове значення виразу для заданих значеннях змінних.*

Кінець лекції

3. *Після проведеної лекції*, пропонуємо учням в якості домашнього завдання:

- вивчити зміст лекції; - обґрунтувати значення тригонометричних чисел для кутів, які подані в таблиці 4;

- обґрунтувати введення формул (1) та (2);

- підготувати короткі повідомлення про згаданих на лекції математиків і їх внесок у створення тригонометрії як науки.

На наступному занятті (практичному) перевірити виконання домашнього завдання і приступити до розв'язування вправ на: *- переведення градусної міри кута в радіанну і навпаки; - зображення чисел на одиничному тригонометричному колі і навпаки, на запис всіх чисел для точки $P_\propto$, вибраної на одиничному тригонометричному колі; - на обчислення $sin \propto, cos \propto, tg \propto, ctg \propto$ для заданих значень $\propto$, за допомогою калькулятора.*

Виведення основних тригонометричних тотожностей. Після розв'язання достатньої кількості тренувальних вправ (вони є в діючих підручниках з алгебри і початків аналізу) рекомендуємо *перейти до виведення основних тригонометричних тотожностей*: 1) знаки значень $sin \propto, cos \propto, tg \propto, ctg \propto$ залежно від значення числа $\propto$; 2) співвідношень між тригонометричними числами для одного й того ж числа $\propto$; 3) формул для тригонометричних чисел суми, різниці двох чисел; 4) формул для подвійного і половинного кутів; 5) формул зведення (з встановленням загального правила); 6) формул переведення суми тригонометричних чисел в добуток і навпаки, добутку двох тригонометричних чисел в суму.

Розгляд усіх цих важливих тотожностей пропонуємо провести також у формі шкільної лекції та практичного заняття. На лекції довести найважливіші з них. Наприклад, про синус суми, формули зведення, а іншім – запропонувати учням на вивчення доведень самостійно, за одним з діючих підручником. На практичному занятті, яке послідує за лекцією, учні будуть демонструвати доведення інших тотожностей.

У результаті в них буде створений (власними руками) довідник основних тригонометричних тотожностей. Окремі, з яких, наприклад, $cos(\propto - \beta) = cos \propto cos\beta + sin\alpha sin\beta$, $sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} + cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, вони довели разом вчителем, а інші самостійно, користуючись колективними доведеннями як зразками.

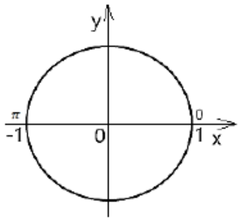
Зрозуміло, що виведення формул можна проводити як за лекційно-практичною формою навчання так і за класно-урочною. Бажано всіляко заохочувати учнів до самостійних доведень чи до повідомлень готових доведень, розміщених у підручниках. Гарним стимулом до роботи є похвала, позитивна оцінка, вибір найкращого доведення тощо. Разом із виведеннями слід розв'язувати тренувальні вправи, які виступають як ілюстрації застосувань вивчених формул.

4. *Перетворення тригонометричних виразів*. Окремо, увагу слід звернути на розв'язування вправ підвищеного і поглибленого рівнів на спрощення тригонометричних виразів, доведення тотожних рівностей, обчислення числових значень виразів, коли доводиться застосовувати не одну основу тотожність, а кілька. Розглянемо приклади таких вправ і особливості їх розв'язання.

1) *Спростить вираз* $\frac{(1-cos^2\propto)(cos4\propto-cos2\propto)}{sin\alpha-2sin3\propto+sin5\propto}$.

Розв'язання. Оскільки знаменник виразу може дорівнювати 0, то встановлювати область визначення виразу будемо по ходу виконання дій. Позначимо даний вираз $A(\propto)$. Тоді:

$A(\propto) = \frac{(1-cos^2\propto)(cos4\propto-cos2\propto)}{sin\alpha-2sin3\propto+sin5\propto} = \frac{sin^2\propto(-2)sin\frac{4\propto+2\propto}{2}\cdot sin\frac{4\propto-2\propto}{2}\cdot}{2sin\frac{\propto+5\propto}{2}\cdot cos\frac{5\propto-\propto}{2}-2sin3\propto} = -\frac{2sin^2\propto\cdot sin3\propto\cdot sin\alpha\cdot}{2sin3\propto\cdot cos2\propto-2sin3\propto} = -\frac{2sin^3\propto\cdot sin3\propto}{2sin3\propto(cos2\propto-1)} =$
$= \frac{sin^3\propto\cdot sin3\propto}{2sin3\propto\cdot sin^2\propto} = \frac{sin\propto}{2}$, за умови, що $sin3 \propto \neq 0, sin \propto \neq 0.$



Скористаємось одиничним тригонометричним колом

а) $sin3 \propto = 0$, коли $3 \propto = n\pi$, де $n \in Z$. Звідси $\propto = \frac{\pi}{3}n$, де $n \in Z$.

б) $sin \propto = 0$, коли $\propto = n\pi$, де $n \in Z$. Множина значень $\propto = \frac{\pi}{3}n$, де $n \in Z$ включає в себе множину значень $\propto = n\pi$, де $n \in Z$. Тому область визначення виразу $A(\propto)$ буде $\propto \ \in R$, де $\propto \neq \frac{\pi}{3}n, n \in Z$.

Відповідь: $A(\propto)=\frac{1}{2}sin \propto, \propto \neq \frac{\pi}{3}n, n \in Z$.

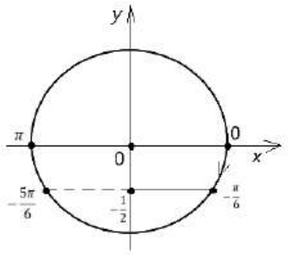
Методичний коментар. Щоб спростити даний вираз (замінити його на тотожно рівним йому) слід знати область визначення. Її краще встановлювати по ходу виконання перетворень. Для виконання перетворень потрібно скористатись основними тотожностями:

$$sin^2 \propto + cos^2 \propto = 1,$$
$$cos \propto - cos\beta = -2\, sin\frac{\propto+\beta}{2} \cdot sin\frac{\propto-\beta}{2},$$
$$sin \propto + sin\beta = 2\, sin\frac{\propto+\beta}{2} \cdot sin\frac{\propto-\beta}{2}.$$

Варто звернути увагу учнів на те, що множина чисел $\propto=\frac{\pi}{3}n,\ n\epsilon Z$ є зліченною.

2) *Доведіть тотожність* $\frac{sin3\alpha+cos2\propto-sin\propto}{cos\alpha+2sin2\propto-cos3\propto}=ctg2\propto$.

Розв'язання. Доведемо, що вираз зліва дорівнює виразу справа, на якій області визначення це відбувається встановимо по ходу доведення: $\frac{sin3\alpha+cos2\propto-sin\propto}{cos\alpha+2sin2\propto-cos3\propto}=\frac{(sin3\alpha-sin\propto)+cos\propto}{(cos\alpha-cos3\propto)+sin2\propto}=\frac{2sin\propto\cdot cos2\propto+cos2\propto}{2sin\propto\cdot sin2\propto+sin2\propto}=\frac{cos2\alpha(2\sin\propto+1)}{sin2\alpha(2\sin\propto+1)}=\frac{cos2\propto}{sin2\propto}=$ $=ctg2\propto$, за умови, що $2sin\propto+1\neq 0$ і $sin2\propto\neq 0$. Знайдемо за допомогою одиничного тригонометричного кола значення $\propto$, при яких ці вирази не дорівнюють 0.



а) $sin2\propto=0$, коли $2\propto=n\pi$, де $n\epsilon Z$. Звідси $\propto=\frac{\pi}{2}n$, де $n\epsilon Z$.

б) $2sin\propto+1=0$, коли $sin\propto=-\frac{1}{2}$. Звідки $\propto_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, де $n\epsilon Z$, $\propto_2=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, де $n\epsilon Z$. Отже, рівність правильна для $\propto\neq\frac{\pi}{2}n$, де $n\epsilon Z$, $\propto\neq-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\epsilon Z$ та $\propto\neq-\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\epsilon Z$.

3. *Обчисліть значення виразу* $\frac{1}{tg3\alpha+tg\propto}-\frac{1}{tg5\alpha-tg\propto}$, якщо $\propto=15^{\circ}$.

Розв'язання. Зрозуміло, щоб обчислити значення даного виразу його слід спочатку спростити, встановити область допустимих значень та переконатись що $\propto=15^{\circ}$ буде належати цій області. Тільки тоді провести обчислення. Позначимо вираз $A(\propto)$.

$$A(\propto)=\frac{1}{tg3\alpha+tg\propto}-\frac{1}{tg5\alpha-tg\propto}=\frac{1}{\frac{sin4\propto}{cos3\propto\cdot cos\propto}}-\frac{1}{\frac{sin4\propto}{cos5\propto\cdot cos\propto}}=\frac{cos3\propto\cdot cos\propto-cos5\propto\cdot cos\propto}{sin4\propto}=$$

$$=\frac{cos\propto(cos3\propto-cos5\propto)}{sin4\propto}=\frac{2cos\propto\quad\cdot sin\propto\cdot sin4\propto}{sin4\propto}=2sin\propto cos\propto=sin2\propto$$

за умови, що $cos\propto\neq 0, cos3\propto\neq 0$ та $cos5\propto\neq 0, sin4\propto\neq 0$.

За допомогою одиничного тригонометричного кола, знайдемо якою буде область допустимих значень виразу $A(\propto)$.

1) якщо $sin4\propto=0$, то $4\propto=n\pi$, де $n\epsilon Z$. $\propto_1=\frac{\pi}{4}n$, де $n\epsilon Z$.

2) якщо $cos\propto=0$, то $\frac{\propto}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, де $n\epsilon Z$.

3) якщо $cos3\propto=0$, то $3\propto=\frac{\pi}{2}+\pi n$, де $n\epsilon Z$. $\propto_3=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, де $n\epsilon Z$.

4) якщо $cos5\propto=0$, то $5\propto=\frac{\pi}{2}+\pi n$, де $n\epsilon Z$. $\propto_4=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}n$, де $n\epsilon Z$.

За умови $\propto=15^{\circ}=\frac{\pi}{12}$ не дорівнює жодному з чисел $\propto_1, \propto_2, \propto_3, \propto_4$.

Отже, $\frac{\pi}{12}$ належить області визначення виразу $A(\propto)$. Тому $A(\frac{\pi}{12})=sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Методичний коментар. Для спрощення виразу використайте формули:

$$tg\propto+ctg\beta=\frac{\sin(\propto+\beta)}{cos\propto\cdot cos\beta}.$$

$$tg\propto-ctg\beta=\frac{\sin(\propto-\beta)}{cos\propto\cdot cos\beta}.$$

$$cos\propto-cos\beta=-2\,sin\frac{\propto+\beta}{2}\cdot sin\frac{\propto-\beta}{2}.$$

Область допустимих значень виразу знаходимо по ходу виконання перетворень.

В усіх прикладах для визначення області визначення виразу використовуємо одиничне тригонометричне коло. Це не випадково, оскільки тему «Тригонометричні рівняння» учні будуть вивчати пізніше, а таке використання є гарною пропедевтикою їх вивчення. На завершення вивчення підтеми пропонуємо обов'язково розглядати прикладні задачі, де тригонометричні вирази служать математичними моделями для їх розв'язування. Це можуть бути задачі з різним сюжетом.

5. *Наведемо приклад однієї з них і можливе її розв'язання (геометрія).*

Задача. Пішохід знаходиться на розі вулиць Тростянецької та Горлівської (м. Київ). Який шлях він має подолати пішки, якщо йому найшвидше потрібно дістатися до станції метро «Харківська»? Скільки часу він на це витратить, йдучи зі швидкістю 5-6 км/год? Попередньо було з'ясовано (за показниками пристроїв автомобіля), що частина вулиці Тростянецької (між вулицями Горлівською та Ревуцького) має довжину 750-800 м, а частина вулиці Ревуцького (між вулицями Тростянецькою та М. Бажана) має довжину1400-1450 м.

Коментарі по розв'язанню задачі. Увагу учнів слід зосереджена на вимозі «найшвидше дістатися» до об'єкта, тому наближеною траєкторією руху необхідно обрати пряму. Наближеність траєкторії пов'язана із неможливістю руху крізь будівлі, які мають місце на шляху пішохода.

Аналіз умови задачі, зокрема виділення відомих даних, приводить до створення її математичної моделі (трикутника) та відповідного внутрішньомодельного розв'язування: дві сторони трикутника відомі за умовою (*1,40 км ≤ AC ≤ 1,45 км; 0,75 км ≤ BC ≤ 0,80 м*); кут між ними можна виміряти за допомогою транспортира ($\angle C \approx 114°$)*;* а невідому сторону трикутника знайти за теоремою косинусів. Числове значення *cosC* є від'ємним. Це створює проблемну ситуацію: відомі учням правила виконання дії другого ступеня стосується лише для додатних чисел. Її виникнення слугує мотивацією для ознайомлення учнів із правилами виконання дій другого ступеня над довільними числами, що відбудеться у курсі алгебри. На даному ж етапі для розв'язання задачі необхідно виконати ряд перетворень:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(180° - \alpha)$, де $\angle\alpha \approx 66°$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC \cdot \cos\alpha$, де $0,3907 < \cos\alpha < 0,4067$,

тоді $\sqrt{1,40^2 + 0,75^2 + 2 \cdot 1,40 \cdot 0,75 \cdot 0,3907} < AB < \sqrt{1,45^2 + 0,80^2 + 2 \cdot 1,45 \cdot 0,80 \cdot 0,4067}$ $1,828379... < AB < 1,919907...$.

Враховуючи, що $t = \frac{S}{v} = \frac{AB}{v}$, а *5 км/год ≤ V ≤ 6 км/год,* маємо $0,3047...год \le t \le 0,3839...год \Rightarrow 18хв \le t \le 24хв$.

Відповідь: Пішохід має подолати шлях *1,82-1,92 км* і витратити для цього *18-24 хв.*

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

1. *Єдиний (загальний) підхід вивчення тригонометричних виразів і їх перетворень* має містити такі окремі етапи:

- *підготовчий***,** на якому виокремлюються практичні потреби, що спонукали і спонукають людей вивчати такі вирази; описується історія розв'язання проблемних питань зусиллями математиків різних часів; сучасне трактування понять, що підлягають вивченню в курсі алгебри і початків аналізу;

- *базовий,* на якому вивчаються основні тотожності, пов'язані з розглядуваними виразами;

- *практичний,* на якому формуються вміння і навички виконання перетворень виразів; спрощення, доведення тотожної рівності; обчислення значень виразів для заданих значень змінних;

- *прикладний,* на якому демонструється застосування отриманих знань, вмінь і навичок під час розв'язування прикладних задач, де ці вирази служать для них математичними моделями.

2. Підготовчий етап особливий, важливий, він є першим елементом дидактичного циклу вивчення теми, розкриває потребу вивчення теми, виступає гарним мотиватором здобуття учнями відповідних знань, вмінь і навичок, служить основою для вивчення відповідних функцій, рівнянь і нерівностей.

3. За описаним узагальненим підходом (всі чотири етапи) вивчення тригонометричних виразів і їх перетворень доцільно вивчати *ірраціональні, показникові та логарифмічні* вирази і їх перетворення. Зрозуміло, що змістове наповнення кожного з етапів для окремого виду виразів буде іншим, але порядок дій (правило-орієнтир) – однаковим.

4. І для вчителів-практиків, і для студентів-майбутніх вчителів математики використання такого підходу відкриває широкий простір для творчості у навчанні учнів: використання історичних джерел; вибір вдалих (доцільних) методик доведень важливих базових тотожностей; створення добірок цікавих прикладних задач, презентацій; відеороликів; навчальних проєктів тощо.

5. Студенти вишів можуть обирати теми курсових чи дипломних робіт, пов'язаних з вивченням окремих видів виразів і розробляти власні методичні рекомендації щодо їх вивчення на основі узагальненого підходу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Швець, В. О. (2020). Коли і як має формуватися поняття алгебраїчного виразу в курсі алгебри і початків аналізу. *Фізико-математична освіта, 1*(23), 152-156. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2020-023-1-025.
2. Програми з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. *Сайт МОН України*. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.
3. Швець, В. О. (2024). Теорія та методика навчання математики в старшій профільній школі: курс лекцій. Київ: Видавництво УДУ імені Михайла Драгоманова. URL: https://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/46732.
4. Литвиненко, Г. М., Федченко, Л. Я., & Швець, В. О. (1999). *Збірник задач для екзамену з математики на атестат про середню освіту*. Частина. І. Алгебра та початки аналізу. Частина ІІ: Геометрія. Видання виправл. Харків: ББН.
5. Шкіль, М. І., Слєпкань, З.І., & Дубинчук, О. С. (1998). Алгебра і початки аналізу. К.: Зодіак-ЕКО.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Shvets, V. O. (2020). Koly i yak maie formuvatysia poniattia alhebraichnoho vyrazu v kursi alhebry i pochatkiv analizu [When and how should the concept of algebraic expression be formed in the course of algebra and the beginnings of analysis]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and mathematical education, 1*(23), 152-156. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2020-023-1-025.
2. Prohramy z matematyky dlia 10-11 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Mathematics programs for grades 10-11 of general education institutions]. *Sait MON Ukrainy – Website of the Ministry of Education and Science of Ukraine*. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.
3. Shvets, V. O. (2024). Teoriia ta metodyka navchannia matematyky v starshii profilnii shkoli: kurs lektsii. [Theory and methods of teaching mathematics in senior specialized schools: a course of lectures]. Kyiv: Vydavnytstvo UDU imeni Mykhaila Drahomanova. URL: https://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/46732.
4. Litvinenko, G. M., Fedchenko, L. Ya., & Shvets, V. O. (1999). *Zbirnyk zadach dlia ekzamenu z matematyky na atestat pro seredniu osvitu* [*Collection of problems for the mathematics exam for the secondary education certificate*]. Part. I. Algebra and the beginnings of analysis. Part II: Geometry. Revised edition. Kharkiv: BBN.
5. Shkil, M. I., Slepkan, Z. I., & Dubinchuk, O. S. (1998). *Algebra i pochatky analizu [Algebra and the beginnings of analysis]*. K.: Zodiak-EKO.

| *Матеріал надійшов до редакції: 14.02.2025 р.* | *Прийнято до друку: 25.03.2025 р.* | *Опубліковано: 29.04.2025 р.* |

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Key title: Fìziko-matematična osvìta
Abbreviated key title: Fìz.-mat. osv.

Том 40, № 2
2025

Друкується в авторській редакції
Матеріали подані мовою оригіналу

Відповідальний за випуск
О.В. Семеніхіна

Комп'ютерна верстка
О.М. Удовиченко

Ідентифікатор медіа:
R30-02975

https://fmo-journal.org/

Підп. до друку 28.04.2025.
Формат 60x84/8. Гарнітура Calibri. Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 8,49.
Ум. фарб.-відб. 8,49. Обл.-вид. арк. 7,77. Тираж 50 пр. Вид. №16

Видавець:
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
40002, м.Суми, вул.Роменська, 87
Тел. (0542) 68-59-15, (0542) 68-59-72; rector@sspu.edu.ua
Свідоцтво ДК № 231 від 02.11.2000 р.

Виготовлювач:
ФОП Цьома С.П. 40002, м. Суми, вул. Роменська, 100.
Тел.: 066-293-34-29.
Зам. № 22

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК, № 5050 від 23.02.2016.