МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Том 39, № 3

Суми – 2024

Рекомендовано до видання вченою радою
Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка
(протокол № 12 від 19.06.2024 р.)

Ф45 Фізико-математична освіта : науковий журнал. Том 39, № 3. Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Фізико-математичний факультет ; редкол.: О.В. Семеніхіна (гол.ред.) [та ін.]. Суми : [СумДПУ ім. А.С. Макаренка], 2024. 83 с.

Наказом МОН України №1412 від 18.12.2018 р. журнал «Фізико-математична освіта» затверджено як **фахове наукове видання категорії «Б»** у галузі педагогічних наук (13.00.02 – математика, фізика, інформатика; 13.00.10) і за спеціальностями 011, 014, 015.

Журнал індексуються наукометричною базою **Index Copernicus** Journals Master List

Автори статей несуть відповідальність за достовірність наведеної інформації (точність наведених у статті даних, цитат, статистичних матеріалів тощо) та за порушення прав інтелектуальної власності інших осіб.

Висловлені авторами думки можуть не співпадати з точкою зору редакції.

УДК 53+51]:37(051)
DOI: 10.31110/2413-1571

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Makarenko Sumy State Pedagogical University
Physics and Mathematics Faculty

ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)

PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION

Scientific Journal

Vol. 39, No 3

Sumy – 2024

Recommended for publication of the Academic Council
of Makarenko Sumy State Pedagogical University
(protocol No 12 from 19.06.2024)

F 45 Physical and Mathematical Education : Scientific Journal. Vol. 39, No 3. Makarenko Sumy State Pedagogical University, Physics and Mathematics Faculty ; O.V. Semenikhina (chief editor). Sumy : [Makarenko Sumy State Pedagogical University], 2024. 83 p.

The authors of the articles are responsible for the authenticity of the information (the accuracy of the presented information in the article, quotations, statistical materials, etc.) and for the violation of intellectual property rights of others.

Opinions expressed by the authors may not reflect the views of the editors.

UDC 53+51]:37(051)
DOI: 10.31110/2413-1571

ЗМІСТ

CONTENTS

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI **10.31110/fmo2024.v39i3-01**

УДК **537.21**

РІВНЯННЯ СИЛОВИХ ЛІНІЙ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ В ОКРЕМИХ ВИПАДКАХ

Костянтин АВДОНІН ✉
Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут, Україна
avdonink13@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6805-0870

Олександр ЗУБКО
Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут, Україна
azubko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4580-6919

АНОТАЦІЯ

У даній роботі здійснюється пошук рівнянь силових ліній електростатичного поля в явному вигляді, що можливо звичайно тільки в окремих випадках. Актуальність роботи обумовлена необхідністю доповнення методики викладення такої важливої теми курсу загальної фізики, як «Електростатика», в області засобів графічного зображення електростатичного поля, яке сприяє кращому розумінню даної теми. Знайдені і розглянуті випадки, для яких рівняння силових ліній існують в явному вигляді. Для кожного окремого випадку наведено приклад вигляду силових ліній електростатичного поля, який випливає з отриманих рівнянь, за допомогою пакету прикладних обчислюваних програм MathCAD. Побудову силових ліній електростатичного поля, звичайно, можна здійснювати користуючись тільки чисельними методами, спираючись на визначення дотичної до лінії, але такий підхід значно підвищує складність обчислювальних програм.

Формулювання проблеми. Силові лінії електростатичного поля у підручниках та навчальних посібниках з курсу загальної фізики малюють, спираючись на визначення силових ліній та формули, вирази для напруженості електростатичного поля, без отримання рівнянь силових ліній поля, тобто недостатньо обґрунтовано.

Матеріали і методи. Головними методами вирішення поставленої проблеми є: засоби пошуку розв'язків системи звичайних, нелінійних, диференціальних рівнянь та використання графічних операторів у середовищі прикладних обчислювальних програм MathCAD.

Результати. З'ясовано, що рівняння силових ліній в явному вигляді існують для електричного поля двох точкових зарядів та для електричного поля прямолінійної, рівномірно зарядженої нитки, скінченої довжини. Наведені приклади силових ліній, загальний вигляд яких узгоджується з відомими граничними умовами.

Висновки. Отримані рівняння силових ліній електростатичного поля дозволяють підсилити повноту викладення матеріалу розділу «Електростатика». Графіки силових ліній поля, побудовані за допомогою обчислювальних програм, підвищують ступінь доказовості викладення матеріалу та сприяють його розумінню.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *електростатичне поле; силові лінії; електричний диполь; рівняння.*

Для цитування:	Авдонін К., Зубко О. Рівняння силових ліній електростатичного поля в окремих випадках. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 3. С. 7-11. DOI: https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-01
	Авдонін, К., & Зубко, О. (2024). Рівняння силових ліній електростатичного поля в окремих випадках. *Фізико-математична освіта*, *39*(3), 7-11. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-01
For citation:	Avdonin, K., & Zubko, O. (2024). Equation of lines of force of the electrostatic field in certain cases. *Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 7-11. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-01
	Avdonin, K., & Zubko, O. (2024). Rivniannia sylovykh linii elektrostatychnoho polia v okremykh vypadkakh [Equation of lines of force of the electrostatic field in certain cases]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 7-11. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-01

✉ Corresponding author

EQUATION OF LINES OF FORCE OF THE ELECTROSTATIC FIELD IN CERTAIN CASES

Kostiantyn AVDONIN ✉
Military Institute of Telecommunications and Informatization named after Heroes of Krut, Ukraine
avdonink13@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6805-0870

Oleksandr ZUBKO
Military Institute of Telecommunications and Informatization named after Heroes of Krut, Ukraine
azubko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4580-6919

ABSTRACT

In this work, the equations of the lines of force of the electrostatic field are searched in an explicit form, which is possible, of course, only in certain cases. The relevance of the work is due to the need to supplement the methodology of presenting such an important topic of the general physics course as «Electrostatics» in the field of means of graphic representation of the electrostatic field, which contributes to a better understanding of this topic. Cases were found and considered for which the equations of force lines exist in an explicit form. For each individual case, an example of the appearance of the lines of force of the electrostatic field, which follows from the obtained equations, is given using the package of applied computing programs MathCAD. The construction of power lines of the electrostatic field, of course, can be carried out using only numerical methods, based on the definition of the tangent to the line. Still, this approach significantly increases the complexity of computing programs.

Formulation of the problem. The lines of force of the electrostatic field in textbooks and teaching aids for the course of general physics draw, based on the definition of lines of force and formulas, expressions for the intensity of the electrostatic field, without obtaining the equations of the lines of force of the field, that is, it is insufficiently substantiated.

Materials and methods. The main methods of solving the problem are finding solutions to a system of ordinary, nonlinear, differential equations and using graphical operators in the environment of MathCAD applied computing programs**.**

Results. It was found that the equations of force lines exist in an explicit form for the electric field of two-point charges and for the electric field of a rectilinear, uniformly charged thread of finite length. Examples of lines of force are given, the general appearance of which is consistent with the known boundary conditions.

Conclusions. The obtained equations of the lines of force of the electrostatic field make it possible to strengthen the completeness of the presentation of the material in the "Electrostatics" section. Graphs of field lines of force, built with the help of computer programs, increase the level of proof of the presentation of the material and contribute to its understanding.

KEYWORDS: *electrostatic field; power lines; electric dipole; equation.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Викладення теми «Електростатика» супроводжується пояснювальними рисунками, на яких зображають силові лінії електростатичних полів. Але, загальне визначення силових ліній електростатичного поля, яке передує пояснювальним рисункам та формули для напруженостей електростатичних полів визначають вигляд силових ліній електростатичного неявно, що знижує рівень доказовості викладеного матеріалу.

Аналіз актуальних досліджень. У роботах (Кучерук et al., 2001; Воловик, 2005) при викладенні електростатики дається загальне визначення напруженості електростатичного поля, формула напруженості електростатичного поля одного точкового заряду, принцип суперпозиції електричних полів, на основі якого отримані загальні формули для знаходження напруженості електростатичного поля систем зарядів. Потім дається загальне визначення силової лінії електростатичного поля, без методу знаходження рівнянь силових ліній, і якісні рисунки для силових ліній електростатичного поля одного точкового заряду і силових ліній поля електричного диполю. У роботі (Андріящик et al., 2008) окрім якісного зображення силових ліній поля точкового заряду і диполя наведений якісний вигляд силових ліній електричного поля зарядженої провідної пластини, скінчених розмірів. У роботі (Петченко et al., 2007) детально розглядається взаємне розташування силових ліній і еквіпотенціальних поверхонь, але приклади силових ліній електричних полів, зображені схематично. У роботі (Urone & Hinrichs, 2022) більша увага, ніж в інших роботах, приділена обґрунтуванню вигляду силових ліній електростатичного поля, але без застосування рівнянь силових ліній. У роботі (Owen, 1963) малюнки, які ілюструють силові ліні електричного поля, виконані від руки, тобто дуже якісно. У роботі (Purcell & Morin, 2013) шляхом чисельних розрахунків отримані і показані на рисунку силові лінії електростатичного поля двох точкових, різнойменних зарядів, різних за абсолютною величиною. У роботі (Jonassen, 1998) приведені якісні рисунки силових ліній електричного поля двох заряджених, провідних тіл, різної форми. У роботі (Sibley, 2021) зображені якісні рисунки силових ліній електричного поля двох однойменних, точкових зарядів, однакових за абсолютною величиною. У роботі (Munfaridah et al., 2021), яка є оглядовою статтею, узагальненні 24 емпіричних дослідження, що були проведені з 2002 по 2019 роки, однозначно доведено, що множинні представлення (multiple representations), іншими словами – малюнки, креслення, діаграми, графіки – позитивно впливають на розуміння студентами фізичних концепцій, а самостійна робота над множинними представленнями розвиває репрезентативну компетентність.

Мета статті. Як відомо з векторного аналізу, диференціальні рівняння силових ліній будь якого векторного поля (у даній роботі диференціальні рівняння силових ліній електростатичного поля), мають такий вигляд:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \tag{1}$$

де E_x ; E_y ; E_z – проекції вектора напруженості електричного поля на вісі координат.

Метою роботи є отримання рівнянь силових ліній електричного поля двох точкових зарядів та рівномірно зарядженої нитки скінченої довжини, шляхом знаходження розв'язків системи диференціальних рівнянь (1), після підстановки відомих проекцій напруженості електричного поля.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

При знаходженні розв'язків системи з двох нелінійних, диференціальних першого порядку (1) був використаний метод виділення повного диференціалу. Приклади вигляду силових ліній одержані за допомогою тривимірної графіки з пакету прикладних обчислювальних програм MathCAD.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Рівняння силових ліній для електричного поля двох точкових зарядів. Позначимо через q_1; q_2 величини точкових зарядів, через l відстань між зарядами. Якщо вибрати початок відліку системи координат посередині між зарядами і розташувати заряди вздовж осі координат X, то проекції напруженості електричного поля мають вигляд:

$$E_x = \frac{q_1\left(x-\frac{l}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^3} + \frac{q_2\left(x+\frac{l}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^3};\ E_y = \frac{q_1 y}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^3} + \frac{q_2 y}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^3};\ E_z = \frac{q_1 z}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^3} + \frac{q_2 z}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^3}, \tag{2}$$

де $r_1 = \sqrt{\left(x-\frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}$, $r_2 = \sqrt{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}$.

Підставляючи проекції (2) у систему рівнянь (1) маємо:

$$\begin{cases} dz\left(\dfrac{q_1\left(x-\frac{l}{2}\right)}{r_1^3} + \dfrac{q_2\left(x+\frac{l}{2}\right)}{r_2^3}\right) = dx\left(\dfrac{q_1 z}{r_1^3} + \dfrac{q_2 z}{r_2^3}\right) \\ dy\left(\dfrac{q_1\left(x-\frac{l}{2}\right)}{r_1^3} + \dfrac{q_2\left(x+\frac{l}{2}\right)}{r_2^3}\right) = dx\left(\dfrac{q_1 y}{r_1^3} + \dfrac{q_2 y}{r_2^3}\right) \end{cases} \tag{3}$$

Помножуючи перше рівняння системи (3) на z, друге рівняння на y та сумуючи їх одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0, \tag{4}$$

де

$$f(x,y,z) = \frac{q_1\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q_2\left(x+\frac{l}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} = C_1;\quad C_1 = const. \tag{5}$$

Розділивши перше рівняння системи (3) на друге та проводячи інтегрування знаходимо:

$$z = C_2 y,\ \text{де } C_2 = const. \tag{6}$$

Підставляючи залежність (6) координати z від координати y у функцію (5) маємо:

$$\frac{q_1\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{l}{2}\right)^2 + \left(1+C_2^2\right)y^2}} + \frac{q_2\left(x+\frac{l}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2 + \left(1+C_2^2\right)y^2}} = C_1 . \tag{7}$$

Одержані рівності (6) та (7) це рівняння силових ліній поля електричного двох точкових зарядів.

На рисунках 1, 2 показаний вигляд силових ліній електричного поля двох точкових зарядів, відповідних рівнянням (6) та (7).

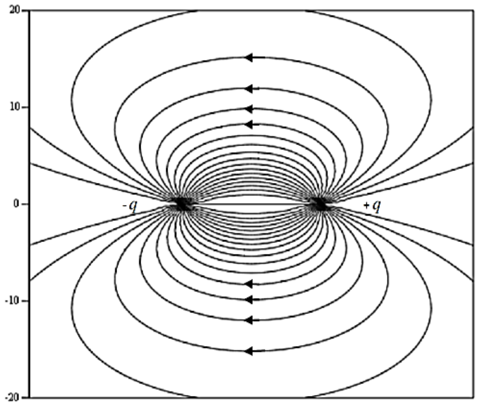


Рис. 1. Приклад силових ліній поля електричного диполя.
Джерело: авторська розробка.

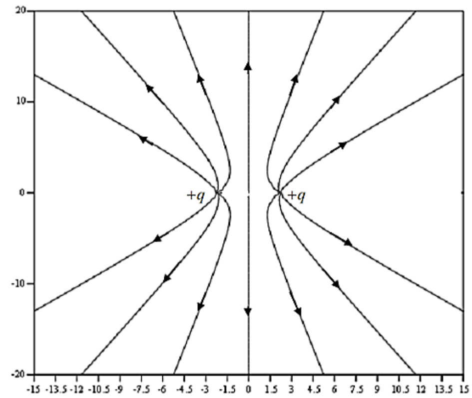


Рис. 2. Приклад силових ліній електричного поля двох одноймених, додатних зарядів.

Джерело: авторська розробка.

2. Рівняння силових ліній для електричного поля прямолінійної, рівномірно зарядженої нитки, скінченої довжини. Позначимо через τ абсолютну величину лінійної густини заряду нитки, через l довжину нитки. Якщо вибрати початок відліку системи координат посередині нитки і розташувати її вздовж осі координат Y, то проекції напруженості електричного поля мають вигляд:

$$E_x = \frac{\tau x}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b^2}\left(\frac{y+\frac{l}{2}}{r_2} - \frac{y-\frac{l}{2}}{r_1}\right);\ E_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} - \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2};\ E_z = \frac{\tau z}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b^2}\left(\frac{y+\frac{l}{2}}{r_2} - \frac{y-\frac{l}{2}}{r_1}\right), \tag{8}$$

де $r_1 = \sqrt{\left(y-\frac{l}{2}\right)^2 + b^2}$, $r_2 = \sqrt{\left(y+\frac{l}{2}\right)^2 + b^2}$, $b = \sqrt{x^2+z^2}$.

Підставляючи проекції (8) у систему рівнянь (1) маємо:

$$\begin{cases} dy\,\dfrac{x}{b^2}\left(\dfrac{y+\frac{l}{2}}{r_2} - \dfrac{y-\frac{l}{2}}{r_1}\right) = dx\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) \\ dy\,\dfrac{z}{b^2}\left(\dfrac{y+\frac{l}{2}}{r_2} - \dfrac{y-\frac{l}{2}}{r_1}\right) = dz\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) \end{cases} \tag{9}$$

Помножуючи перше рівняння системи (9) на X, друге рівняння на Z та сумуючи їх одержимо:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0, \tag{10}$$

де

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2+\left(y-\frac{l}{2}\right)^2} - \sqrt{x^2+z^2+\left(y+\frac{l}{2}\right)} = D_1;\quad D_1 = const. \tag{11}$$

Розділивши перше рівняння системи (9) на друге та проводячи інтегрування знаходимо:

$$z = D_2 x,\ \text{де}\ D_2 = const. \tag{12}$$

Підставляючи залежність (12) координати z від координати x у функцію (11) маємо:

$$\sqrt{\left(y-\frac{l}{2}\right)^2 + \left(1+D_2^2\right)x^2} - \sqrt{\left(y+\frac{l}{2}\right)^2 + \left(1+D_2^2\right)x^2} = D_1\ . \tag{13}$$

Одержані рівності (12) та (13) це рівняння силових ліній електричного поля скінченої, рівномірно зарядженої нитки, які залежать від величини лінійної густини заряду неявним чином.

На рисунку 3 показаний вигляд силових ліній електричного поля зарядженої нитки, скінченої довжини, одержаних за допомогою рівнянь (12) і (13).

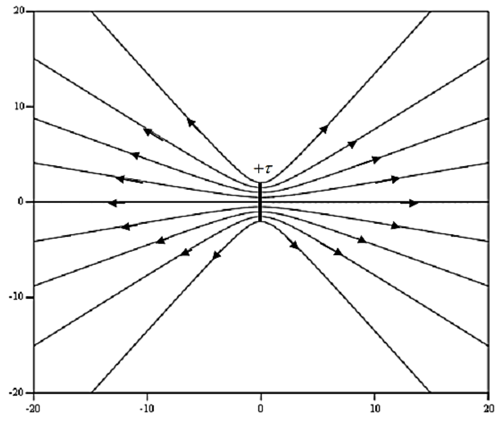


Рис. 3. Приклад силових ліній електричного поля зарядженої нитки скінченої довжини.

Джерело: авторська розробка.

Новизна отриманих у роботі результатів полягає у наступному: показано, що для електричного поля системи точкових зарядів та електричного поля неперервно розподілених зарядів, в окремих випадках, можна знайти рівняння силових ліній в явному вигляді та в наочній демонстрації простоти побудови силових ліній електричного поля, за допомогою отриманих рівнянь силових ліній.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

1) У роботі показано, що в окремих випадках для електричного поля системи зарядів можна знайти рівняння силових ліній в явному вигляді. Знайдені рівняння силових ліній електростатичного поля двох точкових зарядів і

рівномірно зарядженої нитки скінченої довжини. Застосування рівнянь силових ліній при викладенні матеріалу теми «Електростатика» доповнює повноту і доказовість матеріалу, оскільки приклади зображень силових ліній студент може отримати самостійно, за допомогою обчислювальних програм, що буде сприяти підвищенню якості навчального процесу у закладах вищої освіти.

2) В якості одного з напрямів подальших досліджень можна запропонувати пошук рівнянь силових ліній електричного поля для інших систем точкових зарядів. Наприклад, для рівнянь електростатичного поля кубічної комірки, у вершинах якої знаходяться точкові заряди, та пошук рівнянь силових ліній електричного поля іонного кристалу. Іншим, перспективним напрямом є знаходження рівнянь силових ліній магнітного поля. Наприклад для магнітного поля колового струму, короткого соленоїда, що доповнить викладення матеріалу теми «Магнітне поле»

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Кучерук, І.М., Горбачук, І.Т., & Луцик, П.П. (2001). *Загальний курс фізики: Т. 2. Електрика і магнетизм.* Техніка.
2. Воловик, П.М. (2005). *Фізика для університетів. Повний курс в одному томі.* Ірпінь.
3. Андріящик, М.В., Вербицький, Б.І., & Король, А.М. (2008). *Курс фізики.* НВЦ «Фламенко».
4. Петченко, О.М., Сисоєв, А.С., Назаренко, Є.І., & Безуглий, А.В. (2007). *Загальні основи фізики.* ХНАМГ.
5. Urone, P.P., & Hinrichs, R. (2022) *College Physics 2e.* Rice University.
6. Owen, G.E. (1963) *Introduction to Electromagnetic Theory*. Allyn and Bacon.
7. Purcell, E., & Morin D. J. (2013) *Electricity and magnetism.* Cambridge University Press.
8. Jonassen, N. (1998) *Electrostatics*. Chapman & Hall.
9. Sibley, M.J.N. (2021) *Introduction to Electromagnetism: From Coulomb to Maxwell.* CRC Press.
10. Munfaridah, N., Avraamidou, L., & Goedhart, M. (2021) The Use of Multiple Representations in Undergraduate Physics Education: What Do we Know and Where Do we Go from Here? *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(1), em1934. https://doi.org/10.29333/ejmste/9577.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Kucheruk, I.M., Horbachuk, I.T., & Lutsyk, P.P. (2001). *Zahalnyi kurs fizyky: T. 2. Elektryka i mahnetyzm [General course of physics: T. 2. Electricity and magnetism]*. Tekhnika.
2. Volovyk, P.M. (2005). *Fizyka dlia universytetiv [Physics for universities]*. Povnyi kurs v odnomu tomi. Irpin.
3. Andriiashchyk, M.V., Verbytskyi, B.I., & Korol, A.M. (2008). *Kurs fizyky [Physics course].* NVTs «Flamenko».
4. Petchenko, O.M., Sysoiev, A.S., Nazarenko, Ye.I., & Bezuhlyi, A.V. (2007). *Zahalni osnovy fizyky [General basics of physics].* KhNAMH.
5. Urone, P.P., & Hinrichs, R. (2022) *College Physics 2e.* Rice University.
6. Owen, G.E. (1963) *Introduction to Electromagnetic Theory*. Allyn and Bacon.
7. Purcell, E., & Morin D. J. (2013) *Electricity and magnetism.* Cambridge University Press.
8. Jonassen, N. (1998) *Electrostatics*. Chapman & Hall.
9. Sibley, M.J.N. (2021) *Introduction to Electromagnetism: From Coulomb to Maxwell.* CRC Press.
10. Munfaridah, N., Avraamidou, L., & Goedhart, M. (2021) The Use of Multiple Representations in Undergraduate Physics Education: What Do we Know and Where Do we Go from Here? *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(1), em1934. https://doi.org/10.29333/ejmste/9577.

Матеріал надійшов до редакції 24.02.2024р.

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI **10.31110/fmo2024.v39i3-02** УДК **37.01**

ВИКОРИСТАННЯ КЕЙС-ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ В БАЗОВІЙ ШКОЛІ

Наталія АКИМЕНКО
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
akymenko.nv@pdpu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-4336-7227

Ольга ПАПАЧ
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
olivapa@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-8960-5457

Ольга ЯКОВЛЄВА ✉
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
Yakovlieva.ON@pdpu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-0750-9769

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Задачі економічного змісту сприяють розвитку предметної математичної та ключової компетентності підприємливості та фінансової грамотності здобувачів загальної середньої освіти. Застосування сучасних освітніх технологій надає їм можливість набуття практичного досвіду застосування математичних знань та вмінь для виконання економічних та фінансових розрахунків.

Матеріали і методи. У статті зроблено стислий аналіз зарубіжних та вітчизняних наукових і методичних джерел, присвячених різним аспектам застосування задач економічного змісту, порівняння модельних навчальних програм з «Алгебри» для 7-9 класів на наявність задач економічного змісту при викладанні окремих тем, узагальнено власний педагогічний досвід з викладання математики та застосування кейс-технології.

Результати. Визначено особливості викладання теми «Числові послідовності» в 9 класі у зв'язку з реалізацією концепції НУШ в базовій школі. В модельних навчальних програмах задачі економічного змісту визначено як інструмент формування предметної математичної компетентності, їх рекомендують застосовувати в освітньому процесі як один з видів навчальної діяльності, вміння їх розвязувати є одним з очікуваних результатів навчання здобувачів освіти. Описано застосування кейс-технології для набуття учнями практичного досвіду застосування математичних знань та вмінь для виконання фінансових розрахунків. Представлено кейс на тему «Іпотечне кредитування» для ознайомлення учнів 9 класів з основами банківської діяльності та використанням математичних знань для здійснення розрахунків за іпотечним кредитуванням на прикладах, максимально наближених до реальних ситуацій. Тип створеного кейсу – кейс-ситуація, яка вимагає від учня аналізу певної ситуації та застосування певного математичного апарату (роботу з арифметичною та геометричною прогресіями).

Висновки. На думку авторів кейс на тему «Іпотечне кредитування» урізноманітнює дидактичні матеріали до теми «Числові послідовності». Використання задач економічного змісту при вивченні теми «Числові послідовності» сприяє більш глибокому та усвідомленому розумінню необхідності оволодінням математичним апаратом. Впровадження кейс-технології забезпечує практичну спрямованість освітнього процесу, позитивно впливає на підвищення пізнавального інтересу учнів до вивчення математики, формує в учнів уміння орієнтуватися в реаліях навколишньої дійсності та застосовувати отримані знання у практичній діяльності.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *задачі економічного змісту; арифметична прогресія; геометрична прогресія; фінансові розрахунки; освітні технології; кейс технологія.*

Для цитування:	Акименко Н., Папач О., Яковлєва О. Використання кейс-технологій при розв'язанні задач економічного змісту в базовій школі. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 3. С. 12-23. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i3-02
	Акименко, Н., Папач, О., & Яковлєва, О. (2024). Використання кейс-технологій при розв'язанні задач економічного змісту в базовій школі. *Фізико-математична освіта*, *39*(3), 12-23. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-02
For citation:	Akymenko, N., Papach, O., & Yakovlieva, O. (2024). Use of case technologies in solving problems of economic content in secondary school. *Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 12-23. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-02
	Akymenko, N., Papach, O., & Yakovlieva, O. (2024). Vykorystannia keis-tekhnolohii pry rozviazanni zadach ekonomichnoho zmistu v bazovii shkoli [Use of case technologies in solving problems of economic content in secondary school]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 12-23. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-02

✉ Corresponding author

USE OF CASE TECHNOLOGIES IN SOLVING PROBLEMS OF ECONOMIC CONTENT IN SECONDARY SCHOOL

Natalia AKYMENKO
South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky, Ukraine
akymenko.nv@pdpu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-4336-7227

Olha PAPACH
South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky, Ukraine
olivapa@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-8960-5457

Olga YAKOVLIEVA ✉
South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky, Ukraine
Yakovlieva.ON@pdpu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-0750-9769

ABSTRACT

Formulation of the problem. The tasks of economic content contribute to the development of mathematical subjects and key competencies of entrepreneurship and financial literacy for general secondary education students. Using modern educational technologies allows them to gain practical experience in applying mathematical knowledge and skills to perform economic and financial calculations.

Materials and Methods. The article provides a brief analysis of foreign and domestic scientific and methodological sources on various aspects of the application of economic content tasks, compares model curricula in Algebra for grades 7-9 for the presence of economic content tasks in teaching specific topics, summarizes own pedagogical experience in teaching mathematics and the use of case technology.

Results. The peculiarities of teaching "Numerical sequences" in grade 9 concerning implementing the NUS concept are determined. In the model curricula, economic content tasks are defined as a tool for the formation of subject mathematical competence; they are recommended to be used in the educational process as one of the types of academic activities, and the ability to solve them is one of the expected learning outcomes of students. The article describes case technology for students to gain practical experience in applying mathematical knowledge and skills to perform financial calculations. A case study on "Mortgage Lending" is presented to familiarize 9th-grade students with the basics of banking and the use of mathematical knowledge to make mortgage calculations using examples as close as possible to real-life situations. The type of case study created is a case situation that requires the student to analyze a problem and apply a specific mathematical apparatus (work with arithmetic and geometric progressions).

Conclusions. The case study on "Mortgage Lending" diversifies didactic materials for the topic "Numerical Sequences." Using economic tasks in studying "Numerical sequences" contributes to a deeper and more conscious understanding of the need to master the mathematical apparatus. The introduction of case technology ensures the practical orientation of the educational process, has a positive effect on increasing students' cognitive interest in learning mathematics, and forms students' ability to navigate the realities of the surrounding reality and apply the acquired knowledge in practical activities.

KEYWORDS: *problems of economic content; arithmetic progression; geometric progression; financial calculations; educational technologies; case technology.*

ВСТУП

Вимогою сучасності є здатність людини планувати свої власні фінанси, грамотно та вигідно для себе будувати відносини з різними фінансовими структурами, захищати себе від шахрайства або помилок економічного характеру. Розуміння економічних явищ, законів, закономірностей, володіння практичними знаннями з економіки неможливі без володіння різними спеціальними математичними методами. Своєчасне, якісне навчання цим методам в шкільному курсі математики дозволить учням оволодіти фінансовою грамотністю, сприяє формуванню в них економічного мислення. Тому поєднання теоретичної і практичної складових шкільної математики на тлі економіки є актуальним.

Метою даної статті є стислий аналіз зарубіжних та вітчизняних наукових і методичних джерел, присвячених різним аспектам застосування задач економічного змісту, порівняння модельних навчальних програм з «Алгебри» для 7-9 класів на наявність задач економічного змісту при викладанні окремих тем та прикладу застосування кейс-технології для набуття учнями практичного досвіду застосування математичних знань та вмінь для виконання економічних розрахунків. Важливим аспектом зазначеної мети є систематизація та узагальнення відомостей для розробки кейсу за темою «Іпотечне кредитування» в межах вивчення теми «Числові послідовності» в курсі алгебри для учнів 9 класів.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Реформування шкільної освіти базується на організації освітнього процесу на особистісно орієнтованому, компетентнісному та діяльнісному принципах. Це сприяє реалізації прикладної спрямованості всіх дисциплін шкільного курсу, в тому числі і в шкільному курсі математики, одним із засобів якого є введення прикладних задач. Їх місце і роль, особливості застосування визначалися в роботах Г. П. Бевза, М. І. Бурди, Г. М. Возняка, З. І. Слепкань, Н. А. Тарасенкової, В. О. Швеця та інших. Серед прикладних задач науковці виділяють економічні задачі, зміст яких пов'язаний з з фінансами, грошовими розрахунками, кредитуванням, страхуванням, накопиченням статків. Питанням набуття економічних компетенції на основі математичних методів та моделей приділяли увагу П. П. Бочаров, М. А. Вайнтрауб, О. С. Стрельченко, І. Г. Стрельченко, І. П. Васильченко, В. П. Лавринчук, Л.С.Межейнікова, С. В. Могершит, Ю. М. Ткач.

Цікавим є досвід зарубіжних науковців щодо інтеграції математики та економіки. Tracy J. Posnanski, Mark C. Schug та Thomas Schmitt ще на початку 2000-х років констатували високий рівень економічної та фінансової неграмотності та негативні наслідки цього для добробуту Сполучених Штатів. Вони дійшли висновку, що саме це є основною причиною розлучень, самогубств та збільшення кількості особистих банкрутств. Задля виправлення ситуації впроваджувалися навчальні програми, в рамках яких учнів середніх та старших почали вивчати більш складні теми з бізнесу та фінансів, включаючи основи інвестування та особистого фінансового планування, економіку, фінанси та маркетинг. Схожі висновки роблять Nur Anita Yunikawati, Magistyo Purboyo Priambodo, Emma Yunika Puspasari та Ni'matul Istiqomah, які впроваджували основи економічних знань в початковій школі на основі математики в Гондурасі, Східній Яві та Індонезії впродовж 2019 року (Yunikawati et al., 2021).

Krista Althauser та Cynthia Harter описують досвід партнерської програми програма «Економіка: математика в реальному житті» для 3-5 класів, для участі в якій об'єдналися держава, школи, вищі навчальні заклади та бізнес спільнота окремих громад (Althauser & Harter, 2016). Weiss та Pasley вважають, що слід зробити математику більш значущою у очах дітей, забезпечити навчання її змісту, який водночас буде вагомим і вартісним, та зробить математику приємною та важливою для учнів (Weiss &Pasley, 2004). Про прикладний характер математики та роль вчителя у тому, щоб постійно це ілюструвати, підбираючи відповідні завдання, наголошують Civil та Khan. На їх думку роль учителя полягає в тому, щоб направляти учнів, створювати відповідне навчальне середовище, допомагати їм встановлювати зв'язки математики з реальним світом і таким чином сприяти їх успішності. (Civil & Khan 2001).

Таке стратегічне бачення поєднання основ економічних знань та математичного апарату перегукується з освітніми оцінками ситуацій вітчизняними фахівцями. Так, Лук'янова С.М. відмічає, що сучасний розвиток банківської, інвестиційної та страхової діяльності розширюють сферу застосування математики в повсякденному житті кожного члена суспільства. Саме тому, незалежно від обраного профілю навчання, задача формування і розвитку економічного мислення учнів засобами математики та їх підготовка до адекватного розуміння різних сучасних економічних понять потребує створення відповідної методичної системи навчання математики, яка передбачає інтеграцію математичної і економічної підготовки учнів (Лук'янова, 2010).

На думку Бас С. В. задачі економічного змісту – потужний засіб розвитку економічного стилю мислення, економічного виховання, вироблення економічної грамотності (Бас, 2013). Структура економічних задач подібна до структури інших прикладних задач і складається з предметного сюжету, умови і вимоги. Ткач Ю. М. описувала як в предметному сюжеті вказуються (безпосередньо чи опосередковано) економічні поняття та їх причинно-наслідкові зв'язки в якісній або кількісній інтерпретації. До основних економічних понять, що найчастіше використовуються в сюжетних задачах, відносяться: продуктивність праці, собівартість, кредит, курс акцій, рента, бюджетний дефіцит, позичковий процент, заробітна плата, амортизаційні відрахування, рентабельність, дохід, витрати, прибуток, окупність та інші. Поняття та зв'язки між ними інтерпретуються до конкретних економічних ситуацій – постановки економічної проблеми, пов'язаної з необхідністю підвищення прибутку, продуктивності праці, рентабельності, зниження собівартості; з розрахунком ціни ринкової рівноваги, курсу акцій, кількості грошей необхідних для обігу, величини ренти, прибутку банку, сукупних витрат підприємства, прибутку підприємства, фірми, податку з доходу, впливу інфляції на заощадження громадян, номінальним і реальним процентом за кредит, позичкового проценту, вибору оптимального рішення та ін. (Ткач, 2011).

Моторіна В. Г. та Папач О. І. підкреслюють необхідність підготовки майбутніх учителів математики до формування підприємливості та фінансової грамотності учнів базової школи в межах курсу методики математики. Для створення цілісного сприйняття змістової лінії «Підприємливість та фінансова грамотність» та моделювання відповідних видів навчальної діяльності учнів студенти проводили порівняльний аналіз діючих програм щодо визначення способів реалізації наскрізної лінії, очікуваних результатів навчання до окремих тем, підручників на види та достатність математичних задач фінансового змісту та впродовж занять створювали банки математичних задач фінансового змісту з описом методики їх розв'язування (Моторіна & Папач, 2023).

Аналіз показав, у всіх модельних навчальних програмах є посилання на задачі прикладного, в тому числі фінансового та економічного змісту, однак автори по різному оперують ними. Так, автори програми Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В. підкреслюють, що одним з видів навчальної діяльності є розв'язування практичних задач, серед яких задачі на розрахунок та аналіз фінансової спроможності родини, задачі, що спонукають до прийняття рішень стосовно особистих та колективних фінансових питань.

Автор Істер О. І. рекомендує подавати опанування змісту та процедур розв'язування задач практичного змісту, застосування формули складних відсотків для розрахунку вартості кредитів через очікування результатів навчання здобувачів освіти.

Автори програми Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С. описуючи мету навчального предмета «Алгебра» виділяють в ній формування в учнів предметної математичної компетентності, що передбачає здатність розвивати й застосовувати математичні знання та методи для розв'язання широкого спектра проблем у повсякденному житті. В програмі підкреслюється, що компетентнісний потенціал математичної освітньої галузі визначає її здатність формувати всі інші ключові компетентності, які передбачені державним стандартом, в тому числі і підприємливість та фінансову грамотність, компонентами якої є аналіз власної економічної ситуації, вміння створювати бізнес-план шляхом формування мети та засобів для її досягнення з подальшою покроковою деталізацією. Автори звернули увагу на наскрізні лінії та їх реалізацію, в тому числі і на «Підприємливість і фінансова грамотність». На їх думку ця може бути реалізована під час вивчення відсоткових обчислень, рівнянь та функцій шляхом розв'язування практичних задач щодо планування господарської діяльності та реальної оцінки власних можливостей, складання сімейного бюджету, виконання банківських операцій та розгляду практичних аспектів фінансових питань (здійснення заощаджень, інвестування, запозичення, страхування кредитування).

В своїй модельній навчальній програмі автори Біляніна О. Я., Білянін Г. І., Семчук А. Р., Ілащук О. Г., Мар'янчук О. Т., Рябий С. І. описуючи ціннісні орієнтири програми для базового предметного навчання алгебри, звертають увагу на становлення вільної особистості учня, в тому числі і через формування його підприємливості. Компетентнісний потенціал математичної освітньої галузі, на їх думку, сприятиме формуванню ключових компетентностей, які окреслено Державним стандартом, в тому числі, підприємливості і фінансової грамотності, що передбачають ініціативність, спроможність використовувати можливості та реалізовувати ідеї, створювати цінності для інших у будь-якій сфері життєдіяльності; здатність до активної участі в житті суспільства, керування власним життям і кар'єрою; уміння розв'язувати проблеми; готовність брати відповідальність за прийняті рішення; здатність працювати в команді для планування і реалізації проєктів, які мають культурну, суспільну або фінансову цінність тощо. Окреслюючи зміст програми, автори вказують, як за допомогою проєктної діяльності можна забезпечити не лише вивчення таких тем як арифметична та геометрична прграсії, але й продемонструвати реальні процеси, які ними описуються. Саме тому, визначаючи види навчальної діяльності при вивченні цієї теми, автори пропонують розв'язування компетентнісно орієнтованих задач, математичними моделями яких є арифметична та геометрична прогресії.

Отже, виходячи з Державного стандарту базової середньої освіти та рекомендацій авторів модельних навчальних програм, задачі економічного змісту можуть пропонуватись до розв'язання на уроках математики/алгебри впродовж всього освітнього процесу.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Авторами було застосовано методи аналізу та порівняльного аналізу вітчизняних та зарубіжних наукових і методичних джерел, присвячених різним аспектам застосування задач економічного змісту, навчальної літератури і навчальних програм з проблеми дослідження, метод математичного моделювання, зроблено узагальнення власного педагогічного досвіду з викладання математики та застосування освітніх технологій.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Формування математичної компетентності учнів відбувається, в значній мірі, за рахунок практичної спрямованості освітнього процесу, встановлення міжпредметних зв'язків, що сприяє підвищенню пізнавального інтересу учнів до вивчення математики, рівня загальної та математичної культури, набуття досвіду використання отриманих математичних знань для вирішення реальних практичних задач, що виникають у повсякденному житті. Серед задач практичного змісту в окремий клас виділено економічні задачі, які сприяють розвитку предметної математичної та ключової компетентності підприємливості та фінансової грамотності здобувачів освіти та реалізації наскрізної лінії «Підприємливість і фінансова грамотність». В статті ми зупинились на задачах фінансових розрахунків.

Математичні задачі фінансових розрахунків виконують наступні функції:

– освітню функцію, оскільки задачі спрямовані на формування в учнів системи знань, вмінь та навичок на різних етапах навчання;

– розвиваючу функцію, тому що задачі сприяють осмислюванню нових понять, виробленню умінь та навичок застосувати здобуті знання на практиці та робити певні висновки;

– виховну функцію, бо за допомогою такого класу задач учні набувають економічну та фінансову грамотність;

– контролюючу функцію, яку має будь-яка навчальна задача.

Фінансова грамотність учнів формується на уроках математики при розв'язуванні задач на:

– доходи та витрати;

– планування бюджету;

– кредитування;

– інвестування;

– особисті збереження.

Саме тому вчитель має поступово пояснювати, що поняття доходів включає в себе усі види фінансових надходжень. Це можуть бути: заробітна платня, доходи від комерційної діяльності, банківських вкладів, цінних паперів та ін. До витрат від комерційної діяльності відносять уві витрати, які пов'язані з виробництвом та реалізацією продукції.

Обговорюючи з учнями питання планування бюджету слід зазначити, що існує декілька його рівнів: рівень родини, рівень підприємства та рівень держави. Сімейний бюджет – це план регулювання грошових доходів і витрат сім'ї, що складається, зазвичай, на місячний строк у вигляді таблиці. Баланс сімейних доходів і витрат – це фінансовий план, підсумовані доходи і витрати родини за певний період часу. Важливою темою для обговорення в рамках сімейного бюджету є особисті заощадження населення – гроші, які залишаються у громадян від їх доходів після того, як вони здійснюють всі необхідні їм витрати. На рівні держави бюджет – це документ, у якому, як правило, плануються всі річні доходи та витрати держави. Він містить багато різних джерел формування та напрямків витрат.

Наступний крок – пояснення термінів «кредитування» та «інвестування», яке може відбуватися і на уроках математики, оскільки ці поняття засновані певних математичних діях. Кредитування – це вид банківської діяльності, під час якої банки надають кредити юридичним (підприємствам) або фізичним (громадянам) особам гроші у тимчасове використання. За таке користування грошима, той хто його отримує (позичальник), повинен у визначений у кредитному договорі строк повернути усю суму кредиту (тіло кредиту), а також сплатити певну суму (винагороду банкові) грошей за користування грошима. Сума винагороди визначається залежно від ставки відсотку, за якою відбувалось кредитування. Інвестування – це процес вкладення грошей у будь-яке підприємство, проєкт, стартап з метою отримання відсотку прибутку у випадку комерційної ефективності проєкту, тобто у випадку, якщо він буде прибутковим. Прибуток – сума грошей, яка залишається у власності підприємства після здійснення всіх необхідних витрат для реалізації роботи підприємства.

Розуміння означених питань, в більшості випадків, реалізується через відсоткові розрахунки, тому зупинимось на економічній складовій теми «Прогресії» в курсі алгебри 9 класу. Задачі фінансового змісту на прогресії демонструють використання математичних методів у практичній діяльності банків та повсякденному житті громадян країни. Вони навчають учнів реальній взаємодії з банками, надають ним знання з того, як можна використовувати власні тимчасово вільні кошти для отримання пасивного доходу.

Нехай S гривень – первинна сума вкладу (сума грошей, яку вкладник (людина) приносить до банку та кладе на свій депозитний рахунок для отримання від нього прибутку відповідно встановленого розміру банківського відсотку за депозитами); i – щорічний відсоток за депозитом; n – кількість років, на які відкривається депозит. Таке нарахування називається нарахуванням *простих відсотків*. Суму, яку зможе отримати вкладник через n років, позначимо як S_n. Тоді за n років сума прибутку за депозитом складе $\frac{S \cdot i \cdot n}{100}$ гривень. Загальна сума грошей, яку отримає вкладник від банку по закінченню строку депозиту (первинна сума вкладу та сума нарахованих відсотків за час депозиту), дорівнює $S + \frac{S \cdot i \cdot n}{100} = S \cdot \left(1 + \frac{i \cdot n}{100}\right)$ гривень.

Таким чином, через n років при нарахуванні простих відсотків отримуємо грошову суму S_n гривень, що обчислюється за формулою

$$S_n = S \cdot \left(1 + \frac{i \cdot n}{100}\right).$$

Зрозуміло, що нарахування простих відсотків пов’язано з арифметичною прогресією.

Після розгляду нарахування простих відсотків переходимо до нарахування *складних відсотків*. В першу чергу, необхідно пояснити принципову відміну цього нарахування від порядку нарахування, який використовувався під час нарахування простих відсотків.

Якщо гроші вкладені в банк на депозитний рахунок з декількома періодами нарахування відсотків, то відсотки можуть бути нараховані наступним чином. Після настання першого періоду нарахування суми відсотків за депозитом сума цих відсотків у грошовому вигляді додається до первинної суми депозитного вкладу, і у наступному періоді нарахування відсотків за депозитом базою для нарахування цих відсотків стає вже не первинна кількість вкладених на депозит грошей, а сума первинного депозитного вкладу плюс додана до неї сума відсотків, нарахована за цим депозитом у перший період нарахування. Тобто, база нарахування відсотків збільшується, і, таким чином, вкладник отримує можливість протягом другого періоду нарахування відсотків за депозитом отримати вже більшу суму відсотків у грошовому вимірі. І так буде нараховуватись кожного разу під час нарахування суми відсотків за депозитом, тобто база нарахування кожного разу буде збільшуватись. Цей спосіб нарахування відсотків за депозитом (використання складних відсотків) є для вкладника більш вигідним, порівняно зі способом нарахування простих відсотків за депозитом.

Математична модель нарахування складних відсотків матиме наступний вигляд.

Нехай банк нараховує i відсотків річних за депозитом. Вкладена сума дорівнює S гривень, а сума, яка буде на рахунку через n років, дорівнює S_n гривень.

Тоді через рік на рахунку з’явиться сума: $S_1 = S + \frac{i \cdot S}{100} = S \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)$ гривень, тобто початкова сума збільшиться у $1 + \frac{i}{100}$ разів. За наступний рік сума S_1 збільшиться у стільки ж разів, і тому за два роки на рахунку буде вже сума: $S_2 = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{100}\right) \cdot S_1 = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{100}\right) \cdot S = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{100}\right)^2 \cdot S$, за три роки сума: $S_3 = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{100}\right)^3 \cdot S$, через n років отримуємо грошову суму при нарахуванні складних відсотків, що дорівнює $S_n = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{100}\right)^n \cdot S$ гривень.

Хочемо звернути увагу на те, що в підручниках алгебри для 9 класу під час розгляду властивостей арифметичної та геометричної прогресій, на нашу думку, недостатньо уваги приділено підкріпленню цих тем фінансовим змістом: пояснення схеми нарахування простих та складених відсотків за депозитом та встановлення їх зв'язку з прогресіями є не в кожному підручнику, терміни «депозит», «вкладник» не визначено, недостатньою є кількість компетентнісних задач на фінансові розрахунки.

У навчальних програмах з математики зазначено, що використання прикладів, ситуацій з реального життя, у тому числі його економічної складової, є дуже важливим, бо для учнів повинні не тільки оволодіти математичними знаннями, а й водночас набути знань з того, де і як можна користуватись отриманими знаннями. Важливо надати учням можливість застосувати матеріал щодо арифметичної та геометричної прогресії на прикладах фінансових розрахунків, скористатись отриманими знаннями у реальному житті.

Для ознайомлення учнів з основами банківської діяльності та набуття ними практичного досвіду з використання математичних знань для здійснення фінансових операцій на прикладах, максимально приближених до реальних ситуацій, ми пропонуємо запровадити кейс-технологію.

Кейс-технологію використовують для спільного аналізу, обговорення та вибору учнями найбільш доцільного рішення для конкретного випадку, ситуації, історії, які й називаються кейсами. Ситуативні вправи чи кейси мають чітко виражений характер і мету. Вони пов’язані з навчальною проблемою чи ситуацією, яку слід розв’язати. Укладачі кейсів обирають ситуацію з певної галузі, з діяльністю якої вони прагнуть ознайомити учнів та детально описують всі вихідні дані, а також проблему, яку треба вирішити. Також завданням кейсу можуть бути розрахунки, які необхідно зробити, або спеціальний набір навчальних матеріалів, які даються учню для вивчення. Залежно від кейсу учні можуть працювати самостійно або у групах, розв’язувати отримане завдання, дискутувати, і, таким чином, набувати знань з практичної сторони дисципліни, яку вивчають. Таке моделювання життєвої ситуації та рішення, які приймають учні на основі комплексу знань та власного досвіду, сприяє формуванню та розвитку їх компетентності та наскрізних вмінь.

Методика навчання за допомогою кейсів відрізняється від суто теоретичного подання інформації, оскільки передбачає надання учням можливості набути практичних знань. «Case study» використовується у різних закладах освіти, в тому числі, і закладах вищої освіти, наприклад, у Гарвардському університеті кейси застосовуються під час навчання студентів, взагалі, всіх спеціальностей. Використання цього методу розпочалося в системі освіти США ще на початку ХХ століття в галузі права та медицини, провідна роль у використанні методу «case study» належить Гарвардській школі бізнесу. 1921 року було видано перший збірник кейсів. Згодом метод «case study» перетворився на один з основних методів навчання в університетах США та інших країн (Ворона, 2016).

Для здійснення розрахунків за іпотечним кредитуванням на прикладах, максимально наближених до реальних ситуацій, ми розробили кейс на тему «Іпотечне кредитування». Тип створеного кейсу – кейс-ситуація, яка вимагає від учня аналізу певної ситуації та застосування математичного апарату (робота з арифметичною та геометричною прогресіями). Оскільки робота учнів з таким кейсом потребує часу на ознайомлення з матеріалом, бажано запропонувати його у якості домашньої роботи. Під час уроку учні проводять математичні розрахунки, аналізують та обговорюють отримані результати.

Наводимо зміст пропонованого кейсу та завдань для самостійної роботи учнів.

Іпотечне кредитування: суть та основні поняття.

Абсолютна більшість людей прагне володіти власним житлом. Це надає людям можливість отримати свободу та незалежність, власний простір, можливість створити власну сім'ю. Володіння власним нерухомим майном надає людям більше впевненості у їх майбутньому. Саме для реалізації можливості найскорішого отримання нерухомого майна (квартири або будинку) і існує іпотечне кредитування. Розглянемо його сутність та особливості.

Іпотечне кредитування – це цілеспрямоване, довгострокове кредитування фізичних осіб банківськими установами, для купівлі власного нерухомого майна (квартири або будинку) (Пересада, 2003). Визначення дає зрозуміти, що кредит видається лише на придбання житлової нерухомості та має довгостроковий характер і складає від десяти до тридцяти років. Крім того, іпотечне кредитування характеризується відносно низькою ставкою проценту за цим кредитом у порівнянні з кредитними ставками за іншими видами кредитування. Ставка проценту за кредитом – це відсоток від загальної суми кредиту, який отримала людина у банку, тобто, це плата за використання банківських грошей.

Надання іпотечного кредиту є корисним як для кредитодавця, так і для кредитоотримувача. Банку вигідно отримувати гроші за використання отримувачами іпотечного кредиту у довгостроковій перспективі. Для отримувачів іпотечних кредитів – це можливість отримати від банку гроші на покупку житла.

Для здійснення кредитної іпотечної угоди банк видає гроші, клієнт отримує гроші, платить їх власнику квартири за квартиру, а потім протягом кредитного іпотечного періоду, зазначену у іпотечному договорі, сплачує банку платежі, що включають в себе частину суми кредиту (тіло кредиту) та суму відсотку за користування кредитом (ставка кредиту). Процес іпотечного кредитування може бути представлений схематично (Рис. 1).

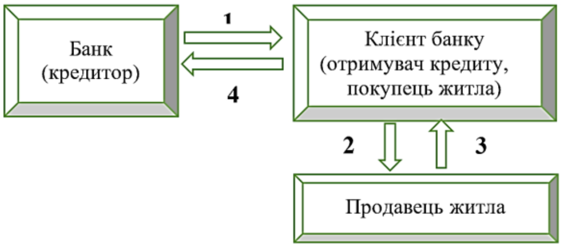


Рис. 1. Схема іпотечного кредитування

1 – Сума кредиту (банк надає клієнту кредит);

2 – Купівля житла (сума, яку покупець надає продавцю житла, вона може складатись цілком з кредитних грошей, а може частково складатись з кредитних коштів, а частково з власних коштів покупця);

3 – Передача права власності на житло (покупець отримує право володіти житлом та вже у ньому проживати);

4 – Щомісячні виплати клієнтом банку за користування кредитом (ставка відсотку за кредитом, а також частка тілу кредиту).

Джерело: авторська розробка.

Математичні розрахунки, пов'язані з іпотечним кредитуванням

Під час здійснення іпотечного кредитування виникає потреба розрахувати економічні показники, без яких іпотечне кредитування є взагалі неможливим.

До цих показників відносяться:

– сума кредиту (його ж в економічній науці також називають тілом кредиту, тобто це саме та сума, яку банк надає людині, яка звернулась за іпотечним кредитом і яку вина повинна поступово повертати банкові щомісячно, протягом реалізації кредитного договору);

– ставка відсотку за іпотечним кредитом (це відсоток від сумі кредиту, який позичальник повинен щомісячно сплачувати банку за право використання кредитних грошей);

– строк надання кредиту (скільки років позичальник буде віддавати банку кредит);

– ануїтет – постійна загальна щомісячна сума повернення позичальником доля кредиту з урахуванням суми відсотку за кредитом.

Розглянемо математичну складову процесу іпотечного кредитування.

Спочатку треба визначити суму іпотечного кредиту. Вона прописується в договорі та є обов'язковою для повернення банку в рамках строку договору іпотечного кредитування. Для цього позичальник самостійно, або за допомогою відповідного фахівця (ріелтера) знаходить необхідну йому для житла нерухомість. Визначається з її вартістю. Якщо ця вартість є відповідною до існуючих на ринку цін на подібні об'єкти нерухомості, від зв'язується з банком та подає заявку за іпотечний кредит.

Банк в свою чергу розглядає два основних факти. Перший – здійснює оцінку вартості нерухомості, другий – визначає платоспроможність позичальника (його постійні фінансові доходи). Якщо банк все влаштовує, він починає складати кредитну угоду.

Для складання кредитної угоди банк по-перше дізнається розмір встановленої НБУ (Національним банком України) ставки іпотечного кредитування. На теперішній час в Україні вона складає 14% річних. А далі, використовуючи суму кредиту (тіло кредиту), можливий строк іпотечного кредитування та цей відсоток як основу, він починає розраховувати суми щомісячних кредитних виплат.

За використання кредиту можуть бути нараховані або прості, або складні відсотки. Прості відсотки – нарахування відсотків здійснюється щорічно в одному й тому ж самому розмірі та визначається як грошовий вираз суми відсотку за кредитом від загального розміру тілу кредиту. Такі відсотки легко розраховуються, але сумарно за весь час кредитування є дуже високими, у тому числі порівняно з використанням системи нарахування складних відсотків. Це можна зробити наступним чином.

Спочатку слід визначити щорічну суму повернення тілу кредиту:

$$S_{\text{пов}} = \frac{S\text{кр}}{t},$$

де Sкр – сума іпотечного кредиту; t – кількість років, на яку видається кредит.

Щорічна сума виплат простих відсотків за використання кредиту:

$$\text{В}=\frac{S\text{кр}\cdot i}{100},$$

де Sкр – сума іпотечного кредиту; i – річна ставка відсотку за кредитом.

Загальна сума щорічних виплат за кредитом складе в такому випадку:

$$C_{\text{з.в.}} = S_{\text{пов}} + B, \text{ або } C_{\text{з.в.}}=\frac{S\text{кр}}{t} + \frac{S\text{кр}\cdot i}{100}.$$

Загальна сума виплат за кредитом за весь період кредитування тоді:

$$\text{З}_{\text{с.в.}} = C_{\text{з.в.}} \cdot t$$

Впродовж уроку одна група учнів отримує умову задачі:

Задача. Нехай позичальник бере в банку кредит на суму 50000 грн., на період кредитування 10 років за простими відсотками. Ставка банківського відсотку за кредитом в Україні складає 14%.

Завдання:

1. Визначити щорічну суму повернення тілу кредиту, щорічну суму виплат простих відсотків за використання кредиту, загальну суму щорічних виплат за кредитом та загальну суму виплат за кредитом за весь період кредитування.

2. Провести аналіз отриманих результатів та підготувати відповіді на наступні запитання: кому більш вигідна така форма розрахунку за кредитом? Чому банк буде втрачати певну кількість позичальників?

В ході опрацювання умов задачі учні отримують такі результати:

Щорічна сума повернення тілу кредиту:

$$S_{\text{пов}} = \frac{S\text{кр}}{t} = \frac{50000}{10} = 5000 \text{ (грн.)}$$

Щорічна сума виплат простих відсотків за використання кредиту:

$$B = \frac{S\text{кр}*i}{100} = \frac{50000*14}{100} = 7000 \text{ (грн.)}$$

Загальна сума щорічних виплат за кредитом складе:

$$C_{\text{з.в.}} = S_{\text{пов.}} + B = 5000 + 7000 = 12000 \text{ (грн.)}$$

Загальна сума виплат за кредитом за весь період кредитування:

$$\text{З}_{\text{с.в.}} = C_{\text{з.в.}} \cdot t = 12000 \cdot 10 = 120000 \text{ (грн.)}$$

Якщо виплати за кредитом, відповідно до кредитного договору будуть здійснюватися щомісячно, то загальний щомісячний платіж за кредитом з урахуванням повернення тілу кредиту та суми сплати відсотків за ним складе:

$$\text{З}_{\text{с.в. (м)}} = C_{\text{з.в.}} : 12 = 12000 : 12 = 1000 \text{ (грн.)}$$

В ході аналізу отриманих результатів та їх обговорення учні дійдуть наступних висновків:

– Кожного року за кредитом сплачуються однакові суми повернення тілу кредиту та однакові суми сплати відсотків за кредитом.

– Така форма розрахунку за кредитом є швидкою, легкою та вигідною для банку, тому що сума відсотків за кредитом кожного разу розраховується від первісної суми кредиту – тілу кредиту. Банку також вигідна довгостроковість іпотечного кредитування.

– Оскільки період кредитування може досягати тридцяти років при такому способу нарахування суми відсотків він буде дуже дорогим для позичальника.

– Банк виграє на кожному окремому позичальнику, за рахунок того, що вони сплачують йому великі суми за користування кредитом. Але в той же час банк втрачає певну кількість позичальників, яким при такій великій вартості кредиту, він стає недоступним.

При кредитуванні за простим відсотком тіло кредиту позичальник починає сплачувати з самим першим платежем за кредитом, тобто сума кредиту постійно знижується. Однак, позичальник у продовж всього періоду кредитування сплачує суму відсотків за кредитом таку, немов він весь час кредитування користується усією сумою кредиту.

Друга група учнів для наочності отримує таку ж умову задачі, але зміниться спосіб нарахування суми відсотків за користування кредитними коштами. Будуть використані складні відсотки.

Завдання:

1. Визначити щорічну суму повернення тілу кредиту, щорічну суму виплат складних відсотків за використання кредиту, загальну суму щорічних виплат за кредитом та загальну суму виплат за кредитом за весь період кредитування.

2. Провести аналіз отриманих результатів та підготувати відповіді на наступні запитання: кому більш вигідна така форма розрахунку за кредитом? Чому банк не буде втрачати позичальників?

В ході опрацювання умов задачі учні отримують такі результати.

Щорічна сума повернення тілу кредиту буде визначатись так само, як і у випадку простих відсотків:

$$S_{\text{пов}} = \frac{S\text{кр}1}{t},$$

де $S\text{кр}1$ – сума іпотечного кредиту; i – річна ставка відсотку за кредитом.

В рамках прикладу вона складе: 50000 : 10 = 5000 (грн.)

Далі учні обчислюють по рокам як буде змінюватись щорічна сума відсотків за кредитом, залежно від зміни, точніше – зменшення суми тілу кредиту, яку позичальнику необхідно сплачувати (повертати) банку.

У першому році ця сума складатиме

$$B_1 = \frac{S\text{кр}1 \cdot i}{100},$$

де B_1 – сума відсотків у першому році.

$$B_1 = 50000 \cdot 14 : 100 = 7000 \text{ (грн.)}$$

Тоді загальна сума виплат за рік складатиме $З_{\text{с.в.}1} = S_{\text{пов}} + B_1$

$$З_{\text{с.в.}1} = 5000 + 7000 = 12000 \text{ (грн.)}$$

Або її можна представити так: $З_{\text{с.в.}1} = \frac{S\text{кр}}{t} + \frac{S\text{кр} \cdot i}{100}$

Також її можна вдосконалити так: $З_{\text{с.в.}1} = S_{\text{кр}}\left(\frac{1}{t} + \frac{i}{100}\right)$.

У другому році сума тілу кредиту, який залишилось повернути банку, зменшиться на ту долю кредиту, яку вже було сплачено в першому році. Тобто вона складатиме $S_{\text{кр}2} = S_{\text{кр}1} - S_{\text{пов}}$

$$S_{\text{кр}2} = 50000 – 5000 = 45000 \text{ (грн.)}$$

Тоді сума відсотків за другий рік буде обчислюватись вже не від загальної суми тілу кредиту (50000 грн.), а від зазначеної різниці (45000 грн.).

У вигляді формули це буде виглядати наступним чином

$$B_2 = \frac{S\text{кр}2 \cdot i}{100} \text{ або } B_2 = \frac{(S\text{кр}1 - S\text{пов}) \cdot i}{100}$$

$$B_2 = (50000 - 5000) \cdot 14 : 100 = 45000 \cdot 14 : 100 = 6300 \text{ (грн.)}$$

Загальна сума виплат за другий рік кредитування складатиме: $З_{\text{с.в.}2} = S_{\text{пов}} + B_2$

$$З_{\text{с.в.}2} = S_{\text{пов}} + \frac{(S\text{кр}1 - S\text{пов}) \cdot i}{100}$$

$$З_{\text{с.в.}2} = 5000 + 6300 = 11300 \text{ (грн.)}$$

Для порівняння, у другому році загальна сума щорічних виплат банку вже зменшується. В грошовому виразі (абсолютне) зменшення становить: $\Delta\, З_{\text{с.в.}} = 12000 – 11300 = 700$ (грн.)

Відносне зменшення становить: 700 : 12000 · 100 = 5,83 (%).

Якщо порівняти лише суми сплати відсотків за користування кредитом, різниця буде ще більш наглядною.

$$\Delta\, B = 7000 – 6300 = 700 \text{ (грн.)}$$

Відносне зменшення становить:

$$700 : 7000 \cdot 100 = 10 \text{ (\%).}$$

Сума залишку тілу кредиту, від якої буде обчислюватись відсоток за кредитом на третьому році відповідна бути визначена так $S_{\text{кр}3} = S_{\text{кр}2} - S_{\text{пов}}$.

У межах числового прикладу це становитиме: $S_{\text{кр}3}$ = 45000 – 5000 = 40000 (грн.)

Але ми вже знаємо, що: $S_{\text{кр}2} = S_{\text{кр}} - S_{\text{пов}}$.

Тоді ми можемо виразити $S\text{пов}_3$ через $S_{\text{кр}}$ та $S_{\text{пов}}$ наступним чином:

$$S_{\text{кр}3} = S_{\text{кр}1} - S_{\text{пов}} - S_{\text{пов}} = S_{\text{кр}} - 2 \cdot S_{\text{пов}}$$

$$S_{\text{кр}3} = 50000 – 5000 – 5000 = 40000 \text{ (грн.)}$$

$$S_{\text{кр}3} = 50000 – 2 \cdot 5000 = 50000 – 10000 = 40000 \text{ (грн.)}$$

Сама сума відсотків на третьому році відповідно складатиме $B_3 = \frac{S\text{кр}3 \cdot i}{100}$

Або використовуючи тільки $S_{\text{кр}1}$ та $S_{\text{пов}}$ формула матиме наступний вигляд:

$$B_3 = \frac{(\text{Sкр}1 - 2 \cdot \text{Sпов}) \cdot i}{100}$$

$$B_3 = (50000 – 2 \cdot 5000) \cdot 14 : 100 = 5600 \text{ (грн.)}$$

Загальна сума сплати за кредитом у третьому році становить: $З_{\text{с.в.}3} = S_{\text{пов}} + B_3$

$$З_{\text{с.в.}3} = S_{\text{пов}} + \frac{(S\text{кр}2 - S\text{пов}) \cdot i}{100}$$

$$З_{\text{с.в.}3} = 5000 + 5600 = 10600 \text{ (грн.)}$$

І далі за цим самим принципом у четвертому році сума повернення тілу кредиту буде:

$$S_{\text{кр}4} = S_{\text{кр}3} - S_{\text{пов}} = S_{\text{кр}1} - 2 \cdot S_{\text{пов}} - S_{\text{пов}} = S_{\text{кр}1} - 3 \cdot S_{\text{пов}}$$

А сума відсотків:

$$B_4 = \frac{S\text{кр}4 \cdot i}{100}$$

$$B_4 = \frac{(\text{Sкр}1 - 3 \cdot \text{Sпов}) \cdot i}{100}$$

У п'ятому році:

$$S_{кр5} = S_{кр4} - S_{пов}$$
$$S_{кр5} = S_{кр1} - 3 \cdot S_{пов} - S_{пов} = S_{кр1} - 4 \cdot S_{пов}$$
$$В_5 = \frac{Sкр5 \cdot i}{100}$$
$$B_5 = \frac{(Sкр1 - 4 \cdot Sпов) \cdot i}{100} \text{ тощо.}$$

У десятому році:

$$S_{кр10} = S_{кр9} - S_{пов}$$
$$S_{кр10} = S_{кр1} - 9 \cdot S_{пов}$$
$$B_{10} = \frac{Sкр10 \cdot i}{100}$$
$$B_{10} = \frac{(Sкр1 - 9 \cdot Sпов) \cdot i}{100}$$

Тобто інакше – у загальному вигляді, можна записати так:

$$S_n = S_{кр} - (n\ \text{-}1) \cdot S_{пов}, \text{ де } S_{пов} = \frac{Sкр1}{t}.$$

Тоді формула для суми відсотку матиме такий вигляд:

$$B_n = \frac{Sn \cdot i}{100}, \text{ або } B_n = \frac{(Sкр1 - (n-1) \cdot Sпов) \cdot i}{100}.$$

В ході аналізу отриманих результатів та їх обговорення формують висновки:

– Завдяки сплаті складних відсотків за користування кредитом, сума цієї сплати зменшується.

– Був зроблений висновок, кредит за складними відсотками більш привабливий, більш доступний для позичальників, а значить, банк може розраховувати на збільшення їх кількості і буде у виграші за рахунок збільшення кількості позичальників.

Результати напрацювання обох груп учнів були оформлюють у вигляді підсумкової таблиці 1.

Таблиця 1. Порівняння сум сплати відсотків за використання іпотечного кредиту при нарахуванні простих та складних відсотків

Рік кредитування	Сума сплати за простими відсотками, грн.	Сума сплати за складними відсотками, грн.	Абсолюте відхилення, грн.
1	7000	7000	0
2	7000	6300	700
3	7000	5600	1400
4	7000	4900	2100
5	7000	4200	2800
6	7000	3500	3500
7	7000	2800	4200
8	7000	2100	4900
9	7000	1400	5600
10	7000	700	6300
За весь період кредитування	70000	38500	31500

Джерело: авторська розробка.

У підсумку учні побачать, що загальна сума виплат відсотків за різними видами обчислення відсотків суттєво відрізняється. Загальна різниця складає:

38500 – 31500 = 7000 (грн.)

Таким чином вони дійдуть до висновку, що використання складних відсотків робить іпотечне кредитування більш привабливим для позичальників.

Не зважаючи на переваги складних відсотків, слід відмітити, що сума сплати відсотків за кредитом є неоднаковою протягом періоду кредитування, а такою, що зменшується протягом кожного наступного періоду. Це добре, але, зазвичай позичальники отримують приблизно однаковий постійний дохід. Тому сплата більш високої суми на початку періоду є досить важкою для них. В такому випадку для полегшення сплати за кредит банки можуть використовувати так звані ануїтетні платежі. Ануїтет надає можливість позичальнику сплачувати протягом усього періоду кредитування одну і теж саму суму відсотків за кредитом, тобто середню суму. В рамках розглянутого прикладу вона буде наступною.

У випадку складних відсотків, з урахуванням суми тілу кредиту:

(50000 + 38500) : 10 = 88500 : 10 = 8850 (грн.) у рік.

8850 : 12 = 737,5 (грн.) у місяць.

В умовах сплати простих відсотків це було:

(50000 + 70000) : 10 = 120000 : 10 = 12000 (грн.) у рік.

12000 : 12 = 1000 (грн.) у місяць.

Для наочності отриманих результатів доцільно представити їх у вигляді таблиці 2.

У таблиці 2 представлено порівняльні дані за три види періодів: рік, місяць, день. Для позичальника важливо знати розміри щорічної та щомісячних сплат. А для банків важливі також і щоденні сплати. Вони потрібні у випадках дострокові сплати позичальником кредиту.

Отже, при оформленні кредитного договору в ньому може бути встановлена щорічна сума можливого дострокового повернення кредиту. Це потрібно для того, щоб банк у своїй діяльності міг розраховувати на мінімально відомий час існування кредиту і залежно від цього планувати свої гарантовані доходи.

Таблиця 2. Зведена таблиця результатів розрахунків за двома видами нарахування відсотків

Період	Тіло кредиту, грн.		Сума сплати відсотків за кредитом, грн.		Усього виплати за кредитом, грн.	
	прості відсотки	складні відсотки	прості відсотки	складні відсотки	прості відсотки	складні відсотки
рік	5000	5000	7000	3850	12000	850
місяць	417	417	583	321	1000	38
день	14	14	19	11	33	5

Джерело: авторська розробка.

Слід наголосити, що роль вчителя при застосуванні кейс-технології суттєво відрізняється від традиційної, він передає всі свої повноваження учням, його керівна роль зводиться до мінімуму, проте залежно від ситуації та запитів учнів він може виступати в ролі фасилітатора, модератора чи консультанта. Для самостійного виконання учнями ми рекомендуємо наступні завдання.

Задання №1.

Вартість квартири, яку хоче придбати позичальник 1 млн. грн. Банк пропонує іпотечний кредит строком на 20 років зі ставкою відсотку 9%. Сума первинного внеску за отриманні кредиту повинна бути не менше 10% від вартості житла, що купується. Розрахуйте щорічні та щомісячні суми, які буде повинен сплачувати позичальник за цим кредитом протягом усього періоду кредитування.

Ця задача може мати різні варіанти вихідних даних. Їх приклади можна представити у вигляді таблиці 3.

Таблиця 3. Варіанти вихідних даних

Номер варіанту	Вартість квартири, млн. грн.	Сума первинного внеску, % від вартості квартири	Ставка відсотку за іпотечним кредитом, %	Строк кредиту, років
1	1,1	10	9	15
2	1,2	9	8	16
3	1,3	8	7	17
4	1,4	7	8	18
5	1,5	8	9	17
6	1,6	9	8	16
7	1,7	10	7	15

Джерело: авторська розробка.

Крім цієї інформації до вихідних даних для кейсу з іпотечного кредитування можна надавати також наступні дані: склад членів сім’ї, яка планує взяти іпотеку, щомісячний дохід кожного члену сім’ї (його можна скласти як в абсолютному – грошовому вигляді, та і структурно у вигляді долі кожного члену сім’ї у відсотках від загального сімейного бюджету), розглянути структуру доходів та витрат такої сім’ї (яка доля доходу кожного члена сім’ї у загальних доходах та які вони мають).

Завдання №2.

Родина у складі двох дорослих людей (наприклад молода сім’я) мріє про власну квартиру для планування свого майбутнього життя. На ринку нерухомості, за допомогою фахівців з нерухомості вони знайшли квартиру, у котрій хотіли б жити. Ціна квартири складає 1,8 млн. грн. Вони звернулись до банку, щоб дізнатись існуючих умов придбання квартири у іпотеку. Банк надав їм наступну інформацію. Строк іпотечного кредитування для молодих сімей (вік кожного з членів подружжя не перевищує 30 років) складає максимально 30 років, мінімальний строк – 15 років. Ставка банківського відсотку за іпотечними кредитами – 9%. Здійснення виплат за кредитом – щомісячне. Первинний платіж – не потрібний. Щомісячні доходи чоловіка – 27000 гривень, жінки – 18000 гривень. Витрати на комунальні послуги у новій квартирі в середньому складатимуть 4000 гривень на місяць. Витрати, пов’язані з продуктами харчування, – 25% сімейного бюджету. Необхідно визначити: загальний щомісячний та щорічний дохід сім’ї, структуру сімейного доходу, щорічну та щомісячну суми повернення тілу кредиту та відсотків за користування кредитом у разі строку кредитування 30 років.

ОБГОВОРЕННЯ

Пропонований кейс за темою «Іпотечне кредитування» надає можливість учням закріпити та застосувати отримані під час навчання математики знання і вміння, набути досвіду щодо економічних розрахунків, ознайомитись з банківською діяльністю, а також отримати досвід прийняття рішення про отримання іпотечного кредиту залежно від банківських умов. Таким чином, надбані знання отримають безпосередній зв'язок з реальним життям, тому можуть стати корисними учням у їх подальшому житті та збільшити мотивацію до навчання.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Використання задач економічного змісту при вивченні теми «Числові послідовності» сприяє більш глибокому та усвідомленому розумінню необхідності оволодінням математичним апаратом, воно спрямоване на розвиток предметної математичної компетентності й ключових компетентностей учнів. Впровадження кейс-технології забезпечує практичну спрямованість освітнього процесу, позитивно впливає на підвищення пізнавального інтересу учнів до вивчення математики, формує в учнів уміння орієнтуватися в реаліях навколишньої дійсності та застосовувати отримані знання у практичній діяльності.

Хочемо відмітити, що доцільне використання задач економічного змісту є актуальною фаховою проблемою і для викладачів педагогічних вишів в рамках підготовки майбутніх вчителів математики. Науковцями напрацьовано певні методики формування підприємливості та фінансової грамотності здобувачів освіти як в рамках окремих навчальних дисциплін, так і в змісті методики навчання математики. На нашу думку, збагатити напрацьовані методики можна за рахунок застосування сучасних освітніх трендів: використання кейс-технологій, гейміфікації, цифрових технологій тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бас, С. В. (2013). Роль та місце системи прикладних задач економічного змісту у формуванні предметної математичної компетентності економіста. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології: науковий журнал*, 2 (28), 189–196.
2. Ворона, П. В. (2016). Методика «CASE STUDY» у навчальному процесі вишів при підготовці фахівців із публічного управління. *Витоки педагогічної майстерності*, 17, 46-53.
3. Лук'янова, С. М. (2010). Економічні задачі в курсі математики суспільно-гуманітарних гімназій. *Didactics of mathematics: Problems and Investigations*, 34, 102-106.
4. Мех, Л. М., & Доценко, В. В. (2018). *Задачі економічного змісту в шкільному курсі математики*. URL: http://surl.li/rjvvf
5. Бурда, М. І., Тарасенкова, Н. А., & Васильєва, Д. В. (2023). *Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти.*
6. Істер, О. С. (2023). *Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти*.
7. Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Пихтар, М. П., Рубльов, Б. В., Семенов, В. В., & Якір, М. С. (2023). *Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти.*
8. Біляніна, О. Я., Білянін, Г. І., Семчук, А. Р., Ілащук, О. Г., Мар'янчук, О. Т., & Рябий, С. І. (2023). *Модельна навчальна програма «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти*. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/29.12.2023/Alhebra.7-9.klas.Bilyanina.ta.in.29.12.2023.pdf
9. Моторіна, В. Г., & Папач, О. І. (2023). Деякі аспекти методики підготовки майбутніх учителів математики до формування підприємливості та фінансової грамотності учнів базової школи. *Актуальні питання природничо-математичної освіти. Збірник наукових праць Сумського державного педагогічного університету імені А.С.Макаренка,* 2 (22), 123-133. https://doi.org/10.5281/zenodo.10548882
10. Ткач, Ю.М. (2011). *Задачі економічного змісту в математиці*: посібник. Харків: Вид-во «Ранок».
11. Althauser, K., & Harter, C. (2016). Math and Economics: Implementing Authentic Instruction in Grades K-5. *Journal of Education and Training Studies*, 4(4). URL: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1088512.pdf
12. Civil, M., & Khan, L. H. (2001). Mathematics instruction developed from a garden theme. *Teaching Children Mathematics*, 7, 400-420. URL: http://www.nctm.org/publications/toc.aspx?jrnl=tcm
13. Weiss, I. R., & Pasley, J. D. (2004). What is high-quality instruction? *Educational Leadership*, 61(5), 24-28. http://www.ascd.org/publications/educational-leadership.aspx
14. Posnanski, T.J., Schug, M. C., & Schmitt, T. (2008). *Can students learn economics and personal finance specialized elementary school?* URL: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ782147.pdf
15. Yunikawati, N. A., Priambodo, M. P., Puspasari, E. Y., & Istiqomah, N. (2021). Is it Important for Elementary School Students to Learn the Basics of Finance? *KnE Social Sciences*, 5(8), 41–48. https://doi.org/10.18502/kss.v5i8.9346.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bas, S. V. (2013). Rol ta mistse systemy prykladnykh zadach ekonomichnoho zmistu u formuvanni predmetnoi matematychnoi kompetentnosti ekonomista [The role and place of the system of applied problems of economic content in the formation of the subject mathematical competence of the economist]. *Pedahohichni nauky: teoriia, istoriia, innovatsiini tekhnolohii: naukovyi zhurnal – Pedagogical sciences: theory, history, innovative technologies: scientific journal*, 2 (28), 189–196. (in Ukrainian)
2. Vorona, P. V. (2016). Metodyka «CASE STUDY» u navchalnomu protsesi vyshiv pry pidhotovtsi fakhivtsiv iz publichnoho upravlinnia [The "CASE STUDY" method is used in the educational process of universities in the training of specialists in public administration]. *Vytoky pedahohichnoi maisternosti – Origins of pedagogical skill*, 17, 46-53. (in Ukrainian)
3. Lukianova, S. M. (2010). Ekonomichni zadachi v kursi matematyky suspilno-humanitarnykh himnazii [Economic problems in the mathematics course of social and humanitarian gymnasiums]. *Didactics of mathematics: Problems and Investigations*, 34, 102-106. (in Ukrainian)
4. Mekh, L. M., & Dotsenko, V. V. (2018). *Zadachi ekonomichnoho zmistu v shkilnomu kursi matematyky [Problems of economic content in the school mathematics course]*. URL: http://surl.li/rjvvf (in Ukrainian)
5. Burda, M. I., Tarasenkova, N. A., & Vasylieva, D. V. (2023). *Modelna navchalna prohrama «Alhebra. 7-9 klasy» dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Model curriculum "Algebra. 7-9 grades" for institutions of general secondary education].* (in Ukrainian)
6. Ister, O. S. (2023). *Modelna navchalna prohrama «Alhebra. 7-9 klasy» dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Model curriculum "Algebra. 7-9 grades" for institutions of general secondary education].* (in Ukrainian)
7. Merzliak, A. H., Nomirovskyi, D. A., Pykhtar, M. P., Rublov, B. V., Semenov, V. V., & Yakir, M. S. (2023). *Modelna navchalna prohrama «Alhebra. 7-9 klasy» dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Model curriculum "Algebra. 7-9 grades" for institutions of general secondary education].* (in Ukrainian)
8. Bilianina, O. Ya., Bilianin, H. I., Semchuk, A. R., Ilashchuk, O. H., Marianchuk, O. T., & Riabyi, S. I. (2023). *Modelna navchalna prohrama «Alhebra. 7–9 klasy» dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Model curriculum "Algebra. 7-9 grades" for institutions of general secondary education].* URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/29.12.2023/Alhebra.7-9.klas.Bilyanina.ta.in.29.12.2023.pdf (in Ukrainian)
9. Motorina, V. H., & Papach, O. I. (2023). Deiaki aspekty metodyky pidhotovky maibutnikh uchyteliv matematyky do formuvannia pidpryiemlyvosti ta finansovoi hramotnosti uchniv bazovoi shkoly [Some aspects of the methodology of training future mathematics teachers for the formation of entrepreneurship and financial literacy of elementary school students]. Aktualni pytannia pryrodnycho-matematychnoi osvity. *Zbirnyk naukovykh prats Sumskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni A.S.Makarenka – Current issues of science and mathematics education. Collection of scientific works of A.S. Makarenko Sumy State Pedagogical University*, 2 (22), 123 – 133. https://doi.org/10.5281/zenodo.10548882 (in Ukrainian)
10. Tkach, Yu.M. (2011). *Zadachi ekonomichnoho zmistu v matematytsi [Problems of economic content in mathematics]*. Kharkiv: Vyd-vo «Ranok». (in Ukrainian)
11. Althauser, K., & Harter, C. (2016). Math and Economics: Implementing Authentic Instruction in Grades K-5. *Journal of Education and Training Studies*, 4(4). URL: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1088512.pdf

12. Civil, M., & Khan, L. H. (2001). Mathematics instruction developed from a garden theme. *Teaching Children Mathematics*, 7, 400-420. URL: http://www.nctm.org/publications/toc.aspx?jrnl=tcm
13. Weiss, I. R., & Pasley, J. D. (2004). What is high-quality instruction? *Educational Leadership*, 61(5), 24-28. http://www.ascd.org/publications/educational-leadership.aspx
14. Posnanski, T.J., Schug, M. C., & Schmitt, T. (2008). *Can students learn economics and personal finance specialized elementary school?* URL: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ782147.pdf
15. Yunikawati, N. A., Priambodo, M. P., Puspasari, E. Y., & Istiqomah, N. (2021). Is it Important for Elementary School Students to Learn the Basics of Finance? *KnE Social Sciences*, 5(8), 41–48. https://doi.org/10.18502/kss.v5i8.9346.

Матеріал надійшов до редакції 26.03.2024р.

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI **10.31110/fmo2024.v39i3-03** УДК **539.375**

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕНЗОРНОЇ АЛГЕБРИ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОМУ ЧИСЛЕННІ БАГАТОВИМІРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Юрій БОХОНОВ ✉
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна
yubochonoff@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3355-008X

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Відомо формули, за якими можна знайти похідну кожного елемента багатовимірного відображення. При цьому досить рідко на практиці використовують матрицю Якобі - першу його похідну, матрицю Гессе – другу похідну скалярної функції кількох змінних, тощо. В той самий час застосування матриць як технічного апарата при розв'язуванні подібних задач виявляється зручним і ефективним. На цьому шляху все ж виникають труднощі, наприклад, при матричному запису похідної від матриці. Виявляється, що для адекватного опису подібних конструкцій варто використовувати тензорні добутки матриць, де разом зі звичайними матрицями та векторами працюють з формальним вектором - лінійним оператором, елементами якого є оператори частинних похідних. При цьому формули для похідної довільного і диференціалу порядку від вектор-функції стають зрозумілими і прозорими.

Матеріали і методи. Для дослідження похідних високих порядків багатовимірних відображень широко використовується метод тензорних (кронекерівських) добутків матриць. При цьому похідна довільного порядку вектор-функції визначається як тензорний степінь формального диференціального оператора першого порядку – транспонованого вектора-градієнта. Дія таких тензорних виразів на вектор-функцію дає її похідну відповідного порядку. Це дає змогу описати мовою матриць конструкцію похідних, що на якісному рівні відрізняється від знаходження частинних похідних від кожної компоненти багатовимірного відображення.

Результати. За допомогою використання тензорних добутків матриць доведено і детально виписано формули для першої і другої похідних вектор-функцій, а також вказано, як знаходиться похідна довільного порядку. В класичних курсах математичного аналізу, як правило, виписуються матриця Якобі багатовимірного відображення і матриця Гессе (друга похідна) скалярнозначної функції багатовимірного аргументу. В пропонованій статті показано алгоритм знаходження довільної похідної як оператора, що діє в тензорному добутку лінійних просторів, що дає змогу краще усвідомити цю важливу конструкцію математичного аналізу.

Висновки. Широке застосування тензорних операцій, в яких діє також формальний вектор-оператор похідної першого порядку виявляється дуже ефективним. Більш того, на цьому шляху вдається показати структуру, з'ясувати, елементами яких лінійних просторів є похідні. На цьому шляху зразу вдається одержати усі похідні шуканого порядку, а не кожну частинну похідну окремо.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *похідна; диференціал; лінійний простір; лінійний оператор; вектор-функція; матриця; тензорний добуток.*

Для цитування:	Бохонов Ю. Застосування тензорної алгебри в диференціальному численні багатовимірних відображень. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 3. С. 24-30. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i3-03
	Бохонов, Ю. (2024). Застосування тензорної алгебри в диференціальному численні багатовимірних відображень. *Фізико-математична освіта*, *39*(3), 24-30. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-03
For citation:	Bokhonov, Yu. (2024). Application of tensor algebra in the differential calculus of multidimensional mappings. *Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 24-30. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-03
	Bokhonov, Yu. (2024). Zastosuvannia tenzornoi alhebry v dyferentsialnomu chyslenni bahatovymirnykh vidobrazhen [Application of tensor algebra in the differential calculus of multidimensional mappings]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 24-30. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-03

✉ Corresponding author

APPLICATION OF TENSOR ALGEBRA IN THE DIFFERENTIAL CALCULUS OF MULTIDIMENSIONAL MAPPINGS

Yuriy BOKHONOV ✉
National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine
yubochonoff@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3355-008X

ABSTRACT

Formulation of the problem. There are known formulas that can be used to find the derivative of each element of a multidimensional mapping. At the same time, the Jacobi matrix - its first derivative, the Hessian matrix - the second derivative of a scalar function of several variables, etc., are rarely used in practice. At the same time, using matrices as a technical device for solving similar problems is convenient and practical. Difficulties still arise on this path, for example, when writing the derivative of a matrix as a matrix. For an adequate description of such constructions, it is worth using tensor products of matrices, where together with ordinary matrices and vectors work with a formal vector - a linear operator, the elements of which are partial derivative operators. At the same time, the formulas for the derivative of arbitrary and differential order from the vector function become clear and transparent.

Materials and methods. To study high-order derivatives of multidimensional mappings, the method of tensor (Kroneker) matrix products is widely used. At the same time, the derivative of an arbitrary order of the vector function is defined as the tensor degree of the formal differential operator of the first order - the transposed gradient vector. The action of such tensor expressions on a vector function gives its derivative of the appropriate order. This makes it possible to describe the construction of derivatives in the language of matrices, which is qualitatively different from finding partial derivatives of each component of a multidimensional mapping.

The results. Formulas for the first and second derivatives of vector functions are proved and written out in detail by using tensor products of matrices, and it is also indicated how the derivative of arbitrary order is found. In classical courses of mathematical analysis, as a rule, the Jacobian matrix of the multidimensional mapping and the Hessian matrix (second derivative) of the scalar-valued function of the multidimensional argument are written out. The proposed article shows the algorithm for finding an arbitrary derivative as an operator acting in the tensor product of linear spaces, which allows a better understanding of this important construction of mathematical analysis.

Conclusions. Wide application of tensor operations, in which the formal vector operator of the first-order derivative also works, turns out to be very effective. Moreover, in this way, it is possible to show the structure and find out which elements of linear spaces are the derivatives. In this way, it is possible to obtain all derivatives of the desired order at once instead of each partial derivative separately.

KEYWORDS: *derivative; differential; linear space; linear operator; vector function; matrix; tensor product.*

ВСТУП

Тензорний аналіз – добре розвинений математичний апарат, що широко використовується в різних розділах математики. З ним і його застосуваннями у алгебрі, аналізі на многовидах, диференціальній геометрії можна познайомитись у монографіях і статтях (Abraham et al., 1988; Aja-Fernandez et al., 2009; Bokhonov, 2022; Hardy, 2019; Itskov, 2009; Madill, 1998; Nguyen-Schäfer et al., 2014). З іншого боку, наскільки відомо автору, застосуванню його у диференціальному численні багатовимірних відображень не приділялось уваги. Автору (Bokhonov, 2021) вдалось мовою матричного числення викласти деякі відомі факти, широко використовуючи матрицю Якобі, тощо. Зараз при подібному аналізі пропонується методика тензорних добутків матриць як основний апарат.

Мета статті. Запропонувати знаходження похідних довільного порядку від скалярнозначних і векторнозначних функцій багатьох змінних у вигляді матриць, які можна одержати в результаті дії на функції тензорних степенів оператора Гамільтона.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретичними основами дослідження є апарат тензорних добутків лінійних просторів і матриць, що діють в цих просторах.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Нехай $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний простір векторів-стовпчиків, $(\mathbb{R}^n)^*$ – спряжений до нього, тобто n-вимірний простір векторів-рядків (ковекторів), тобто, лінійних функціоналів на $\mathbb{R}^n$. Далі будемо використовувати позначення: $M_{m,n}$ – простір матриць, що мають m рядків і n стовпчиків, $I_{n,n} \in M_{n,n}$ – одинична матриця. Зауважимо, що елементи матриць, як правило, не відділяють комами, але ми будемо це робити для більшої наочності, наприклад, для матриць розміру $1 \times n$. Простір лінійних операторів, що діють з лінійного простору U у лінійний простір V, традиційно позначається $L(U,V)$. Білінійне відображення з $U \times U$ у V позначається $L_2(U,U;V)$. Відомо також, що

$$L(U,L(U,V)) \simeq L_2(U,U;V). \tag{1}$$

Позначатимемо через $\nabla^T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$, а інколи для більшої визначеності ∇_x^T, ковектор, транспонований до вектора-градієнта (стовпчика). Він діє на диференційовну функцію як лінійний оператор першої похідної за законом:

$$\nabla^T : u(x) \to \nabla^T u(x) = u'(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u(x) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1},...,\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right).$$

Інакше кажучи, $\nabla^T u(x)$ - матриця Якобі функції $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, обчислена у точці x. $\nabla^T u(x)$ часто називають оператором Гамільтона і позначають без знака транспонування, але ми вважаємо, маючи підстави, що $\nabla u(x)$ – вектор-стовпчик. Далі будемо вважати функції неперервно диференційовними стільки разів, скільки потрібно. Для двох векторів-стовпчиків $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$: $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_m)$ їхній тензорний добуток визначається наступним чином:

$$x \otimes y = \left(x_1 y, ..., x_1 y\right) = \left(x_1 y_1, ..., x_1 y_m, ..., x_n y_1, ..., x_n y_m\right) \in \mathbb{R}^{mn}.$$

Нехай $A \in M_{m,n}, B \in M_{p,q}$. Тензорним (кронекерівським) добутком $A \otimes B$ цих матриць називається блочна матриця повного розміру $mp \times nq$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & ... & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & ... & a_{2n}B \\ . & . & ... & . \\ a_{m1}B & a_{m2}B & ... & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Вона складається з mn блоків і кожен її (i, j)-й блок має вигляд: $a_{ij}B \in M_{p,q}$.

Важливий приклад, який далі буде використовуватись:

$$I \otimes A = \begin{pmatrix} A & 0 & ... & 0 \\ 0 & A & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & A \end{pmatrix}.$$

Будемо вважати, що для матриці розміру 1×1, тобто, числа $t \in \mathbb{R}^1$ тензорний добуток $t \otimes A = tA$, інакше кажучи, є звичайним множенням даного числа на матрицю A. Тензорні добутки матриць мають різноманітні властивості і застосування. Більш детально можна познайомитись з ними у (Lancaster et al., 1985; Marcus, 1992).

Як відомо, для лінійних просторів U, V має місце ізоморфізм:

$$U^* \otimes V \simeq L(U,V).$$

II. Знаходження похідних від функцій

Для функцій $\mathbb{R}^n \ni x \to f(x) \in \mathbb{R}^1$ за означенням

$$f'(x) \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1\right) = \left(\mathbb{R}^n\right)^*,\ f'(x) == \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},...,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(x) = \nabla^T \otimes f(x) = \nabla^T f(x). \tag{2}$$

Друга похідна за подібним правилом є елементом наступного простору:

$$\mathbb{R}^n \ni x \to f''(x) = \left(f'(x)\right)' \in L\left(\mathbb{R}^n, L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1\right)\right) = L\left(\mathbb{R}^n, \left(\mathbb{R}^n\right)^*\right).$$

Згідно з (1)

$$f''(x) \in L\left(\mathbb{R}^n, \left(\mathbb{R}^n\right)^*\right) \simeq \left(\mathbb{R}^n\right)^* \otimes \left(\mathbb{R}^n\right)^* \simeq \left(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n\right)^* \simeq L_2\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1\right).$$

Звідси

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\nabla^T \otimes \nabla^T\right) f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \otimes \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},...,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},...,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right),...,\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},...,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)\right) = \\ &= \left(\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2},...,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n}\right),...,\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1},...,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Зауваження. Використання внутрішніх дужок для деяких блоків матриці не є загальновживаним позначенням, але воно дає змогу зберегти інформацію про те, від яких блоків взято похідну, що робить конструкцію більш зрозумілою.

Розглядаючи $f''(x)$ як елемент $L_2\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1\right)$, зіставимо квадратичній формі

$$d^2 f(x) = f''(x)(dx) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} dx_i \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_j = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(x)$$

матрицю (Гессе) і одержимо відомий вигляд другого диференціала функції:

$$d^2 f(x) = (dx)^T f''(x)dx = \begin{pmatrix} dx_1 & \dots & dx_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix}.$$

Третю похідну визначимо як результат застосування оператора ∇^T до другої похідної, $f'''(x) \in (\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^*$:

$$f'''(x) = \nabla^T \otimes (f''(x)) = \nabla^T \otimes \nabla^T \otimes \nabla^T \otimes f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f''(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f''(x) \right) =$$

$$= \left(\left(\left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1^3}, \dots, \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1^2 \partial x_n} \right), \dots, \left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_n^3} \right) \right), \dots, \left(\left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_n \partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_n \partial x_1 \partial x_n} \right), \dots, \left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_n^2 \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_n^3} \right) \right) \right).$$

Третій диференціал має вигляд:

$$d^3 f(x) = f'''(x) dx \otimes dx \otimes dx = \left(\nabla^T \otimes \nabla^T \otimes \nabla^T f(x) \right) (dx \otimes dx \otimes dx).$$

Взагалі

$$f^{(p)}(x) \in \bigotimes_{j=1}^{p} (\mathbb{R}^n)^*, \ f^{(p)}(x) = \bigotimes_{j=1}^{p} \nabla^T f(x), \ d^p f(x) = f^{(p)}(x) \bigotimes_{j=1}^{n} dx \qquad (4)$$

Диференціювання векторних функцій багатьох змінних

Розглянемо диференційовну вектор-функцію

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, u(x) = (u_1(x), \dots, u_p(x))^T.$$

Формули для її похідних можна одержати з відповідних формул для скалярнозначних функцій, якщо за допомогою ковектора $s = (s_1, \dots, s_p) \in (\mathbb{R}^p)^*$ утворити скалярнозначну функцію $f(x) = su(x) = s_1 u_1(x) + \dots + s_p u_p(x)$. З (2) маємо:

$$f'(x) = su'(x) = s\left(\nabla^T \otimes u(x)\right) = s_1\left(\nabla^T \otimes u_1(x)\right) + \dots + s_p\left(\nabla^T \otimes u_p(x)\right) =$$

$$= s_1 \left(\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} \right) + \dots + s_p \left(\frac{\partial u_p(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_n} \right) = (s_1, \dots, s_p) \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Одержали відому матрицю Якобі відображення u і її інтерпретацію мовою тензорного добутку:

$$u'(x) = \nabla^T \otimes u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \dots \\ u_p(x) \end{pmatrix}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \dots \\ u_p(x) \end{pmatrix} \right).$$

Диференціюючи вектор-рядок $s\left(\nabla^T \otimes u(x)\right)$ за формулою (3):

$$f''(x) = \nabla^T \otimes (su'(x)) = \left(\frac{\partial (su'(x))}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial (su'(x))}{\partial x_n} \right),$$

прийдемо до другої похідної матриці Якобі, яку запишемо у вигляді тензорного добутку.

$$u''(x) = \nabla^T \otimes u'(x) = \nabla^T \otimes \nabla^T \otimes u(x) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right).$$

Остаточно:

$$u''(x)=\left(\begin{pmatrix}\frac{\partial^2u_1(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2u_1(x)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial^2u_p(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2u_p(x)}{\partial x_1\partial x_n}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}\frac{\partial^2u_1(x)}{\partial x_n\partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2u_1(x)}{\partial x_n^2}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial^2u_p(x)}{\partial x_n\partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2u_p(x)}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}\right). \tag{5}$$

Як і для скалярнозначних функцій похідна і диференціал довільного порядку для вектор-функцій визначається за формулою (4). Треба тільки враховувати, що перша похідна багатовимірного відображення – це матриця.

Приклад 1. Друга похідна декартових змінних за полярними змінними. $\begin{pmatrix}x(\rho,\varphi)\\ y(\rho,\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\end{pmatrix}$. Звідси

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}=\left(\frac{\partial}{\partial\rho},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\otimes\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\frac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\rho} & \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\rho} & \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Другу похідну знайдемо за формулою (4):

$$\frac{D^2(x,y)}{\left(D(\rho,\varphi)\right)^2}=\left(\frac{\partial}{\partial\rho},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\otimes\begin{pmatrix}\frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\rho} & \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\rho} & \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 x(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2} & \frac{\partial^2 x(\rho,\varphi)}{\partial\rho\partial\varphi}\\ \frac{\partial^2 y(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2} & \frac{\partial^2 y(\rho,\varphi)}{\partial\rho\partial\varphi}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 x(\rho,\varphi)}{\partial\varphi\partial\rho} & \frac{\partial^2 x(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}\\ \frac{\partial^2 y(\rho,\varphi)}{\partial\varphi\partial\rho} & \frac{\partial^2 y(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial\rho},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\otimes\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix},\frac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}0 & -\sin\varphi\\ 0 & \cos\varphi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sin\varphi & -\rho\cos\varphi\\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi\end{pmatrix}\right).$$

Приклад 2. Нехай

$$x\in\mathbb{R}^n, u^T(x)=(u_1(x),\dots,u_m(x))\in\left(\mathbb{R}^m\right)^*, v(x)=\begin{pmatrix}v_1(x)\\ \dots\\ v_m(x)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m.$$

Знайти похідну від скалярної функції $u^T(x)v(x)=\sum_{j=1}^{m}u_j(x)v_j(x)$.

Маємо: $$\left(u^T(x)v(x)\right)'=\left((u_1(x),\dots,u_m(x))\begin{pmatrix}v_1(x)\\ \dots\\ v_m(x)\end{pmatrix}\right)'=\left(\frac{\partial(u(x))}{\partial x_1}v(x),\dots,\frac{\partial(u(x))}{\partial x_n}v(x)\right)+$$

$$+\left((u_1(x),\dots,u_m(x))\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{pmatrix}v_1(x)\\ \dots\\ v_m(x)\end{pmatrix},\dots,(u_1(x),\dots,u_m(x))\frac{\partial}{\partial x_n}\begin{pmatrix}v_1(x)\\ \dots\\ v_m(x)\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left(\nabla^T\otimes u^T(x)\right)\begin{pmatrix}(v_1(x),\dots,v_m(x))^T & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & (v_1(x),\dots,v_m(x))^T\end{pmatrix}+(u_1(x),\dots,u_m(x))\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial v_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_m(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\nabla^T\otimes u^T(x)\right)v(x)+u^T(x)\left(\nabla^T\otimes v(x)\right).$$

Остаточно:

$$\left(u^T(x)v(x)\right)'=\left(\nabla^T\otimes u^T(x)\right)\left(I_{n,n}\otimes v(x)\right)+u^T(x)\left(\nabla^T\otimes v(x)\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial u^T(x)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u^T(x)}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix}(v_1(x),\dots,v_m(x))^T & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & (v_1(x),\dots,v_m(x))^T\end{pmatrix}+(u_1(x),\dots,u_m(x))\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial v_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_m(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Узагальнимо попередній приклад. Нехай

$x \in \mathbb{R}^n, A(x) \in M_{p,m}, B(x) \in M_{m,q} \Rightarrow C(x) = A(x)B(x) \in M_{p,q}$ (Bokhonov, 2021).

Знайдемо похідну від добутку вказаних матричних функцій. Діючи за попередньою схемою, одержимо:

$$\left(A(x)B(x)\right)' = \left(\nabla^T \otimes A(x)\right)\left(I_{n,n} \otimes B(x)\right) + A(x)\left(\nabla^T \otimes B(x)\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial A(x)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial A(x)}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} B(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & B(x)\end{pmatrix} + A(x)\left(\frac{\partial B(x)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial B(x)}{\partial x_n}\right). \quad (6)$$

Диференціювання композиції відображень

Нехай $u(x) \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^n, x = x(t), t \in \mathbb{R}^m$. Як відомо,

$$u'_t\left(x(t)\right) = \nabla_t^T \otimes u\left(x(t)\right) = \left(\nabla_x^T \otimes u\left(x\right)\right)\left(\nabla_t^T \otimes x\left(t\right)\right) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(t)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1(t)}{\partial t_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n(x)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n(t)}{\partial t_m}\end{pmatrix}.$$

Знайдемо другу похідну по t.

$$u''_{t^2}\left(x(t)\right) = \nabla_t^T \otimes \left(\nabla_t^T \otimes u\left(x(t)\right)\right) =$$

$$= \nabla_x^T \otimes \left(\left(\nabla_x^T \otimes u\left(x\right)\right)\left(\nabla_t^T \otimes x\left(t\right)\right)\right)\left(I_{m,m} \otimes \nabla_t^T \otimes x\left(t\right)\right) + \left(\nabla_x^T \otimes u\left(x\right)\right)\left(\nabla_t^T \otimes \nabla_t^T \otimes x(t)\right) =$$

$$= \left(\left(\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2},\dots,\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_n}\right),\dots,\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n \partial x_1},\dots,\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n^2}\right)\right)\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t)\end{pmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t)\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t)\end{pmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t)\end{pmatrix}\end{pmatrix} +$$

$$+ \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t)\end{pmatrix},\dots,\frac{\partial}{\partial t_m}\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \dots \\ x'_n(t)\end{pmatrix}\right).$$

При одержанні формули використовувалось загальне правило диференціювання композиції відображень і формулою (6). Тут у першому множнику першого доданку використано множення блочних матриць.

ЗАУВАЖЕННЯ

Диференціюючи для перевірки кожен елемент матриці Якобі, одержимо такий самий результат. Через громіздкі вирази ми не наводимо тут ці значення.

ОБГОВОРЕННЯ

Знаходження похідних багатовимірних відображень – стандартна задача математичного аналізу. Як правило, похідні довільного порядку знаходять, диференціюючи кожну компоненту відображення. При цьому не видно структуру, втрачається інформація про те, якому лінійному простору належить похідна самого відображення як вектора. Широке застосування матричного числення, зокрема тензорних добутків, в яких до того ж діє формальний вектор-оператор першої похідної, робить знаходження похідних зрозумілою і прозорою. Такий підхід відповідає сучасному тлумаченню похідної як лінійного оператора у відповідних просторах, які, як відомо, ізоморфні тензорним добуткам пов’язаних з ними просторів.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Застосування матричного підходу в задачах диференціювання є ефективним апаратом. Можна побажати, щоб ця техніка впроваджувалась у стандартні курси, принаймні на факультетах з поглибленим вивченням математики, наприклад, на механіко-математичних факультетах університетів, ІПСА, Фізико-технічному інституті та Фізико-математичному факультеті КПІ, тощо. Така можливість обумовлена тим, що в цих навчальних підрозділах математичний аналіз і лінійна алгебра читаються окремо, і є можливість узгодження в часі вказаних тем. Автору вдається у курсі лінійної алгебри при вивченні тензорних добутків матриць дати огляд застосування викладених конструкцій у аналізі, як важливого прикладу.

Цікаво було б застосувати запропоновану методику у нескінченновимірному випадку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Abraham, R., Marsden, J.E., & Ratiu, T. (1998). Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, 2nd edition, SpringerVerlag, N.Y. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1029-0
2. Aja-Fernandez, S., García, R. L., Tao, D., Li, X. (ed.) (2009). Tensors in Image Processing and Computer Vision. Series: Advances in Pattern Recognition, Springer-Verlag, London (e.g. see : A review of tensors and tensor signal processing, by L. Cammoun et al.) https://doi.org/10.1007/978-1-84882-299-3
3. Бохонов, Ю. Є. (2022). Лінійна алгебра: Курс лекцій: курс лекц. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ.
4. Бохонов, Ю. Є. (2021). Математичний аналіз. Частина 2. Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтеграли, що залежать від параметра: навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ.
5. Hardy, Y., & Steeb, W. ·(2019). Matrix Calculus, Kronecker Product And Tensor Product. A Practical Approach To Linear Algebra, Multilinear Algebra And Tensor Calculus With Software Implementations.
6. Itskov, M. (2009). Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-93907-8
7. Lancaster, P., & Tismenersky, M. (1985). The Theory of Matrices with Applications. Academic Press, New York.
8. Madill, D.R. (1998). Tensor Products and Matrix Calculus. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Waterloo.
9. Marcus, M., & Minc, H. (1992). A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Courier Corporation.
10. Nguyen-Schäfer, H., & Schmidt, J-Ph. (2014). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43444-4

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Abraham, R., Marsden, J.E., & Ratiu, T. (1998). Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, 2nd edition, SpringerVerlag, N.Y. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1029-0
2. Aja-Fernandez, S., García, R. L., Tao, D., Li, X. (ed.) (2009). Tensors in Image Processing and Computer Vision. Series: Advances in Pattern Recognition, Springer-Verlag, London (e.g. see : A review of tensors and tensor signal processing, by L. Cammoun et al.) https://doi.org/10.1007/978-1-84882-299-3
3. Bokhonov, Yu. (2022). Liniyna alhebra: Kurs lektsiy: kurs lekts. dlya stud. spetsial'nosti 122 «Komp"yuterni nauky» / KPI im. Ihorya Sikors'koho. Kyyiv. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/47625
4. Bokhonov, Yu. (2021). Matematychnyy analiz. Chastyna 2. Dyferentsial'ne chyslennya funktsiy kil'kokh diysnykh zminnykh. Intehraly, shcho zalezhat' vid parametra: navch. posib. dlya stud. spetsial'nosti 122 «Komp'yuterni nauky» / KPI im. Ihorya Sikors'koho. Kyyiv . https://ela.kpi.ua/handle/123456789/56825
5. Hardy, Y., & Steeb, W. ·(2019). Matrix Calculus, Kronecker Product And Tensor Product. A Practical Approach To Linear Algebra, Multilinear Algebra And Tensor Calculus With Software Implementations.
6. Itskov, M. (2009). Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-93907-8
7. Lancaster, P., & Tismenersky, M. (1985). The Theory of Matrices with Applications. Academic Press, New York.
8. Madill, D.R. (1998). Tensor Products and Matrix Calculus. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Waterloo.
9. Marcus, M., & Minc, H. (1992). A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Courier Corporation.
10. Nguyen-Schäfer, H., & Schmidt, J-Ph. (2014). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43444-4

Матеріал надійшов до редакції 04.04.2024р.

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI **10.31110/fmo2024.v39i3-04**

MATHEMATICS THROUGH LANGUAGE AND LANGUAGE THROUGH MATHEMATICS: CONDENSATION TRANSCRIPTION AS A POINT OF SYMBIOSIS

Janice HILL ✉
Sanford College of Education, National University, USA
J.hill7742@o365.ncu.edu
https://orcid.org/0009-0004-4902-3542

ABSTRACT

This paper explores the idea of condensation transcription—which is defined as the reduction of lengthy collections of lexical elements or mathematical descriptions into short forms—as the point where mathematics and language learning cross-influence one another notably. To elaborate, condensation transcription is defined as the linguistic ability and procedure that permits the reconstruction and compacting of larger lexical sets into more manageable forms while maintaining the basic meanings of those sets. Such a phenomenon occurs when mathematical concepts are rewritten from page-long descriptions to figures and numerical entities, and when literary passages are compressed into their main ideas.

Formulation of the problem. Word problems, main idea identifications, and essay writing are some of the most dreaded topics of study in mathematics and language. In order to suggest improvements in these challenging areas within the education of both disciplines, this paper's research emphasizes the significance of condensation transcription and makes readers aware of it by examining lexical elements in language and mathematical entities, pinning their origins, and explaining what learning strategies can be extracted from language that could be useful in mathematics learning, and vice versa.

Materials and methods. The resources used in this investigation include a comprehensive dictionary entry, a word problem, literary text passages, and written explorations of mathematical concepts, all of which are dissected through the implementation of condensation transcription's conventional procedures, which are termed 'analysis,' 'coding,' and 'decoding.' This procedure is necessary to show, first-hand, how condensation transcription works and how it is applied, as well as what can be gleaned from its functions and applications.

Results. The results point to condensation transcription being a basic concept in mathematics and language that powers mathematical learning through comprehension of language, and reversely.

Conclusions. As a whole, this paper underscores the importance of having the knowledge of condensation transcription in language and mathematics. By recognizing the role of condensation transcription as a foundational language process, practitioners in both language and mathematics could make some of the most difficult concepts in both disciplines easier for students to grasp.

KEYWORDS: *Condensation Transcription; Analysis; Coding; Decoding; Mini Essay.*

МАТЕМАТИКА ЧЕРЕЗ МОВУ ТА МОВА ЧЕРЕЗ МАТЕМАТИКУ: КОНДЕНСАЦІЙНА ТРАНСКРИПЦІЯ ЯК ТОЧКА СИМБІОЗУ

Дженіс ГІЛЛ ✉
Санфордський педагогічний коледж Національного університету, США
J.hill7742@o365.ncu.edu
https://orcid.org/0009-0004-4902-3542

АНОТАЦІЯ

У цій статті досліджується ідея конденсаційної транскрипції, яку визначають як зведення довгих наборів лексичних елементів або математичних описів до коротших форм, тобто точку дотику математики та мови, в якій вони значно впливають одне на одного. Для уточнення, конденсаційна транскрипція визначається як лінгвістична здатність та процедура, яка дозволяє відновлення та ущільнення більших лексичних наборів до більш зручних форм, зберігаючи основні значення цих наборів. Таке явище відбувається, коли математичні концепції зводяться з довгих описів до символьних записів, а також коли літературні уривки стискаються до основних ідей.

Для цитування:	Hill J. Mathematics through language and language through mathematics: condensation transcription as a point of symbiosis. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 3. С. 31-37. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i3-04
	Hill, J. (2024). Mathematics through language and language through mathematics: condensation transcription as a point of symbiosis. *Фізико-математична освіта*, *39*(3), 31-37. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-04
For citation:	Hill, J. (2024). Mathematics through language and language through mathematics: condensation transcription as a point of symbiosis. *Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 31-37. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-04
	Hill, J. (2024). Mathematics through language and language through mathematics: condensation transcription as a point of symbiosis. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 31-37. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-04

✉ Corresponding author

Формулювання проблеми. Текстові задачі, визначення основних ідей та написання есе – це одні з найбільш важливих завдань при вивченні математики та мови. З метою полегшення навчання математики та мови автори дослідження підкреслюють значення конденсаційної транскрипції та знайомлять читачів з цими поняттями, розглядаючи лексичні елементи у мові та математичні об'єкти, встановлюючи їх походження та пояснюючи, які стратегії можна перенести з навчання мови на навчання математики, і навпаки.

Матеріали та методи. Ресурси, використані у цьому дослідженні, включають в себе комплексне словникове визначення, текстові задачі, уривки літературного тексту та письмові дослідження математичних концепцій, які досліджуються за допомогою використання стандартних процедур конденсаційної транскрипції – «аналіз», «кодування» та «декодування», з метою демонстрації, як працює на практиці конденсаційна транскрипція, як її застосовують та які висновки можна зробити з цих застосувань.

Результати. Результати вказують на те, що конденсаційна транскрипція є базовим поняттям в математиці та мові, яке забезпечує навчання математики через розуміння мови, і навпаки.

Висновки. Загалом, дане дослідження підкреслює важливість знання конденсаційної транскрипції в мові та математиці. Розуміння ролі конденсаційної транскрипції як базового мовного процесу, полегшить вивчення студентами як мови, так і математики

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *конденсаційна транскрипція; аналіз; кодування; декодування; міні-есе.*

INTRODUCTION

The process within each language that could be considered responsible for the manufacturing of its dialect's lexical items could be properly identified as condensation transcription. Condensation transcription is a linguistic capacity and process that allows speakers and writers to compact and reconstruct longer or more expansive sets of lexical items into more shortened, one-word versions that are concise but still preserve their more extended emphasized counterparts' main meanings. If one were to open their preferred and frequently referenced dictionary, they will find that most all the words and lexical objects in there have long and drawn-out definitions neatly written right beside them, respectively. As an example, we will examine an English language word from the popular Merriam-Webster dictionary. This word will be 'haughty.' Just below Merriam-Webster's (Loughran & Berry, 2016) visual virtual presentation of the word 'haughty,' there is a definition that reads as the following: *Blatantly and disdainfully proud: having or showing an attitude of superiority and contempt for people or things perceived to be inferior.*

Definitions like this one are a part of all words in all languages globally and their lexical components, according to the linguistic processes of analysis and synthesis, are the building blocks of said words, respectively. The process of analysis is simply language practitioners' and utilizers' scrutinizing and through examination of each lexical item in a word's potential, to-be definition and the overall idea communicated by a to-be word definition's string of lexical items. Once this examination of lexical item and lexical item string is complete, language practitioners and utilizers will work towards the process of synthesis, which is essentially condensation transcription or the construction of a single word based on the mentioned examination, thus underscoring and indicating that lexical item and lexical item string of any to-be definition, or basically already-official definition, are indeed the constituting elements of any word in any lexicon, and proving that condensation transcription is the catalyst in the creation of any lexicon's words since it is responsible for essentially packaging and coding elements of any lexicon's definitions into the words that would come to dominate it.

Now, mathematics, like any other product of human intellectual activity, is based upon language, and naturally, it borrows its function of condensation transcription. In mathematics, condensation transcription extends its coding functions over to the area of algebra or other disciplines. Thus, algebra, as a one of the key disciplines of mathematics, contains items and entities that are pretty much used as bodies or hosts of mathematical and scientific ideas, concepts, and principles. This indicates and implies that algebraic or mathematical items and entities are pretty much analogs of linguistic concepts in all lexicons, as they are the dominant communicative features of an intellectual subject and its scope. If algebraic lexical objects are like that of standard language words in essence, then they are also produced by condensation transcription and are subject to the word-generative processes of analysis and synthesis (i.e., condensation transcription). As with conventional linguistic words or communication items, algebraic and mathematical figures and entities start off as overly detailed, lengthy definitions and definitive descriptions that could, in some cases, span an entire page in prioritization of the effort to communicate a scientific notation, set of rules, formula, or dogmatic law in raw written form. The traditional linguistic analysis process thoroughly makes sense of each piece and constituent in such expansive definitions and definitive descriptions, and synthesis (i.e., condensation transcription) is provided with a comprehensive template or blueprint of key ideas and material that it must then convert and code into units and communicative items that are of a reasonable magnitude and dimension, detail and span-wise. And thus, algebraic configurations, symbols, signs, and notations are born.

Now, from the assessment of all the information that has been conveyed, it should be worth noting that condensation transcription is one of mathematics' most ruthlessly efficient features. Going back to the matter of conventional language (Loughran & Berry, 2016), by reasonable observation, it can be properly deduced that words are essentially more trimmed and extremely concise restructurings of the ideas and information presented by their blueprints (i.e., definitions). The definitions are briefer but preserve and encapsulate words' crucial meanings and implications. Thus, condensation transcription presents language users with communication devices that are free of excessive distractions in their delivery of thought and simultaneously sufficient in how they aid users in their expressions of their intended messages. As a result, users have the advantage of not overthinking the words they use and stumbling over any disorientations when they share information or communicate.

For mathematics, condensation transcription performs the same job after its preceding analysis procedure decodes all the components in a rather long scientific description, "hands" it the overall, main ideas of said description and its components, and enables it to code these main ideas into straightforward, direct, cohesive, and concise mathematical text. With the condensation transcription, mathematics practitioners and mathematicians have a clean, refined, and polished version of their laws, rules, theorems, conjectures, etc. With this being said, it can be properly argued that condensation transcription is a major asset and convenience to mathematics practitioners and mathematicians, for it manages to advance their studies forward with vessels that communicate dense material concisely yet effectively. This makes it, again, one of mathematics' most ruthlessly efficient aspects.

MATERIALS AND METHODS

The resources used in this investigation include a comprehensive dictionary entry, a word problem, literary text passages, and written explorations of mathematical concepts, all of which are dissected through the implementation of condensation transcription's conventional procedures, which are termed 'analysis,' 'coding,' and 'decoding.' This procedure is necessary to show, first-hand, how condensation transcription works and how it is applied, as well as what can be gleaned from its functions and applications.

RESULTS

The results point to condensation transcription being a basic concept in mathematics and language that powers mathematical learning through comprehension of language, and reversely.

Mathematics Through Language: Examples

English Reading Comprehension Main Idea Identification Exercises and Mathematical Word-Problem Solving

In addition to being the key tools in the generation of all languages' words, analysis and condensation transcription also play key roles in the critical language learning practice of reading comprehension, which is a subject of language taught in literature and language arts classes around the world. In particular, each word-generative process offers a critical and vital tactic for robust and effective main idea detections in literary texts, and ones that could be applied to mathematics studies, particularly word problem-solving. Let us look closely at a reading comprehension student's main-idea detection work (Two large and 1 small pumps can fill a swimming pool in 4 hours) below.

Exercise 1. Summer is a wonderful time to spend at West Beach. It is a beach with light- colored, soft sand. The coastline goes on for a long way and many people enjoy walking along it. Children like to play in the surf and walk along the rocks that are visible at low tide. This is a fun beach for people of all ages.

Analysis. In this paragraph:

- the topic is *West Beach;*
- the main idea (what the writer is saying about the topic) is that summer is a wonderful time at West Beach.

Exercise 2. The movie Apollo 13 was a blockbuster for the summer of 1995. It is an exciting story about space exploration. In the movie, the astronauts get in trouble while they are trying to return to Earth. People in the audience are on the edge of their seats waiting to see what happens. What makes it even more exciting is that it is a true story.

Analysis. In this paragraph:

- the topic is the movie *Apollo 13;*
- the main idea is in the first sentence: *Apollo 13 was a blockbuster for the summer of 1995.*

Exhibit 1. English Reading Comprehension Main Idea Identification Exercises. Adapted from (Two large and 1 small pumps can fill a swimming pool in 4 hours)

The process of analysis in these worked-out exercises can be found in the identification of the main topic of each little excerpt/paragraph, as the purpose of analysis is to provide condensation transcription or synthesis, as has been discussed earlier, with the material it needs to cut down vast and wordy communicative content and clues into a focused and compact lexical vessel carrying its most significant, overall meaning, or, in essence, its main idea. This identification of topic that is taught and encouraged in reading comprehension and language arts classrooms will be denoted as the tactic of "What" (Landmark, 2024) or finding what a text's primary linguistic focus is. With regards to condensation transcription, it can be observed that it does its job with its analysis-given, phrasal main-idea manufacturing resources in the student work samples, using the main topics as points of coordination and orientation in its generation of a shortened, rewritten, meaning-preserving versions of said samples. Such an action, or rather utilization by student, of condensation transcription can reveal the tactic that we will refer to as "What about the What," (North Carolina Department of Public Instruction) or a brief, one-sentence thought highlighting an information body's main topic and correctly communicating its central message. Now that we have pinned down the specific main idea tactics that are frequently employed in the language discipline of reading comprehension, and generally language studies, we will now observe how such tactics can be integrated into mathematics classrooms, specifically said classrooms' word problem-solving practices. As a matter of reasonable observation, both analysis and condensation transcription are very useful in equipping students with the devices that are critical in their word problem-solving endeavors. Let us examine this point in the high school sophomore-level word problem (Reading Rockets) and its correct solution process shown below.

Problem. Two large and 1 small pumps can fill a swimming pool in 4 hours. One large and 3 small pumps can also fill the same swimming pool in 4 hours. How many hours will it take 4 large and 4 small pumps to fill the swimming pool. (We assume that all large pumps are similar, and all small pumps are also similar.)

Solution. Let R and r the rate of work of the large and the small pumps respectively

$4(2R + r) = 1$: 2 large and 1 small work for 4 hours to do 1 job

$4(R + 3r) = 1$: 1 large and 3 small work for 4 hours to do 1 job

$T(4R + 4r) = 1$: Find time T if 4 large and 4 small are to do one job.

Solve for R and r the system of first two equations then substitute in the third and solve for T to find the time. T = 5/3 hours = 1 hour 40 minutes.

Exhibit 2. Mathematics Time, Speed, & Distance Problems. Adapted from (Reading Rockets**)**

Analysis. The analysis process immediately begins once a student tasked with solving this word problem starts studying it, closely examining its communicative data set of lexical items for the meanings and messages they are conveying, thus gathering facts and knowledge from the word problem. As is indicated by our word problem's solution above, the student's analysis, based on its findings and the student's initial reading of the word problem's scenario, noted the following: 'There are three pumps of different sizes (i.e., two big and one small) that have an important role in filling up a swimming pool; Both the small and the large pool pumps are capable of completing their job in the time span of four hours; The same job can be successfully carried out in the same time frame by one large pump and three small ones; All of the pumps within each size category have a consistent likeness and the word problem is asking how many hours it will take four large and four small pumps to fill up a swimming pool.' Once all of these details are written out, comprehended, and accounted for, the student, with their understanding of what the word problem's question asks of them (i.e., How many hours will four large pumps and four small pumps need to fill out a swimming pool?), can now have the material necessary for the crucial procedure of breaking down the conveyances of their presently emphasized word problem's text and extracting its main ideas (i.e., decoding or condensation), and then writing those ideas out as functional units of mathematical solution (i.e., coding or transcription). Below, in (7.04: Graphing Linear Equations in Two Variables; Table 1.), your attention will be directed towards the pupil's demonstration of this breakdown and translation process of condensation transcription. The analysis notes will be marked as "Source Material," the breakdown will be labeled as "Decoding," and the mathematical entities will be referred to as "coding."

Table 1. The Analysis and Condensation Transcription Process of a Word Problem (adapted from (Two large and 1 small pumps can fill a swimming pool in 4 hours))

Source Material	Decoding	Coding
There are three pumps of different sizes (i.e., two big and one small) that have an important role in filling up a swimming pool.	Let R and r be the rate of work of the large and the small pumps, respectively.	R, r
Both the small and the large pool pumps are capable of completing their job in the time span of four hours.	2 large and 1 small work for 3 hours to do 1 job.	$4(2R + r) = 1$
The same job can be successfully carried out in the same time frame by one large pump and three small ones.	1 large and 3 small work for 4 hours to do 1 job.	$4(R + 3r) = 1$
The problem asks to calculate the number of hours 4 large and 4 small pumps will need to fill up the swimming pool.	Find time T if 4 large and 4 small are to do one job. Solve for R and r the system of first two equations, then substitute in the third and solve for T to find the time.	$T(4R + 4r) = 1$

Source: Own work.

In the "decoding" or condensation segments of each section in the table, the student, as mentioned, found the heart or gist of their word problem's original text, and created a narrowed-down, powerfully focused guide that, in essence, became their compass in finding the tools needed to acquire the word problem's solution. With this being said, it can be properly inferred that the process of condensation gave the student a practical template for the proper and error-free construction of the numerical and algebraic entities that would pave the way for the answer to the problem's question. In the table, such a construction is identified as "coding" or transcription, and it is, according to our assessment that has just been conducted, arguably the most important stage in a word problem's solution. Moreover and speaking of our assessment, it should be remembered that analysis has been the student's guide in creating their solution's guide and the mentioned entities containing clues for the obtainment of that solution, thus making it possible to conclude that analysis or "source material," as is preferred in the table, is the basis for the word problem-solving convenience and effectiveness brought about by condensation transcription.

Analysis tactic of "What". To apply the analysis tactic of "What" (Landmark et al., 2024), the student must first ask themself what the word problem's main topic or topics is, and the answer to that would be the following: *The time that it takes a specific number of large pumps and a specific number of small pumps to complete one job*.

Analysis tactic of "What about the What." After this step is complete, the student will apply the condensation transcription tactic of "What about the What" (Comprehension for 4th and 5th Grades), and to carry out this step properly, they are to ask themself the following questions: 'What is being said about the main topic?'; 'What is the main idea or ideas about the main topic?' In the case of our current word problem of discussion, the answer is the following: *In 4 hours, 2 large pumps and 1 small pump can complete one job; In 4 hours, 1 large pump and 3 small pumps can complete one job; It is unknown how much time it takes 4 large pumps and 4 small pumps to complete one job.*

With the discovery of a word problem's main topic(s) and main idea(s), students are able to make a critical distinction; they are able to understand the kind of word problem they are solving and what its solution process demands. Our sample main topic and main idea discoveries above are supportive of this deduction, for the former's identification of the sample word problem's main topic of time has helped the sample word problem's student solver recognize that they are dealing with a time word problem, and the latter's suggestion for a development of a list of the main topic's main ideas has given the student the awareness that their time word problem involves systems of equations. For mathematics students engaging in word problem-solving tasks, the knowledge of the category of word problems that they are giving their attention to, which is effectively acquired with the aid of the language-based analysis tactic of "What," (Landmark, 2024) strengthens and solidifies their focus on said word problems' topic-specific scopes, which will, in turn, keep them focused on what they have been taught or need to know for the purpose of obtaining precise and solid solutions. Once students move past the "What" tactic (Landmark, 2024) and implement the language-based, interrogative condensation transcription tactic of "What about the What," (Comprehension for 4th and 5th Grades) they will be able to see the kind of mathematical action their individual word problems' main topics are set and embedded within (e.g., systems of equations calculations), and will find themselves on the right track towards mistake-free word problem solutions and answers. With all that has been explicated and delineated, it is safe to reason that language is not only relevant in mathematics studies, but it can also play a considerable role in mathematics studies' most daunting and often intimidating educational material such as word problem-solving.

Assessment of the Mathematics Mini Essay: Language Through Mathematics

From our careful deliberations of the beneficial outputs of the mathematical decoding and coding procedures, we can note and propose that decoding or condensing considerably stretched-out written mathematical ideas and grounds for typical mathematical activity (i.e., calculations and scientific solutions) and coding or transcription (i.e., the action of assigning and ascribing various relevant scientific entities and figures to the results of said decoding or condensation procedures for the sake of performing and conducting usual mathematical calculations) entail the following: The mechanical creation of a relatively non-detailed, rigid summary of said stretched and written-out mathematical ideas and grounds for calculations; the manual structuration of calculatable and scientifically solvable bodies of cohesive mathematical units and figures. The mechanical and manual natures of the mathematical decoding and coding processes arose from their applications to mathematics learning and their role as the integral, heavily relied-on parts of mathematics learning. In educational mathematics, students learn by either the decoding and coding work of the authors of their classroom material or their very own decoding and coding work on their classroom material. In the former's case, said authors conduct analyses of the specific mathematical subject areas they are adapting into a student classroom resource pack, eventually breaking down these areas into more succinct, concise, and effective bodies of information, and then converting these bodies into their numerical form (Exhibit 3).

The fundamental notion behind linear equations is that a straight line on a coordinate plane can depict the relationship between two variables. These formulas, which take the form 'y = mx + b', where (m) denotes the slope of the line and (b) the y-intercept, let us simulate a number of real-world situations, like cost-revenue analysis or correlations between distance and time."

- "slope" (m) equals 2.
- 3 is the "y-intercept" (b)

Therefore, the slope (m) of a certain linear equation, such as (y = 2x + 3), is 2, meaning that y grows by 2 units for every unit increase in x. The line crosses the y-axis at (0, 3) since the y-intercept (b) is 3.

Exhibit 3. Coded and Decoded Textbook Explanation of Linear Equations. Adapted from (GCFLearnFree.org)

With regards to the latter case wherein students engage in their educators' decoding and coding procedures, we can identify their own exercises of the decoding and coding operations as word problem-solving. Now, what is interesting to note is that the decoding and coding work in students' classroom learning resources, students' word problem-solving, and students' internalizations of said classroom learning resources is reflective of the stages of information coding done by computers' binary coding systems. In all cases of decoding and coding in educational mathematics, the binary system analogs (GCFLearnFree.org) of the stages of decoding and coding are the following: Source Material (Input Information), Analysis (Processing of Input Information), Condensation (Translation of Input Information for Computer's Reading), Transcription (Complete Translation or "Morse" Encryption). From such a comparison, it can be properly inferred that educational mathematical decoding and coding are both machine-like processes. It is also made clear that our mathematics students learn their mathematical concepts with educational mathematical decoding and coding as their study foundations, which means that they learn mathematics on bases that have automatic, mechanical properties, and ultimately become severely disconnected from the lessons that they are investing their study time and effort into. Basically, mathematics pupils study the mathematical lessons administered to them by their class curriculums with the same level of depth that they would be thinking at when they simply type information into a computer and wait for it to generate relevant output.

Mini Essays

Mini essays (National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine, "Chapter 4," National Academies) for the testing of mathematical knowledge offer a workable approach. Mini essays for mathematics knowledge assessments are an effective teaching tool that support language proficiency development as well as the consolidation of mathematical concepts. Students are encouraged to communicate complex ideas with clarity and coherence by writing essays that demand them to demonstrate their mastery of mathematical concepts. Students participate in mathematical decoding as they write these essays, distilling complex mathematical ideas into clear and concise material. Students may be asked to discuss the Pythagorean theorem's significance, how it is applied to solve problems in the real world, and evidence supporting its validity in a brief essay dedicated to it. By organizing and logically expressing mathematical ideas in their responses, students not only underline their mastery of mathematics but also hone their language skills. On the other hand, mini essays for mathematics knowledge evaluation provide pupils with the chance to study language through mathematics. Students are to convert numerical ideas into worded explanations by incorporating mathematical topics into language learning assignments like essay writing. For example, using descriptive language is necessary to successfully communicate mathematical concepts in an essay prompt where students must describe the concept of probability in real-world circumstances. By participating in mathematical discourse, students improve their language skills while simultaneously gaining a deeper comprehension of mathematical concepts. Additionally, because mathematics knowledge evaluation mini essays are multidisciplinary, they encourage cross-curricular connections and a more comprehensive approach to learning. An essay that examines the connection between geometry and architecture, for example, helps students develop their capacity to express complicated ideas in both mathematical and verbal terms while also reinforcing mathematical concepts. As a result, mini essays for the mathematical knowledge evaluation provide students with a dynamic way to study both mathematics and language, promoting interdisciplinary competency and improving general academic performance. Mini essays for mathematics knowledge assessments offer a diverse method of instruction that cuts across conventional disciplinary lines. Students have a rare opportunity to concurrently strengthen their linguistic and mathematics skills through these assignments. Take into consideration, for example, the short essay work (National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine, "Chapter 4," National Academies , Exhibit 4) that asks pupils to investigate the topic of functions in mathematics.

Cracking the Secrets of Functions: Analyzing Domain, Range, and Mapping: A Student Mini Essay.

The relationships between sets of inputs and outputs are explained by the fundamental mathematical tools known as functions. One of the basic elements of functions is the concept of domain and range. A function's domain is the set of all possible input values, while its range is the set of all possible output values. Understanding domain and range is a prerequisite to analyzing and interpreting function activity.

Take the function $f(x) = x^2$ as an example. Since the function is defined for any value of x, in this instance, the domain is made up of all real numbers. Since the square of any real integer is non-negative, the function's range is restricted to non-negative real values. We can learn more about a function's characteristics and behavior by looking at its domain and range.

Mapping is another important feature of functions. The process of assigning a distinct element in the range to every element in the domain is referred to as mapping. The unique feature that sets functions apart from other mathematical relationships is the one-to-one correspondence between inputs and outputs. Take the function $g(x) = \sqrt[2]{a}$, for instance. Every non-negative real integer in the domain is mapped by this function to the equivalent non-negative square root in the range. We may gain a better understanding of the structure and behavior of functions by visualizing the mapping between inputs and outputs.

In addition, functions are essential to many disciplines, such as science, engineering, mathematics, and economics. Functions are the building blocks of more intricate mathematical systems in mathematics, such as linear algebra and calculus. Functions are used in science to simulate and examine a wide range of natural events, including the motion of celestial bodies and the behavior of chemical reactions. Functions are used in economics to explain how variables like supply and demand relate to one another. Functions are used in engineering to create and improve processes and systems.

With the help of functions, which are strong mathematical instruments, we may define and examine relationships between variables. We can gain a better knowledge of functions' behavior and applications in a variety of domains by exploring the mathematical nuances of functions, such as domain, range, and mapping.

Exhibit 4. A Student Mini Essay on Domain, Range, and Mapping, and Its Breakdown. Adapted from (National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine, "Chapter 4," National Academies)

Breakdown of Sample. The notion of functions in mathematics is well explored in this student's brief essay, which focuses on important ideas including domain, range, and mapping. Math learning through English is demonstrated by the student's ability to convey difficult mathematical concepts to a wider audience using succinct and straightforward language. The essay also shows how learning a language can improve one's ability to understand mathematics. The student not only improves their comprehension of functions but also refines their language skills by using precise vocabulary and logical structure to successfully communicate mathematical concepts by coherently explaining the definitions and properties of domain, range, and mapping.

The essay also demonstrates how language and mathematics are related to one another. The essay writing process requires the learner to solve mathematical problems and express themselves in writing. This strengthens their comprehension of functions and improves their ability to explain mathematical concepts in writing. This brief essay, in summary, demonstrates how math knowledge evaluation tasks can support math learning through English and vice versa. Students gain interdisciplinary competency and improve their performance in both disciplines by combining mathematical principles with language learning challenges, which eventually equips them for success in both academic and real-world contexts.

Students respond to such a writing exercise prompt by delving into the mathematical nuances of functions, including mapping, domain, and range, as well as by engaging in linguistic decoding, which enables them to efficiently convert abstract mathematical ideas into succinct written explanations. As a result of this approach, students get a deeper comprehension of both mathematical principles and linguistic standards by honing their ability to articulate complicated ideas using specialized mathematical language. Mini essays for the mathematics knowledge assessment also give students a chance to investigate how language and mathematics are related in a variety of settings. Students are encouraged to bridge the gap between mathematical symbols and common English, for instance, by writing an essay that examines the relationship between algebraic expressions and written word problems. Students must not only understand the word problem's mathematical substance when crafting their responses, but they must also clearly and concisely express their solutions. This blending of language comprehension and mathematical problem-solving develops critical thinking abilities and a greater understanding of the innate relationships between language and mathematics. Additionally, through written expression in mathematical discourse, students learn how to effectively convey their mathematical thinking, which improves their general academic proficiency and sets them up for success in both the mathematical and linguistic realms.

DISCUSSION

A closer look at condensation transcription reveals its vital function in language and math instruction. Condensation transcription is the process of compacting and reconstructing lexical units into short yet relevant forms. It is necessary for problem solving and successful communication in both mathematics and language learning. Subsequent investigations in this field may explore more deeply into the cognitive processes that underlie condensation transcription in mathematics and language. Learning about how people absorb and use this process could help educators create teaching methods that are more successful.

Effective pedagogical techniques for teaching condensation transcription in language and mathematics classes could be the subject of future studies. Creating educational resources and interventions that specifically teach students how to use condensation transcription techniques in problem-solving activities could be one way to do this.

Subsequent research endeavors may investigate the effects of language-oriented evaluations, such as mini essays, on the mathematics learning results of pupils (National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine, "Chapter 4," National Academies). Research on the effects of writing assignments that ask students to express mathematical ideas in writing on their conceptual knowledge and problem-solving abilities over time could be conducted through longitudinal research.

Collaboration between academics in the fields of mathematics and language education may result in the creation of multidisciplinary curriculum materials that incorporate instruction in condensation transcription (Two large and 1 small pumps can fill a swimming pool in 4 hours; Landmark, 2021; North Carolina Department of Public Instruction; Reading Rockets). This could entail developing cross-disciplinary lessons and exercises that motivate students to use condensation transcription methods when solving mathematical and language problems.

CONCLUSION

It is crucial to give educators opportunities for professional development so they can acquire the skills necessary to apply interdisciplinary teaching strategies that include condensation transcription techniques. For language-based solutions to be successfully incorporated into mathematics instruction, educators require assistance and training.

Academics studying language and mathematics education can also implement the *following strategies to improve student communication and problem-solving skills*:

•Including condensation transcription teaching in language and math courses.

• Providing opportunities for educators to receive professional development so they may learn the value of condensation transcribing and how to successfully incorporate it into their teaching methods.

• Encouraging teachers to improve student learning results by implementing condensation transcribing research findings into their teaching techniques.

• Promoting cooperation between math and language teachers to provide multidisciplinary teaching resources and methods that include condensation transcription training.

• Including language-based assessment tasks in mathematics exams, including mini essays, to gauge pupils' written communication skills about mathematical ideas.

Educators can increase students' academic performance in both language and mathematics by implementing condensation transcribing instruction and addressing these guidelines. This will help students become more proficient in multiple disciplines. Furthermore, these initiatives might advance our knowledge of the connection between language and math learning as well as result in the creation of more efficient teaching strategies.

REFERENCES

1. "Haughty," Merriam-Webster.com. URL: https://www.merriam-webster.com/dictionary/haughty. [Accessed: April 15, 2024].
2. Loughran, J., & Berry, A. (2016). "Modelling with Manipulatives: The Impact on Student Understanding and Application in Mathematics." ERIC Document, ED571821, 2016.
3. "Two large and 1 small pumps can fill a swimming pool in 4 hours," Transtutors, URL: https://www.transtutors.com/questions/two-large-and-1-small-pumps-can-fill-a-swimming-pool-in-4-hours-one-large-and-3-smal-9841455.htm. [Accessed: April 15, 2024].
4. Landmark Outreach (2024). Finding the Main Idea. URL: https://www.landmarkoutreach.org/strategies/finding-main-idea/.
5. North Carolina Department of Public Instruction, "Comprehension for 4th and 5th Grades," DPI, URL: https://www.dpi.nc.gov/students-families/parents-corner/literacy-home-digital-childrens-reading-initiative/4th-and-5th-grades/comprehension-4th-5th-grades. [Accessed: April 15, 2024].
6. Reading Rockets, "Seven Strategies to Teach Students Text Comprehension," Reading Rockets. URL: https://www.readingrockets.org/topics/comprehension/articles/seven-strategies-teach-students-text-comprehension. [Accessed: April 15, 2024].
7. "7.04: Graphing Linear Equations in Two Variables," LibreTexts, URL: https://math.libretexts.org/Bookshelves/Algebra/Elementary_Algebra_(Ellis_and_Burzynski)/07%3A_Graphing_Linear_Equations_and_Inequalities_in_One_and_Two_Variables/7.04%3A_Graphing_Linear_Equations_in_Two_Variables. [Accessed: April 15, 2024].
8. "Binary - Computer Science - GCFLearnFree.org," GCFLearnFree.org, URL: https://edu.gcfglobal.org/en/computer-science/binary/1/. [Accessed: April 15, 2024].
9. National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine, "Chapter 4," National Academies Press, [Online]. Available: https://nap.nationalacademies.org/read/5777/chapter/4. [Accessed: April 15, 2024].

Text of the article was accepted by Editorial Team 16.04.2024

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/fmo2024.v39i3-05

УДК 373.5.016:004.4

ДОСВІД ІНТЕГРУВАННЯ МАСОВИХ ВІДКРИТИХ ОНЛАЙН КУРСІВ У ФОРМАЛЬНУ ОСВІТУ

Неля ДЕГТЯРЬОВА ✉
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
degtyarevanv@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0001-9590-4915

Людмила ПЕТРЕНКО
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
nachnavch@sspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0001-5533-5324

Оксана ЖМУД
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Україна
o.v.zhmud@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9978-1921

Вікторія МАКАРОВА
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
vikaodinstova@gmail.com
https://orcid.org/0009-0000-6511-2167

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Невідповідність змісту освіти сучасним вимогам до здобувачів, постійне скорочення годин у формальній освіті, в окремих випадках неактуалізований матеріал, втрата популярності та авторитету закладів формальної освіти є тими суперечностями, що актуалізують неформальну освіту. Масові відкриті онлайн курси (далі МВОК) стають усе більш затребуваними, оскільки надають можливість швидко набути необхідні знання та навички, обирати різні курси на різних платформах, обирати тьюторів і темп навчання. Дане дослідження було спрямовано саме на особливості інтегрування неформальної освіти у формальну. Метою даної роботи стало теоретично обґрунтувати та експериментально перевірити ефективність інтегрування МВОК у формальну освіту для майбутніх учителів інформатики.

Матеріали і методи. При роботі над проблемою дослідження були використані теоретичні методи: аналіз наукових джерел щодо стану розробленості проблеми дослідження, узагальнення власного досвіду, вивчення методичних матеріалів та нормативних джерел. Здійснювалося і експериментальне дослідження, а саме: анкетування, педагогічний експеримент та статистичне опрацювання його результатів, дослідження рефлексивного сприйняття результатів учасниками експерименту.

Результати. Дана робота є продовженням дослідження, що було розпочато у 2021 році і окремі результати оприлюднені раніше. Дослідження було розпочато з анкетування. В роботі оприлюднено окремі результати 2023 року, а також проаналізовано і зміни, що відбулися у порівнянні з аналогічним опитуванням респондентів у 2021-початку 2022 років. Наступним кроком стало вхідне діагностування - контрольний зріз знань з дисципліни «Цифрові технології», «Інформаційно-комунікаційні технології», «Інформатика» (в залежності від освітньої програми). В статті наведено опрацьовані результати даного дослідження. Отримані результати показали, що збільшення кількості студентів експериментальної групи, які пройшли високий і достатній рівень, та зменшення їх кількості на середньому та низькому рівнях свідчать про ефективність інтегрування неформальної освіти у формальну. Такі зміни були більш очевидними для експериментальної групи. Вважаємо, що експериментальне підтвердження ефективності інтеграції неформальної освіти, а саме МВОК, у формальну відбулося.

Для цитування:	Дегтярьова Н., Петренко Л., Жмуд О., Макарова В. Досвід інтегрування масових відкритих онлайн курсів у формальну освіту. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 3. С. 38-45. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i3-05
	Дегтярьова, Н., Петренко, Л., Жмуд, О., & Макарова, В. (2024). Досвід інтегрування масових відкритих онлайн курсів у формальну освіту. *Фізико-математична освіта*, *39*(3), 38-45. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-05
For citation:	Dehtiarova, N., Petrenko, L., Zhmud, O., & Makarova, V. (2024). Experience in integration of mass open online courses into formal education. *Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 38-45. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-05
	Dehtiarova, N., Petrenko, L., Zhmud, O., & Makarova, V. (2024). Dosvid intehruvannia masovykh vidkrytykh onlain kursiv u formalnu osvitu [Experience in integration of mass open online courses into formal education]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 38-45. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-05

✉ Corresponding author

Висновки. Протягом 2х років ставлення до масових відкритих онлайн курсів змінилося: кількість респондентів, які повністю долучаються до неформальної освіти, зросла; зросла і кількість респондентів, які використовують українські платформи EdEra. Prometheus, Дія, зросла; проблема доступу до курсів у містах та селищах, де не відбуваються воєнні дії, не є суттєвою. Це було підкріплено і рефлексією самих здобувачів. Вони відмітили позитивні зміни у власних знаннях та навичках. Були узагальнені рекомендації щодо інтеграції МВОК у формальну освіту. Перспективи подальших досліджень вбачаємо у розробці курсів з розміщенням їх на конкретних платформах з метою підтримки формальної освіти спеціальності Середня освіта (Інформатика).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *неформальна освіта; масові відкриті онлайн-курси; комп'ютер в освіті; самоосвіта; навчання впродовж життя; складні умови навчання.*

EXPERIENCE IN INTEGRATION OF MASS OPEN ONLINE COURSES INTO FORMAL EDUCATION

Nelya DEHTIAROVA ✉
Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, Ukraine
degtyarevanv@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0001-9590-4915

Lyudmyla PETRENKO
Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, Ukraine
nachnavch@sspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0001-5533-5324

Oksana ZHMUD
Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Ukraine
o.v.zhmud@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9978-1921

Victoria MAKAROVA
Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, Ukraine
vikaodinstova@gmail.com
https://orcid.org/0009-0000-6511-2167

ABSTRACT

Formulation of the problem. The mismatch between the content of education and modern requirements for learners, constant reduction of hours in formal education, occasionally outdated material, loss of popularity and authority of formal education institutions are the contradictions that make non-formal education relevant. Massive Open Online Courses (MOOCs) are emerging as a promising solution, offering the opportunity to quickly acquire necessary knowledge and skills, choose various courses on different platforms, select tutors, and control the pace of learning. This study focused specifically on the features of integrating non-formal education into formal education, to theoretically substantiate and experimentally test the effectiveness of MOOCs in bridging the gap between formal education and the evolving needs of future computer science teachers.

Materials and Methods. To address the research problem, we used theoretical methods: analysis of scientific sources on the state of the research problem, generalization of personal experience, study of methodological materials, and normative sources. Experimental research was also conducted, including surveys, pedagogical experiments, statistical processing of results, and investigation of experiment participants' reflective perception of results.

Results. This work continues the research that began in 2021; some results have been published previously. The research started with a survey. The paper presents some results from 2023 and analyzes changes compared to a similar study of respondents in 2021-early 2022. The next step was an initial diagnosis - a control test of knowledge in the disciplines of "Digital Technologies," "Information and Communication Technologies," and "Computer Science" (depending on the educational program). The results showed that an increase in the number of students in the experimental group who achieved high and sufficient levels and a decrease in their number at the average and low levels indicate the effectiveness of integrating non-formal education into formal education. These changes were more evident in the experimental group.

Conclusions. Over 2 years, attitudes towards massive open online courses (MOOCs) have significantly shifted: the number of respondents fully engaging in informal education has increased; the number of respondents using Ukrainian platforms EdEra, Prometheus, and Diya has also grown; and the issue of access to courses in cities and towns where there is no warfare is not significant. This positive change in attitudes and usage patterns indicates a growing acceptance and effectiveness of MOOCs in formal education. Recommendations for the integration of MOOCs into formal education were summarized. We see promising prospects for further research in developing courses and placing them on specific platforms to support formal education in Secondary Education (Computer Science).

KEYWORDS: *non-formal education; Massive Open Online Courses (MOOCs); computer in education; self-education; lifelong learning; challenging learning conditions.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Здобувачі освіти України навчаються в нових складних умовах. Дистанційна освіта покладає на здобувача освіти відповідальність за власні результати. Методики навчання актуальні ще 5 років тому не можуть бути застосовані в повній мірі зараз. Дистанційна освіта виводить на перший план тих, хто готовий працювати самостійно, усвідомлює відповідальність за власні результати навчання, вимагає від викладача знань та наполегливо працює над набуттям та вдосконаленням навичок. І в таких умовах неформальна освіта користується усе більшим попитом. До цього спонукає як можливість отримати необхідні навички швидко, так і цифрова та інформаційна глобалізація. Наразі доступними є вітчизняні і закордонні ресурси. Найбільш затребуваними засобами неформальної освіти стали масові відкриті онлайн курси (далі МВОК). Причинами їх затребуваності є такі суперечності (Dehtiarova et al., 2021; Nazir et al., 2015; Yurchenko & Drushlyak et al., 2021):

– невідповідність змісту освіти у закладах середньої та вищої освіти сучасним вимогам до сформованих компетентностей здобувачів;

– постійне скорочення годин і звідси недостатня кількість занять для закріплення навичок та відпрацювання умінь у формальній освіті;

– в окремих випадках неактуалізований матеріал, що пропонується при формальній освіті;

– втрата популярності та авторитету закладів формальної освіти.

Позитивними моментами вибору на користь неформальних курсів є:

– можливість швидко набути необхідні знання та навички;

– можливість обирати різні курси на різних платформах, обирати тьюторів і темп навчання;

– можливість зупинити і далі не відвідувати курс з неякісним поданням або такий, що не відповідає змісту або заявленій назві;

– відсутність стресових ситуацій при необхідності захищати виконані роботи, відповідати усно тощо;

– відсутність обов’язкових дисциплін.

Тому така форма освіти поступово займає свою нішу. Проте вважаємо, що онлайн-курс не може замінити повну освіту. Освітні програми на даний час удосконалюються відповідно запитів від абітурієнтів. Кожна програма переглядається з обговоренням: відбувається оприлюднення на сайті, де кожний відвідувач може лишити свій відгук та рекомендації щодо покращення змісту освітньої програми. Окрім того, освіта полягає не лише в набутті навичок та знань, а й у соціалізації, обміні досвідом, формуванні soft skills. У закладі вищої освіти здобувач отримує не лише фахові навички, але й умови для розвитку особистості, набуттю соціального досвіду, формування кола спілкування та розширення світогляду. Навчання має бути соціальним досвідом, а не взаємодією між людиною та пристроями (Gamage et al., 2016).

Разом з тим курси та інші засоби неформальної освіти є невід’ємним елементом прогресу. Вони доповнюють формальну освіту. Попит породжує пропозицію, тому і кількість таких курсів збільшується дуже швидко. А це означає, що якість таких продуктів різна. І саме фахівець, в даному випадку викладач, може оцінити якість пропонованого матеріалу та достатність та доцільність матеріалів для його закріплення та набуття навичок. Тому дане дослідження було спрямовано саме на особливості інтегрування неформальної освіти у формальну.

Аналіз актуальних досліджень. В умовах пандемії, війни чи інших складних обставин доступ до закладів обмежено на певний час. І щоб не втрачати час і можливості, молодій людині важливо продовжувати розвиватися, формувати власні компетенції та досвід. Виходом є неформальна освіта. Як зазначалося вище, найдоцільнішим елементом неформальної освіти, який можна запровадити у закладах вищої освіти вважаємо масові відкриті онлайн-курси. І це пояснюється тим, що умови для кожного студента можуть бути різними. Такі курси реалізуються уже певний час і різними аспектами їх впровадження цікавилися науковці та методисти. С.Й. Блекмон, Ч.Х. Мейджор вивчали сутність МВОК, їх різноманітність та описали авторське бачення їх типології (Blackmon & Major, 2017). Мотивацію до навчання та показники проходження курсів досліджували У. Назір, Х. Девіс та Л. Харріс (Nazir et al., 2015). Кількісний аналіз IT-курсів розроблено О. Семеніхіною, В. Шамонею, А. Юрченко та ін. (Yurchenko et al. 2021).

Навчання на курсах чи за відеоуроками йде досить гармонійно, коли доросла людина розширює свої компетенції за їх допомогою. Неузгодженість виникає у випадку, коли студент отримав знання у неформальній освіті, набув умінь і не має бажання проходити аналогічний матеріал у навчальному закладі. При цьому оцінити відповідність компетентностей, кількості кредитів, тематики здобувач не завжди може об’єктивно. Відмінності між курсами за рейтингом досліджували Gamage D., Perera I., Fernando S. Автори дійшли висновку, що курси з вищим рейтингом не відрізняються за змістом, але такі курси прості для сприйняття, з гарною подачею матеріалу. Студенти обирають курси, керуючись своєю інтуїцією. Автори зазначають, що деякі розробники не приділяють особливої уваги дизайну чи методичним питанням при створенні, а лише вдосконалюють курси в майбутньому відповідно до коментарів (Gamage et al., 2016). Викладач повинен визначити, чи є відповідність теоретичного матеріалу, чи сформовані уміння, які передбачалися в результаті вивчення. Викладач повинен визнавати або не визнавати результати і обґрунтовувати це. І тут сформулюються проблеми, які необхідно вирішити в цей час:

• необхідний чіткий скоординований процес інтеграції неформальної освіти у формальну;

• необхідна процедура визначення критеріїв урахування знань і навичок, набутих у неформальній освіті, під час оцінювання результатів навчання;

• важливо те, що визначення особливостей вибору платформ і курсів залежить від студента, але викладач не зобов’язаний знати рівень викладання в усіх курсах усіх платформ;

• існує проблема психологічної готовності самих викладачів сприймати неформальну освіту студентів;

• учень повинен нести відповідальність за якість засвоєння знань.

Усе сказане також підтверджується дослідженнями інших вчених. Lazarus Fc. і Suryasen R. досліджував проблему впровадження МВОК в освіту країн, що розвиваються. Автори на основі поглибленого аналізу зазначають, що чим вищим буде проникнення МВОК, тим більшим буде покращення якості вищої освіти (Lazarus & Suryasen, 2022). Отже, той факт, що запровадження курсів, зокрема, та неформальної освіти загалом є актуальним в Україні, є вагомим фактором підвищення якості освіти.

Але вважаємо за доцільне зауважити, що онлайн-курс не може замінити повну освіту. Навчання полягає не лише в набутті навичок та знань, а й у соціалізації, обміні досвідом, формуванні soft skills. Навчання має бути соціальним досвідом, а не взаємодією між людиною та пристроями (Warren J et al., 2014). Окрім того, при інтеграції елементів неформальної освіти в навчальний процес у ЗВО необхідний контроль викладача за процесом. Він може визначити якість викладу матеріалу та його відповідність дисципліні. Тому на рівні Міністерства освіти та науки України, а також в межах автономії закладів освіти розробляються рекомендації чи положення щодо перезарахування знань, що отримані у неформальній освіті (*mon.gov.ua; https://sspu.edu.ua/, 2022; https://udpu.edu.ua/, 2023*)

Метою даної роботи стало теоретично обґрунтувати та експериментально перевірити ефективність інтегрування МВОК у формальну освіту для майбутніх учителів інформатики.

Завдання дослідження:

– виявити динаміку зміни ставлення до МВОК;

– експериментально перевірити доцільність підтримки формальної освіти МВОК та визначити оцінку з боку здобувача;

– узагальнити окремі методичні рекомендації щодо інтегрування масових відкритих курсів у формальну освіту.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

При роботі над проблемою дослідження були використані методи теоретичного рівня наукового пізнання: аналіз наукових джерел щодо стану розробленості проблеми дослідження, узагальнення власного досвіду, вивчення методичних матеріалів та нормативних джерел. Також проведено експериментальне дослідження, а саме: анкетування перед проведенням педагогічного експерименту, педагогічний експеримент та статистичне опрацювання його результатів, дослідження рефлексивного сприйняття результатів здобувачами – учасниками експерименту.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дана робота є продовженням дослідження, що було розпочато у 2021 році і окремі результати оприлюднені у (Дегтярьова та ін., 2021; Dehtiarova et al., 2023). Дослідження було розпочато з анкетування. Його метою було виявлення загального відношення до неформальної освіти, рівень забезпечення цифровими пристроями та доступом до глобальної мережі здобувачів освіти. Анкетування проводилось у 2021 році та у грудні 2022 року. Пізніше у вересні 2023 року автори збирали думки анкетованих щодо навчання у складних умовах. Тут було проведено опитування за допомогою Google Forms та задіяно особисте спілкування з респондентами. У статті проаналізовано також і зміни, що відбулися. Такий експеримент продемонстрував, що курси МВОК є підтримкою формальної освіти в різних умовах.

Анкетування проводилось на базі Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка, Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини, Кременецької обласної гуманітарно-педагогічної академії імені Тараса Шевченка, шкіл Сум, Умані, Кременця, Києва та селищ міського типу. Опитування проводилось за допомогою Google Forms. У 2021 році взяли участь 205 респондентів; у 2022-2023 р. було опитано 215 респондентів. Кожна анкета містила 15 питань. Кількість здобувачів, викладачів та інших фахівців серед них розподілялася так, як продемонстровано на рисунку 1.

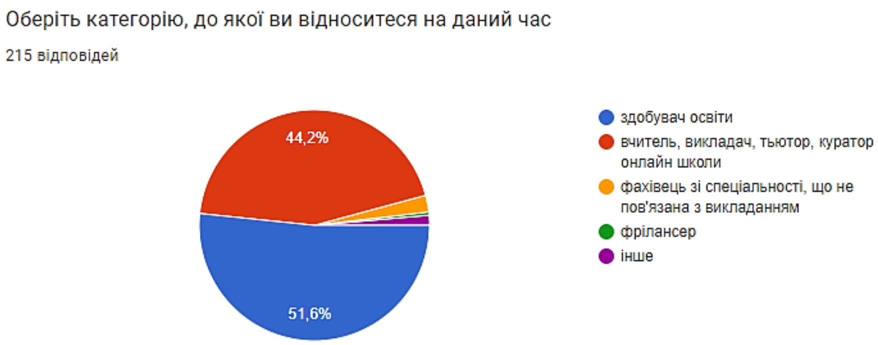


Рис. 1. Розподіл цільової аудиторії.

Джерело: авторська розробка.

В опитуванні була задіяна кількість здобувачів та вчителів/викладачів приблизно однакова. Фахівців з інших спеціальностей було задіяно 5, що становить 2,3 %, «інше» обрали 3 респондента, що становить 1,4%, «фрілансер» обрано одним з усіх (0,5%).

Далі були поставлені запитання щодо розуміння самого поняття неформальної освіти, проходження МВОК, платформ, на яких таку курси обиралися. Відповіді відображені на рисунках 2 та 3.

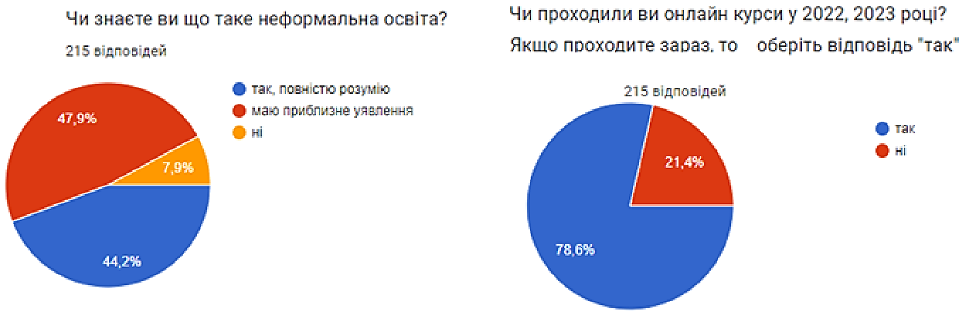


Рис. 2. Розподіл відповідей щодо усвідомлення поняття неформальної освіти, проходження МВОК.
Джерело: авторська розробка.

Такі запитання задавалися в опитуваннях 2021 року та у опитуваннях 2022 та 2023 рр. Кількість респондентів, які повністю розуміють концепцію неформальної освіти, зросла з 42,9% до 44,2%. Кількість респондентів, які мали приблизне уявлення, також зросла на 47,9% (дані 2022 - 2023 рр.) порівняно з 44,9% (2021 рік). Кількість респондентів, які не цікавляться неформальною освітою, зменшилася з 12,2% до 7,9%.

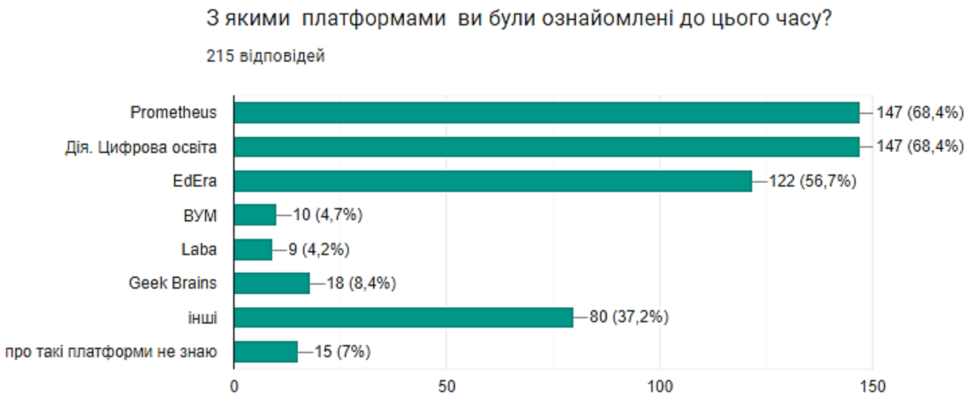


Рис. 3. Розподіл відповідей щодо усвідомлення поняття неформальної освіти, проходження МВОК.
Джерело: авторська розробка.

Prometheus, Дія. Цифрова освіта, Coursera виявилися найвідомішими для цієї категорії респондентів. Ці категорії обрали більшість респондентів на обох етапах опитування. В опитуванні 2022-2023 років зросла кількість респондентів, які дізналися про EdEra. Prometheus, Дія. Цифрова освіта, EdEra – це українські платформи, де розміщені переважно безкоштовні курси з різних напрямків. Автори Prometheus також пропонують платні курси.

Одним із запитань цієї анкети було таке: «Чи змінилося Ваше ставлення до навчання після початку війни Росії проти України?» А 68,9% респондентів (а це 144 особи з 215) відповіли, що «тепер потрібно більше цінувати можливість навчатися». 21,5% респондентів не змінили свого ставлення, 7,2% обрали головне відповідь «зараз не час вчитися, можна вчитися пізніше».

Важливим запитанням вважаємо: «Який пристрій ви найчастіше використовуєте для навчання та проходження курсів?». Це демонструє можливість здобувачів отримувати освітній контент. Розподіл відповідей продемонстровано на рис. 4

Рис. 4. Розподіл відповідей щодо пристроїв, доступних до використання.
Джерело: авторська розробка.

Лише 2 респонденти з 215 мали проблеми з доступом до пристрою чи мережі, а понад 50% мали кілька пристроїв, за допомогою яких вони мали можливість навчатися. Цей факт дав підстави стверджувати, що проблема доступу до курсів у містах не є суттєвою.

Для отримання більш повної інформації щодо можливостей знаходитися на зв'язку та отримувати освітній контент були охоплені великі міста та невеликі селища:

• Київ – столиця України з населенням понад 2,8 млн осіб,
• Суми – обласне місто з населенням понад 260 тис. осіб,
• Умань – адміністративний центр Уманського району з населенням близько 82 тис. осіб,
• Кременець – невелике місто Тернопільської області з населенням менше 21 000 осіб,
• невеликі міста та селища міського типу Сумської області та Уманського району, населення яких могло становити не більше 3-5 тис. осіб.

Наступним кроком стало вхідне діагностування - контрольний зріз знань з дисципліни «Цифрові технології», «Інформаційно-комунікаційні технології», «Інформатика» (в залежності від освітньої програми). Контрольний зріз включав у себе теоретичні питання у вигляді тесту та практичне завдання з комплексним завданням. В завданні було передбачена робота з текстом, електронною таблицею, побудова діаграми та робота з алгоритмічними структурами. Завдання складалися з завдань шкільного рівня та завдань того курсу, який здобувачі уже опанували на той час у відповідному закладі.

Далі відбувалися зустрічі зі здобувачами, на яких пропонувалися різні курси на різних платформах. Прикладом є курс «Word та Excel: інструменти і лайфхаки» на платформі Prometheus, «Вивчай Python безкоштовно українською» на платформі DOU або «Приміряй на себе професію розробника Python» на платформі Go IT. Курси були присвячені роботі з текстом, електронними таблицями, алгоритмізацією та програмуванням. Не усі курси викладач має знати та проходити особисто. Тому здобувачам було запропоновано знаходити курси також і самостійно, а потім узгоджувати з викладачем. Проблема узгодження курсу полягає у тому, що викладач має визначити чи достатньо теоретичного матеріалу та завдань для формування тих складових цифрових компетентностей, які б формувалися безпосередньо на занятті.

Навички, отримані на курсі, розширили навчання на курсі «Цифрові технології» формальної освіти. Курс студенти обирали самостійно та погоджували з викладачем. Це було необхідно для того, щоб сформовані та згодом оцінені навички були приблизно однаковими. Якщо здобувач вибирав курс, у якому не було всіх необхідних матеріалів і завдань, викладач рекомендував на вибір кілька курсів. Наступним етапом була контрольна перевірка та порівняння з результатами на початку експерименту.

Дві групи в Сумському державному педагогічному університеті імені А.С. Макаренка та Уманському державному педагогічному університеті імені Павла Тичини для оцінки ефективності інтеграції МВОК у формальну діяльність. Студенти обох груп мали статистично однакові результати навчання. До експериментальної групи (ЕГ) увійшли 25 студентів. До її складу увійшли 12 студентів 4 курсу бакалаврату та 13 студентів 1 курсу магістратури. Контрольну групу (КГ) склали 24 студенти, з них 12 студентів 4 курсу бакалаврату та 12 студентів 1 курсу магістратури. Визначення ефективності проводилось на основі оцінювання теоретичних знань, практичних навичок та рефлексивного сприйняття студентом власного результату. Контроль проводився на початку та в кінці курсу. Він включав тестування з теоретичної частини та виконання практичних завдань. Цю частину оцінював викладач. Крім того, окремим критерієм була рефлексія: бесіда та опитування студентів щодо рівня усвідомлення власних знань. Слід зазначити, що показники рефлексії були суб'єктивною оцінкою студентів. Опитування для студентів бакалаврів та магістрів були різними, залежно від їхніх дисциплін.

Результати були виражені в рівнях високий, достатній, середній і низький. Отримані результати представлені в таблиці 1 та 2 (Dehtiarova et al., 2023).

Таблиця 1. Результати виконання завдань на початку та в кінці експерименту (експериментальна група)

Критерій	Рівень	Вхідний зріз знань		Вихідний зріз знань		Зміни	
		Кількість	У %	Кількість	У %	Кількість	У %
Теоретичні знання	Високий	2	8	5	20	3	12
	Достатній	8	32	11	44	3	12
	Середній	10	40	8	32	-2	-8
	Низький	5	20	1	4	-4	-16
Усього:		25	100	25	100		
Практичні навички	Високий	3	12	6	24	3	12
	Достатній	8	32	12	48	4	16
	Середній	9	36	7	28	-2	-8
	Низький	5	20	0	0	-5	-20
Усього:		25	100	25	100		
Рефлексія	Високий	0	0	5	20	5	20
	Достатній	10	40	12	48	2	8
	Середній	12	48	8	32	-4	-16
	Низький	3	12	0	0	-3	-12
Усього:		25	100	25	100		

Джерело: авторська розробка, оприлюднено також (Dehtiarova et al., 2023).

Таблиця 2. Результати виконання завдань на початку та в кінці експерименту (контрольна група)

Критерій	Рівень	Вхідний зріз знань		Вихідний зріз знань		Зміни	
		Кількість	У %	Кількість	У %	Кількість	У %
Теоретичні знання	Високий	1	4,2	3	12,5	2	8,3
	Достатній	8	33,3	9	37,5	1	4,2
	Середній	11	45,8	10	41,7	-1	-4,2
	Низький	4	16,7	2	8,3	-2	-8,3
Усього:		24	100	24	100		
Практичні навички	Високий	2	8,3	3	12,5	1	4,2
	Достатній	8	33,3	10	41,7	2	8,3
	Середній	10	41,7	10	41,7	0	0,0
	Низький	4	16,7	1	4,2	-3	-12,5
Усього:		24	100,0	24	100		
Рефлексія	Високий	1	4,2	3	12,5	2	8,3
	Достатній	10	41,7	10	41,7	0	0,0
	Середній	10	41,7	10	41,7	0	0,0
	Низький	3	12,5	1	4,2	-2	-8,3
Усього:		24	100	24	100		

Джерело: авторська розробка, оприлюднено також (Dehtiarova et al., 2023).

Наведені дані показали, що збільшення кількості студентів експериментальної групи, які пройшли високий і достатній рівень, та зменшення їх кількості на середньому та низькому рівнях свідчать про ефективність інтегрування неформальної освіти у формальну. Порівняння змін, що відбулися в ЕГ і КГ, також підтвердило цей факт. Такі зміни були більш очевидними для експериментальної групи.

Статистичне опрацювання проводилися за двостороннім критерієм Стьюдента за допомогою аналізу даних табличного процесора (функція двовибіркового t тесту з різними дисперсіями). Оцінювання відбувалося у 20 бальній системі: низький рівень 1-5 балів, середній 6-10 балів, достатній 11-15, високий 16-20 балів. Були сформульовані дві гіпотези: H_0 – відмінності у групах випадкові і не залежать від застосовуваної методики, H_1 – методика, що застосовується, впливає на успішність та набуття компетентностей здобувачами. Обчислення критерію до проведення експерименту продемонструвало, що істотної різниці між контрольною та експериментальною групою не суттєві: t kr=2,01, tст=0,32. Після проведення експерименту різниця між критичним та статистичним показниками свідчить, що підвищення успішності пояснюється застосовуванням даної методики: t kr=2,01, tст=2,81.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Результати проведеного дослідження можна узагальнити відповідно поставлених завдань.

1. Протягом 2х років ставлення до масових відкритих онлайн курсів змінилося: кількість респондентів, які повністю розуміють концепцію неформальної освіти, зросла з 42,9% до 44,2%; кількість респондентів, які мали приблизне уявлення, також зросла на 47,9% (дані 2022 - 2023 рр.) порівняно з 44,9% (2021 рік); кількість респондентів, які не цікавляться неформальною освітою, зменшилася з 12,2% до 7,9%. Кількість респондентів, які дізналися про українські платформи EdEra. Prometheus, Дія, зросла. Що свідчить про стабільне зростання довіри до вказаних платформ та затребуваність запропонованих на них курсів. Проблема доступу до курсів у містах та селищах, де не відбуваються воєнні дії, не є суттєвою: лише 2 респонденти з 215 мали проблеми з доступом до пристрою чи мережі, а понад 50% мали кілька пристроїв, за допомогою яких вони мали можливість навчатися.

2. Було проведено експериментальне дослідження, де порівнювалися групи, у яких впроваджувалося інтегрування неформальної освіти у формальну та групи, які не проходили додаткові МВОК. Проведення статистичного опрацювання, де підтвердилося ефективність інтегрування неформальної освіти у формальну, було підкріплено рефлексією самих здобувачів. Вони відмітили позитивні зміни у власних знаннях та навичках. При цьому вони відмічали необхідність підтримки з боку викладача та проведення консультацій при проходженні студентом курсу на обраній платформі.

3. Після проведення експерименту та аналізу отриманих результатів можна сформулювати наступні рекомендації:

1. Курси для студентів доцільно рекомендувати викладачеві, який перед початком курсу аналізує, чи включені теоретичні теми та чи пропонуються практичні завдання, близькі до запланованих.
2. Викладач чітко формулює критерії оцінювання результатів навчання.
3. Викладач, вивчаючи курси, може розширити власні компетенції, знайти більш відповідні методи навчання, більше вдалих прикладів.
4. Лектор має бути готовим до конфліктних ситуацій. Наприклад, студент пройшов певний курс без консультації з викладачем. Такий курс має споріднену назву, але знання, які студент там отримав, нижчі за рівнем. На початку вивчення дисципліни викладач повинен представити студентам програму, де чітко прописані вимоги до рівня знань і критерії їх оцінювання.
5. Студент повинен підтвердити набуті знання та вміння під час співбесіди або іншим методом оцінювання (тестування, виконання практичного завдання тощо).

Маємо підстави стверджувати, що експериментальне підтвердження ефективності інтеграції неформальної освіти, а саме МВОК, у формальну освіту відбулося.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо у розробці курсів з розміщенням їх на конкретних платформах з метою підтримки формальної освіти спеціальності Середня освіта (Інформатика).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дегтярьова, Н., Гонтар, О., & Вернидуб, Г. (2021). Ставлення до масових відкритих онлайн-курсів як форми неформальної освіти. *Фізико-математична освіта*, 32(6), 18-22. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-032-6-003.
2. Неформальна та інформальна освіта: як отримати визнання результатів навчання. МОН України. https://mon.gov.ua/ua/news/neformalna-ta-informalna-osvita-yak-otrimati-viznannya-rezultativ-navchannya.
3. Положення про порядок визнання результатів навчання у неформальній та/або інформальній освіті у Сумському державному педагогічному університеті імені А.С. Макаренка. Суми. 2022. https://sspu.edu.ua/images/2022/docs/polozhennia/pro_perezarahuvannya_baliv_u_neformalniy_osviti_1f01f.pdf
4. Порядок визнання результатів навчання, здобутих шляхом неформальної та/або інформальної освіти в Уманському державному педагогічному університеті імені Павла Тичини. Умань. 2023. http://surl.li/etkrf.
5. Blackmon, SJ., & Major, CH. (2017). Wherefore Art "Thou MOOC?: Defining Massive Open Online Courses". *Online Learning*. Vol. 21 (4), 195-221.
6. Dehtiarova, N., Zhmud, O., Makarova, V., Hontar, O., & Zakharevych, M. (2023). Non-Formal Education: Dynamics of Changes in the Popularity of Mass Open Online Courses. *46th ICT and Electronics Convention, MIPRO 2023 Opatija*. 22 May 2023 through 26 May 2023. https://doi.org/10.23919/MIPRO57284.2023.10159937.
7. Gamage, D., Perera, I., & Fernando, S. (2016). What do star rates for MOOCs tell you? An analysis of pedagogy and review rates to identify effective pedagogical model. *Think Global Act Local, 2016 24th international conference on computers in education.* ICCE 2016, 300-302.
8. Lazarus, FC., & Suryasen, R. (2022). The quality of higher education through MOOC penetration and the role of academic libraries. *Insights-The UKSJ Journal*. May.
9. Nazir, U., Davis, H. & Harris, L. (2015) Input On Mooc Forums Is Dominated By Completers. *Edulearn15: 7th International Conference On Education And New Learning Technologies*, 4003-4009.
10. Yurchenko, A., Drushlyak, M., Sapozhnykov, S., Teplytska, S, Koroliova, T., & Semenikhina, O. (2021) Using online IT-industry courses in the computer sciences specialists' training. *International Journal of Computer Science and Network Security*, 21(11), 97-104. https://doi.org/10.22937/IJCSNS.2021.21.11.13.
11. Yurchenko, A., Shamonia, V., Udovychenko, O., Momot, R., & Semenikhina, O. (2021) Improvement of teacher qualification in the field of computer animation: Training or master class? *44th International Convention on Information, Communication and Electronic Technology, MIPRO 2021*, 631-635. https://doi.org/10.23919/MIPRO52101.2021.9596946.
12. Warren, J., Rixner, S., Greiner, J., & Wong, S. (2014) Facilitating Human Interaction in an Online Programming Course. *45th ACM SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education* (SIGCSE), 665-670.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Dehtiarova, N., Hontar,O., & Vernydub, H. (2021). Attitude towards mass open online courses as a form of non-formal education. *Physical and Mathematical Education*, 32(6), 18-22. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-032-6-003.
2. Neformalna ta informalna osvita: yak otrymaty vyznannia rezultativ navchannia. MON Ukrainy. https://mon.gov.ua/ua/news/neformalna-ta-informalna-osvita-yak-otrimati-viznannya-rezultativ-navchannya.
3. Polozhennia pro poriadok vyznannia rezultativ navchannia u neformalnii ta/abo informalnii osviti u Sumskomu derzhavnomu pedahohichnomu universyteti imeni A.S. Makarenka. Sumy. 2022. https://sspu.edu.ua/images/2022/docs/polozhennia/pro_perezarahuvannya_baliv_u_neformalniy_osviti_1f01f.pdf
4. Poriadok vyznannia rezultativ navchannia, zdobutykh shliakhom neformalnoi ta/abo informalnoi osvity v Umanskomu derzhavnomu pedahohichnomu universyteti imeni Pavla Tychyny. Uman. 2023. http://surl.li/etkrf.
5. Blackmon, SJ., & Major, CH. (2017). Wherefore Art "Thou MOOC?: Defining Massive Open Online Courses". *Online Learning*. Vol. 21 (4), 195-221.
6. Dehtiarova, N., Zhmud, O., Makarova, V., Hontar, O., & Zakharevych, M. (2023). Non-Formal Education: Dynamics of Changes in the Popularity of Mass Open Online Courses. *46th ICT and Electronics Convention, MIPRO 2023 Opatija*. 22 May 2023 through 26 May 2023. https://doi.org/10.23919/MIPRO57284.2023.10159937.
7. Gamage, D., Perera, I., & Fernando, S. (2016). What do star rates for MOOCs tell you? An analysis of pedagogy and review rates to identify effective pedagogical model. *Think Global Act Local, 2016 24th international conference on computers in education.* ICCE 2016, 300-302.
8. Lazarus, FC., & Suryasen, R. (2022). The quality of higher education through MOOC penetration and the role of academic libraries. *Insights-The UKSJ Journal*. May.
9. Nazir, U., Davis, H. & Harris, L. (2015) Input On Mooc Forums Is Dominated By Completers. *Edulearn15: 7th International Conference On Education And New Learning Technologies*, 4003-4009.
10. Yurchenko, A., Drushlyak, M., Sapozhnykov, S., Teplytska, S, Koroliova, T., & Semenikhina, O. (2021) Using online IT-industry courses in the computer sciences specialists' training. *International Journal of Computer Science and Network Security*, 21(11), 97-104. https://doi.org/10.22937/IJCSNS.2021.21.11.13.
11. Yurchenko, A., Shamonia, V., Udovychenko, O., Momot, R., & Semenikhina, O. (2021) Improvement of teacher qualification in the field of computer animation: Training or master class? *44th International Convention on Information, Communication and Electronic Technology, MIPRO 2021*, 631-635. https://doi.org/10.23919/MIPRO52101.2021.9596946.
12. Warren, J., Rixner, S., Greiner, J., & Wong, S. (2014) Facilitating Human Interaction in an Online Programming Course. *45th ACM SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education* (SIGCSE), 665-670. (in Ukrainian).

Матеріал надійшов до редакції 01.04.2024р.

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI **10.31110/fmo2024.v39i3-06** УДК **159.928.235::372.851**

МАТЕМАТИЧНА ГРАМОТНІСТЬ: ДОСВІД ІНТЕРПРЕТАЦІЇ

Таяна ДЄОРДІЦА ✉
Благодійний фонд «e-Terra», Україна
tldeorditsa@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3409-7168

Володимир ТОЛМАЧОВ
Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка, Україна
V.S.Tolmachov@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4674-8677

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У 2016 році Україна приєдналася до Програми міжнародного оцінювання учнів (Programme for International Student Assessment, PISA). Система оцінювання програми ґрунтується на логічному фундаменті, каркасом якого виступає концепт «грамотність». Так, об'єкти оцінювання учнівських здобутків з читання, математики і природознавства у документах PISA позначають відповідно термінами «читацька грамотність», «математична грамотність» і «науково-природнича грамотність». З огляду на те, що для терміна «математична грамотність» не існує універсальної дефініції, ми задалися питанням: які суттєві ознаки математичної грамотності охоплює смисловий зміст цього терміна?

Матеріали і методи. Для аналітичного вивчення концепції математичної грамотності, викладеної в рамкових документах з математики PISA (2018, 2022), ми вдалися до методу інтерпретації, зосередившись на виробленні смислового змісту однойменного терміна. У теорії поняття «смисловий зміст» розглядають як третю основну прикмету терміна, котра містить суттєві ознаки позначуваного ним поняття. Смисловий зміст терміна «математична грамотність» ми окреслили, скориставшись чотирма логічними операціями, заснованими на обох типах ієрархічних відношень між поняттями — «рід — вид» та «ціле — частина». Ось їх перелік: узагальнення поняття, таксономічний і мереологічний поділи, мереологічна інтеграція. Ідея їх застосування постає із загального морфологічного аналізу Ф. Цвіккі. Для графічного зображення структури смислового змісту розглядуваного терміна ми послуговувалися інтелект-картою.

Результати. Результати інтерпретації терміна «математична грамотність» представлено як словесне і графічне зображення його смислового змісту. Результат узагальнення поняття, позначуваного цим терміном: найближчий рід – «інтелектуальна здатність». Приклад інших видових понять цього роду — раціональне мислення і дотепність. Результат таксономічного поділу: на підставі «здатність математизувати ситуацію» в обсязі поняття «математична грамотність» виокремлено дві форми мислення — математичне й обчислювальне. Результат мереологічного поділу: математичну грамотність як здатність розв'язувати реальні буденні задачі з математичною складовою уможливлюють сім загальних математичних умінь. Результат мереологічної інтеграції: математична грамотність є складовою системи освітніх досягнень особистості у математиці. Інші складові цієї системи — математична освіченість, математична компетентність, математична культура. Метою научіння математичної грамотності вважаємо виховання в учнів інтелектуальних звичок і закріплення їх на математичному змісті.

Висновки. Вживаючи термін «математична грамотність», ми маємо на думці молоду людину, яка певною мірою володіє математичними та обчислювальними способами мислення; на прийнятному рівні опанувала основні математичні уміння, а тому здатна розв'язувати звичайні завдання з математичною складовою, які трапляються у різних контекстах її реальності. Будучи вправною в математиці, ця людина не воліє тягнути жалюгідне життя, а прагне успішно реалізуватися у різних його сферах.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *грамотність; інтелект; мислення; інтелектуальні звички; математизація; розв'язування задач.*

Для цитування:	Дєордіца Т., Толмачов В. Математична грамотність: досвід інтерпретації. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 3. С. 46-52. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i3-06
	Дєордіца, Т., & Толмачов, В. (2024). Математична грамотність: досвід інтерпретації. *Фізико-математична освіта*, *39*(3), 46-52. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-06
For citation:	Dieorditsa, T.,& Tolmachov, V. (2024). Mathematical literacy: the experience of interpretation. *Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 46-52. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-06
	Dieorditsa, T.,& Tolmachov, V. (2024). Matematychna hramotnist: dosvid interpretatsii [Mathematical literacy: the experience of interpretation]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 46-52. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-06

✉ Corresponding author

MATHEMATICAL LITERACY: THE EXPERIENCE OF INTERPRETATION

Taiana DIEORDITSA ✉
Charitable Foundation «e-Terra», Ukraine
tldeorditsa@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3409-7168

Volodimir TOLMACHOV
Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National Pedagogical University, Ukraine
V.S.Tolmachov@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4674-8677

ABSTRACT

Formulation of the problem. In 2016, Ukraine joined the Programme for International Student Assessment (PISA). The evaluation system of the program is based on a logical foundation, the frame of which is the concept of «literacy». Thus, the objects of assessment of students' achievements in reading, mathematics, and science in PISA documents are designated by the terms «reading literacy», «mathematical literacy» and «scientific literacy», respectively. Given that there is no universal definition for the term «mathematical literacy», we wondered: what are the essential features of mathematical literacy covered by the semantic content of this term?

Materials and methods. For the analytical study of the concept of mathematical literacy set out in the framework documents in mathematics PISA/UCEQA (2018, 2022), we used the method of interpretation, focusing on the making of the semantic content of the term under study. In the theory of the notion, the semantic content is considered as the third main characteristic of the term, which contains the essential signs of the notion it labelled. For the term «mathematical literacy» we derived them, using four logical operations based on both types of hierarchical relations between the notions — «genus — species» and «whole-part». Here is a list of them: generalization of the notion, taxonomic and mereological divisions, and mereological integration. The idea of their application arises from the general morphological analysis of F. Zwicky. To graphically depict the structure of the semantic content of the term under study, we used a mind map.

Results. The result of the interpretation of the term «mathematical literacy» is presented as a verbal and graphic representation of its semantic content. The result of the generalization of the notion denoted by this term: the closest genus is «intellectual ability». Examples of other species of this kind are rational thinking and wit. The result of the taxonomic division: based on the «ability to mathematize the situation» within the scope of the notion of «mathematical literacy», two forms of thinking are distinguished — mathematical and computational. The result of the mereological division: mathematical literacy as the ability to solve real everyday problems with a mathematical component is possible by seven general mathematical skills. The result of mereological integration: mathematical literacy is a component of the system of educational achievements of the individual in mathematics. Other components of this system are mathematical competence and mathematical culture. We believe that the purpose of teaching mathematical literacy is to educate students on intellectual habits and consolidate them on mathematical content.

Conclusion. When we use the term «mathematical literacy», we are referring to a young person who is proficient in mathematical and computational ways of thinking to some extent; She has mastered basic mathematical skills at an acceptable level and therefore is able to solve ordinary problems with a mathematical component, which occur in different contexts of her reality. Being skilled in mathematics, this person does not agree to a routine joyless life but strives to successfully realize himself in its various areas.

KEYWORDS: *literacy, intellect; thinking; habits of mind; mathematization; problem-solving.*

ВСТУП

Постановка проблеми. У 2016 році Україна приєдналася до Програми міжнародного оцінювання учнів (Programme for International Student Assessment, PISA). Система оцінювання програми ґрунтується на логічному фундаменті, каркасом якого виступає концепт «грамотність» (Literacy). Так, об’єкти оцінювання учнівських здобутків з читання, математики і природознавства у документах PISA позначають відповідно термінами «читацька грамотність», «математична грамотність» і «науково-природнича грамотність». З огляду на те, що для терміна «математична грамотність» не існує універсальної дефініції, ми задалися питанням: які суттєві ознаки математичної грамотності охоплює смисловий зміст цього терміна?

Аналіз актуальних досліджень. За нашими спостереженнями, термін «математична грамотність» (Mathematical Literacy), поряд із термінами «Numeracy» (здатність виконувати базові математичні дії), «Quantitative Literacy» (кількісна грамотність), «Spatial Literacy» (просторова грамотність), «Statistical Literacy» (статистична грамотність) у сучасній англомовній математичній дослідницькій літературі використовують у контексті пропозицій щодо поліпшення викладання і вивчення математики.

Для написання цієї статті нам стала у пригоді оглядова публікація (Jablonka & Niss, 2014). З неї ми дізналися, що термін «математична грамотність» має американське походження, позаяк одне з перших його письмових згадувань датовано 1944 р., коли чинна на той час у США комісія Національної ради вчителів математики (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) з післявоєнних планів зажадала, аби школи забезпечували математичну грамотність для всіх, хто здатний її досягати. Проте першу спробу висвітлити сутність цього поняття у стандартах NCTM здійснено лише у 1989 р. Тоді було визначено п’ять основних цілей, яких мають досягати математично грамотні учні: 1) навчитися цінувати математику; 2) бути впевненими у своїй здатності займатися математикою; 3) навчитися розв’язувати математичні задачі; 4) навчитися спілкуватися математичною мовою; 5) навчитися міркувати математичною мовою. Автори статті запевняють, що уперше концептуалізацію математичної грамотності здійснено у межах PISA.

Особливо цінною для нашої розвідки виявилася стаття з контроверсійною назвою: «Математична грамотність: неадекватна метафора». Її автор, американський науковець П. Голденберг стверджує, що грамотність, як метафора, передбачає перший крок, поріг, необхідний для всіх, а не довгострокову мету. А «математика для всіх», на його думку, є оманою, бо вона одночасно вимагає служіння двом типам учнів: 1) тим, які ніколи не будуть використовувати навіть зачатки того, що сьогодні називають математикою середньої школи, і 2) тим, хто повинен бути підготовлений до її поглибленого вивчення. На переконання цього дослідника, щоб створити розумну «математику для всіх», потрібно приймати рішення, засновані на чомусь іншому, ніж конкретні концепції, навички або факти. Організаційним принципом викладання математики він пропонує обрати розвиток в усіх учнів інтелектуальних звичок (Habits of Mind), щоб закріплювати їх на математичному змісті. Адже математика – це не просто повсякденний здоровий глузд, а продовження природних способів мислення людей. Плідною вважаємо таку ідею цього дослідника: людина має опановувати математичну грамотність не для того, щоб просто вижити, а щоб успішно розвиватися як особистість і професіонал, реалізувавши свій шанс досягти найвищих освітніх результатів у царині математики або в суміжних з нею галузях (Goldenberg, 2014).

Порівняння описів математичної грамотності, наданих у рамкових документах PISA з математики різних років видання, дає нам підстави стверджувати, що їх автори перейнялися ідеєю П. Голденберга стосовно значущості виховання в індивіда інтелектуальних звичок. Адже в останній версії специфікації конструкта «математична грамотність» (PISA-2022) опорним стрижнем виступає інтелектуальна здатність «математичне міркування».

Усвідомлення ідей П. Голденберга підштовхнуло нас до радикальної зміни нашого первісного уявлення про математичну грамотність.

Обговорення цих ідей провідними ізраїльським викладачами-математики ми виявили у статті «Роздуми про математичну грамотність» (Sfard, 2014). Нашу особливу увагу привернуло таке незаперечне твердження: здатність учнів застосовувати математику, коли це необхідно, не розвивається сама собою навіть у студентів з математичною орієнтацією, її необхідно спеціально виховувати як у математично сильних учнів, так і у тих, хто не має схильності до математики.

Мета статті полягає у висвітленні та структуруванні смислового змісту терміна «математична грамотність» для полегшення усвідомлення його смислу.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

З’ясуємо смисл ключових слів нашої статті.

Український педагогічний словник фіксує у терміна «грамотність» два смисли: 1) певний ступінь знання законів і правил рідної мови та вміння користуватися ними для висловлювання своїх думок усно й на письмі; 2) ступінь обізнаності у певної галузі знання (музична грамотність, політична грамотність, технічна грамотність тощо) (Гончаренко, 1997).

Напевно, з огляду на друге визначення, Б. Гершунський дійшов висновку, що грамотність поліструктурна. Йдеться про те, що в ній у мінімально необхідному обсязі, але у строго науковій і водночас доступній для учня формі мають отримати своє втілення найважливіші об’єктивні характеристики і параметри природи, суспільства, людини. Ми солідарні з цим дослідником у тому, що аналіз пропедевтичних функцій грамотності можливий за умови її розгляду в сукупності з категоріями, що характеризують структуру формування особистості у цілому, як-от «освіта», «професійна компетентність», «культура», «менталітет». Рис. 1 унаочнює ієрархічні освітні «сходинки» поступу людини до найвищих освітніх результатів.

Рис. 1. Ієрархічні освітні «сходинки» поступу людини до найвищих освітніх результатів.
Джерело: розроблено авторами на основі (Гершунский, 2002).

У Програмі міжнародного оцінювання компетентності дорослих (Programme for the International Assessment of Adult Competencies, PIAAC) грамотність інтерпретують як розуміння, оцінювання і використання письмового тексту для участі у житті суспільства, досягнення власних цілей, розвитку власних знань і потенціалу (Murray, 2004).

З цього випливає, що грамотність є механізмом передачі інформації між людьми.

Інтелект (від лат. intellectus — пізнання, розуміння, розсудок) — термін для означення вищої пізнавальної здатності мислення, яка принципово відрізняється творчим, активним характером від пасивно чуттєвих форм пізнання. Призначення інтелекту — створювати порядок із хаосу через приведення у відповідність до індивідуальних потреб об’єктивних параметрів реальності (Шинкарук, 2001).

Мислення — інформаційна діяльність, що набула якості опосередкованого, узагальненого пізнання, яке за допомогою абстрагування, міркувань (зіставлень пізнавальних образів та логічного виведення думок) і типізації даних про світ явищ розкриває їх необхідні зв’язки, закономірності, тенденції розвитку (Шинкарук, 2001).

У психології інтелект тлумачать як здатність до мислення, а мислення — як процес реалізації інтелекту.

Звичка — певний спосіб дії, життя, манера поведінки або висловлювання, схильність до чогось і т. ін., що стали звичними, постійними для кого-небудь (Білодід, 1970-1980).

Інтелектуальні звички (Habits of Mind) — це термін, введений в англомовний науковий ужиток П. Голденбергом (Goldenberg, 1996). У сучасній дослідницькій літературі його використовують для позначення схильності до розумної поведінки, коли людина стикається з проблемами, які вона не відразу може подолати. Ось назви деяких загальних інтелектуальних звичок: наполегливість, прагнення до точності, рефлексування (Costa & Kallick, n.d.).

Математизація – здатність перетворювати задачу, яка стосується реального світу, у суто математичну форму, що полягає в структуруванні, концептуалізації, формулюванні припущень та/або побудові моделі, тлумачити й оцінювати математичний результат або математичну модель стосовно початкової проблеми. (Вакуленко, 2018).

Розв’язуючи задачі у життєвому контексті, людина користується математикою й математичними інструментами. Цю її роботу, за версією PISA-2018, складають такі процеси: формулювання, застосування та пояснення/оцінювання (Вакуленко, 2018).

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для аналітичного вивчення концепції математичної грамотності, викладеної в рамкових документах з математики PISA (Вакуленко, 2018; Вакуленко, 2021), ми вдалися до методу інтерпретації, зосередившись на виробленні смислового змісту однойменного терміна.

Згідно з теорією поняття (Войшвилло, & Дегтярёв, 2001), будь-який термін має три основні прикмети — предметне значення, смисл і смисловий зміст. Дві останні містять суттєві ознаки поняття, позначуваного досліджуваним терміном. Однак ознаки, які втілюють смисл терміна, повинні задовольняти вимогу: «кожна з ознак є необхідною, а вкупі усі вони є достатніми для виокремлення розглядуваних предметів». На ознаки, що втілюють смисловий зміст терміна, цю вимогу не поширюють. Смисл терміна фіксують за допомогою пізнавального прийому «дефініція», а смисловий зміст — за допомогою пізнавального прийому «характеристика». Останній в логіці відносять до «прийомів, схожих на дефініцію». На відміну від смислів, які є певними формами думки, загальними для всіх людей, смисловий зміст не має логічної структури і є суто індивідуальним для кожної людини. Однак він виконує роль, до певної міри схожу на ту, яку відіграє смисл.

Для виведення суттєвих ознак терміна «математична грамотність», що утворюють його смисловий зміст, ми послугувалися логічними операціями над позначуваним ним поняттям, а саме: узагальненням, таксономічним і мереологічним поділами, мереологічною інтеграцією.

Операцію з поняттям розуміють як систему розумових процедур, виконуваних суб’єктом з окремими логічними характеристиками поняття (змістом, обсягом, відношенням) або з цією формою думки як цілим. Специфіку названих логічних операцій розкриває побудована нами морфологічна таблиця (рис. 2).

Зв’язки / Прийоми мислення	РІД— ВИД	ЦІЛЕ — ЧАСТИНА
АНАЛІЗ	Таксономічний поділ поняття	Мереологічний поділ поняття
СИНТЕЗ	Узагальнення поняття	Мереологічна інтеграція

Рис. 2. Специфіка логічних операцій над поняттям.
Джерело: авторська розробка (Дєордіца et al., 2022).

Ідея виконання зазначених аналітичних і синтетичних логічних операцій, заснованих на обох типах ієрархічних відношень між поняттями — «рід — вид» і «ціле — частина», постає із загального морфологічного аналізу Ф. Цвіккі (F. Zwicky). Обґрунтування такого способу вироблення смислового змісту терміна містить наша стаття (Дєордіца та ін., 2022).

Для графічного зображення структури смислового змісту ми послуговувалися інтелект-картою.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Результат інтерпретації терміна «математична грамотність» подано як словесно-графічне зображення його смислового змісту.

Результат узагальнення поняття «математична грамотність»

Для цілей PISA-2022 математичну грамотність описано так: це здатність людини мислити математично і формулювати, застосовувати та інтерпретувати математику для розв’язування проблем у різноманітних контекстах реального світу. Математична грамотність включає в себе поняття, процедури, факти та засоби для опису, пояснення і прогнозування явищ; допомагає людині зрозуміти, яку роль математика відіграє у світі, й робити обґрунтовані умовиводи та ухвалювати виважені рішення, необхідні творчому, активному й мислячому громадянину XXI століття (Вакуленко, 2021).

Спираючись на цей опис, ми виконали узагальнення розглядуваного поняття шляхом усунення зайвих ознак. Тож ми дійшли висновку, що найближчий рід поняття, позначуваного терміном «математична грамотність», — це термін «інтелектуальна здатність» (Intellectual Ability). У загальноприйнятому визначенні йдеться про розумову здатність розмірковувати, планувати, вирішувати проблеми, абстрактно мислити, розуміти складні ідеї і вчитися (Colom, 2020).

Приклад інших видових понять цього роду — раціональне мислення, дотепність, планування.

Результат таксономічного поділу поняття «математична грамотність»

На підставі «здатність математизувати проблему» в обсязі поняття «математична грамотність» виокремлено дві форми мислення — математичне та обчислювальне (Computational Thinking).

Проявом математичного мислення є математичні міркування (Math Reasoning), як дедуктивні, так і індуктивні. Вони включають: оцінювання ситуацій; вибір стратегій; побудову логічних висновків; розроблення й описування розв’язків завдань; пояснення, як отримані результати можна застосувати. Учні/студенти математично міркують, коли:

визначають, розпізнають, організовують, пов'язують і представляють; конструюють, абстрагують, оцінюють, виводять, обґрунтовують, пояснюють і захищають; інтерпретують, роблять висновки, критично оцінюють, спростовують і встановлюють відповідність вимогам (Вакуленко, 2021).

Ми погоджуємося з авторами концепції математичної грамотності в тому, що навичка логічно міркувати і викладати аргументи ясним і переконливим способом набуває все більшого значення в сучасному світі, адже вона не обмежується розв'язуванням задач у традиційному сенсі, а передбачає формулювання загального поінформованого судження щодо важливих суспільних проблем, які можна розв'язати математично. Крім того, ця навичка допомагає підкріплювати судження аргументами щодо достовірності інформації, яка постійно «атакує» людей, за допомогою аналізу її кількісних і логічних наслідків.

Нам близька думка експертів PISA про те, що довгострокова траєкторія математичної грамотності має охоплювати синергетичний і взаємозалежний зв'язок математичного мислення й обчислювального мислення, яке було означене як «спосіб мислення фахівців у галузі комп'ютерів», і охарактеризоване як мисленнєвий процес, пов'язаний із формулюванням математичних задач і розробленням розв'язків для них у такій формі, яка може бути використана комп'ютером, людиною або комп'ютером і людиною разом (Вакуленко, 2021).

Ось перелік елементів обчислювального мислення, запропонований в оригінальному рамковому документі PISA з математики останньої версії (OECD, 2018): аналізування даних; алгоритмізація; декомпозиція цілей і завдань; проєктування і застосування абстракцій; свідомий вибір програмних застосунків, необхідних для розв'язання наявних завдань

Обчислювальне мислення швидко еволюціонує та розширює межі як математики, так і математичної грамотності (Вакуленко, 2021).

Результат мереологічної інтеграції поняття «математична грамотність»

З огляду на ієрархічні освітні «сходинки» до найвищих освітніх результатів за Б. Гершунським (див. рис. 1), вважаємо, що математичну грамотність доцільно розглядати як складову системи освітніх досягнень у математиці. Інші складові цієї системи — математична освіченість, математична компетентність, математична культура.

Результат мереологічного поділу поняття «математична грамотність»

Математичну грамотність як здатність розв'язувати реальні буденні задачі з математичною складовою уможливлюють сім загальних математичних умінь: сприймати — повідомляти; представляти; вибудовувати стратегії; математизувати; аргументувати й міркувати; використовувати символи, формальну й технічну мови та операції; використовувати математичні інструменти (Вакуленко, 2018).

З огляду на сказане, вважаємо, що метою научіння математичної грамотності є виховання в учнів інтелектуальних звичок і закріплення їх на математичному змісті.

Інтелект-карта на рис. 3 унаочнює структуру смислового змісту терміна «математична грамотність».

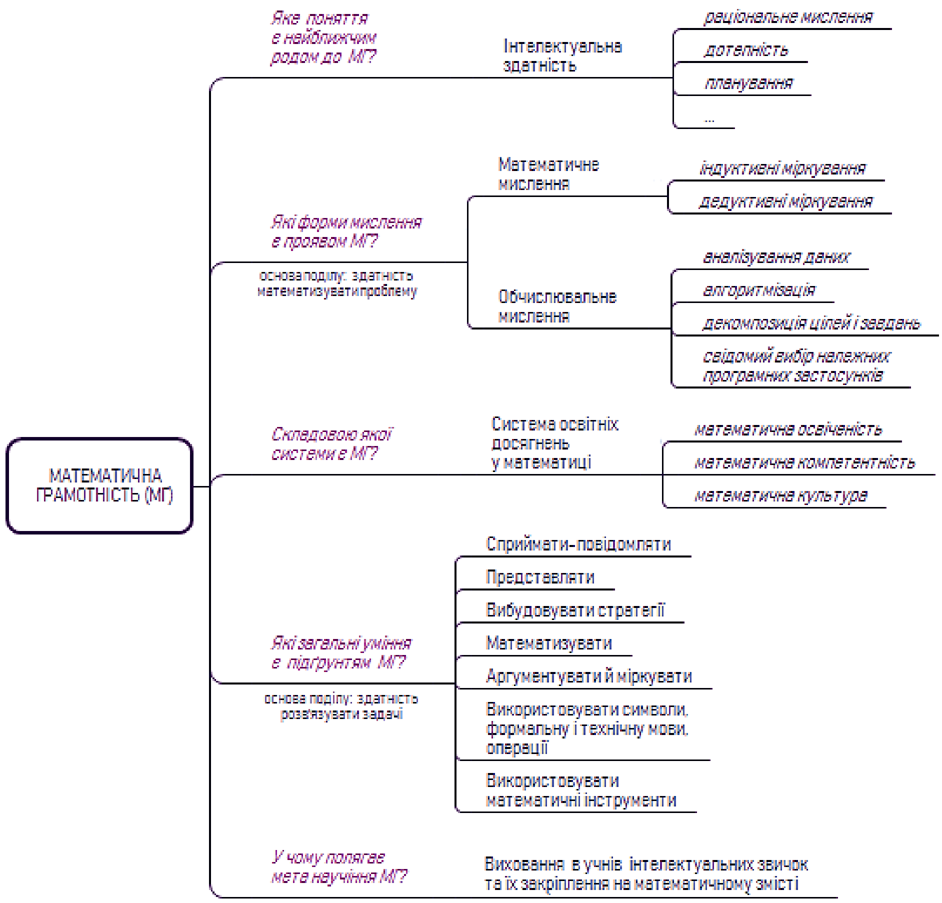


Рис. 3. Структура смислового змісту терміна «математична грамотність».

Джерело: авторська розробка.

ОБГОВОРЕННЯ

Здійснюючи інтерпретацію терміна «математична грамотність», ми звернули увагу на те, що перший рядок у переліку основних математичних умінь, якими має володіти математично грамотна людина, посідає комунікація (сприйняття й повідомлення). Знаючи схильність західних людей послуговуватися прихованими натяками, ми вважаємо такий порядок умінь опосередкованим підтвердженням тієї негативної тенденції, ознаки якої ми спостерігаємо і в нашій країні: поширення серед учнівської молоді неприйнятного рівня комунікативних навичок.

Щоб зрозуміти, наскільки ця проблема серйозна, варто звернутися до психології.

Розгорнута теорія мовленнєвої діяльності і формування мовленнєвого мислення була розроблена в радянській і світовій психології Л. Виготським. У 1940-х роках вчені його наукової школи висунули твердження про те, що мовлення дитини безпосередньо пов'язане з рівнем розвитку її мислення, зумовлене ним і визначає його, тобто процеси формування мислення і мовлення нероздільні, тому необхідно говорити не про розвиток мовлення, а про формування мовленнєвого мислення. Психологи також стверджують, що для того, аби розмовна мова була повноцінною, осмисленою і зрозумілою слухачеві, у мовленнєвому процесі необхідна така смислова складова, як розуміння. Воно ж є необхідним і для розумового процесу.

У процесі вивчення математики розуміння відіграє ключову роль. Нерозуміння того, про що говорить учитель, призводить до відсутності інтересу до математики, до небажання її вивчати, а іноді й до відрази. І тут варто навести влучні слова Б. Гнєденка: «Щоб знання математики приносили задоволення учням, необхідно, щоб вони проникали в суть ідей цієї науки і відчували внутрішній зв'язок всіх ланок міркувань, бо це дозволяє зрозуміти глибоку і водночас прозору логіку математичних доведень. Якщо хоча б раз учень досягне ясності в розумінні суті справи, проникне у внутрішній зв'язок понять, то йому буде складно задовольнятися сурогатом знань, що є наслідком запам'ятовування без розуміння, зубріння без натхнення. До стану повної ясності учень буде прагнути самостійно, без нагадувань і примусу, тому що у нього буде ідеал Знання» (Гнеденко, 1991).

Отже, першим кроком у напрямі розвитку математичної грамотності, на нашу думку, є повернення у процес навчання шкільної математики усного мовлення школярів. Для цього, мабуть, варто скоротити зміст обов'язкової програми, і поширити практику розподіленого повторювання раніше засвоєного матеріалу.

Реалізація у педагогічній практиці розподіленого повторювання має давню історію. Показовою, на наш погляд, є методика повторювання навчальних матеріалів, яку застосовували в усіх єзуїтських колегіумах упродовж двох століть, починаючи з 1599 р. Формування міцних знань шляхом регулярного повторювання навчальних матеріалів було однією з основоположних ідей єзуїтської педагогіки. Цю ідею реалізували за такою схемою: кожен навчальний день починався з повторювання матеріалів попереднього уроку, кожен навчальний тиждень — з повторювання матеріалів минулого тижня, відповідно кожен новий навчальний рік — з повторювання матеріалів минулого року. До того ж, новий матеріал вивчався лише впродовж першого семестру, який завершувався канікулами. Другий семестр присвячували повторюванню навчального матеріалу, пройденого у попередньому семестрі. Девізом такого навчання був вислів: «Краще знати менше, проте знати ґрунтовно» (Малышев, 2013).

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Вживаючи термін «математична грамотність», ми маємо на думці молоду людину, яка до певної міри володіє математичними та обчислювальними способами мислення; на прийнятному рівні опанувала основні математичні уміння, а тому здатна розв'язувати звичайні завдання з математичною складовою, які трапляються у різних контекстах її реальності. Будучи вправною в математиці, ця людина не погоджується на рутинне безрадісне життя, а прагне успішно реалізуватися у різних його сферах.

Перспективи подальших розвідок вбачаємо у виробленні смислового змісту терміна «читацька грамотність».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Білодід, І. (ред). (1970-1980). *Словник української мови в 11 томах.* Наукова думка. https://sum.in.ua/
2. Вакуленко, Т. (ред.) (2018). *PISA: математична грамотність.* Український центр оцінювання якості освіти. http://dev.nus.org.ua/wp-content/uploads/2018/02/Math_PISA_Framework-1.pdf.
3. Вакуленко, Т. (ред.) (2021). *PISA-2022: рамковий документ з математики*. https://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2021/12/pisa_2022_ramkovyj_dokument_matematyka.pdf.
4. Войшвилло, Е., & Дегтярёв, М. (2001). *Логика*. ВЛАДОС-ПРЕСС.
5. Гершунский, Б. (2002). *Философия образования для XXI века*. ИнтерДиалект+.
6. Гнеденко, Б. (1991). Развитие мышления и речи при изучении математики. *Математика в школе*. № 4. 3–9.
7. Гончаренко, С. (1997). *Український педагогічний словник.* Либідь.
8. Дєордіца, Т., Вороніна, М., Єпіфанова, О., & Толмачов, В. (2022). Мисленнєва тактика засвоювання термінів фахової мови. *Фізико-математична освіта*, 34(2), 25-32. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-004
9. Малышев, Б. (2013). Система педагогики и воспитания иезуитов. *Этнодиалоги*, *2 (143)*, 178-184.
10. Шинкарук В. (ред.) (2002). *Філософський енциклопедичний словник*. Абрис.
11. Colom, R. (2020). Chapter 11 — Intellectual abilities. Handbook of Clinical Neurology. Volume 173, 2020, Pages 109-120. https://doi.org/10.1016/B978-0-444-64150-2.00012-5
12. Costa, A., & Kallick, B. (б.д.) Habits of mind: strategies for disciplined choice making. *Web-site «Systems Thinker»*. https://thesystemsthinker.com/habits-of-mind-strategies-for-disciplined-choice-making/
13. Goldenberg, E.P. (2014). «Mathematical Literacy»: An Inadequate Metaphor. In: Fried, M., Dreyfus, T. (eds) *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. Advances in Mathematics Education*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_9.

14. Goldenberg, P., (1996). «Habits of Mind» as an Organizer for the Curriculum. *Journal of Education. 1/178*. https://doi.org/10.1177/002205749617800102
15. Jablonka, E. & Niss, M. (2014). Mathematical literacy. In S. Lerman, B. Sriraman, E. Jablonka, Y. Shimizu, M. Artigue, R. Even, R. Jorgensen, & M. Graven (eds.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 391-396). Dordrecht: Springer (Reference). Springer Science+Business Media
16. Murray, S. (2004). The assessment of adult literacy. In Moskowitz, J., Stephens, M. (eds) *Comparing Learning Outcomes. Routledge.* https://doi.org/10.4324/9780203403563
17. OECD (2018). *PISA 2022: Mathematics framework*. https://pisa2022-maths.oecd.org/ca/index.html
18. Rumelhart, D. & Norman, D. (1978). Accretion, tuning and restructuring: Three modes of learning. In. J.W. Cotton & R. Klatzky (eds.), *Semantic Factors in Cognition*. Erlbaum. https://doi.org/10.21236/ada030406
19. Sfard, A. (2014). Reflections on Mathematical Literacy. In: Fried, M., Dreyfus, T. (eds) *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. Advances in Mathematics Education.* Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_10.
20. Spacey, J (October 19, 2020). 36 Examples of Cognitive Abilities. *Website Simplicable.* https://simplicable.com/thinking/cognitive-abilities.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bilodid, I. (red). (1970-1980). *Slovnyk ukrainskoi movy v 11 tt. (Dictionary of the Ukrainian language*). Naukova dumka. https://sum.in.ua/ (in Ukrainian).
2. Colom, R. (2020). Chapter 11 — Intellectual abilities. Handbook of Clinical Neurology. Volume 173, 2020, Pages 109-120. https://doi.org/10.1016/B978-0-444-64150-2.00012-5.
3. Costa, A., & Kallick, B. (w.d.) Habits of mind: strategies for disciplined choice making. *Web-site «Systems Thinker»*. https://thesystemsthinker.com/habits-of-mind-strategies-for-disciplined-choice-making/
4. Dieorditsa, T., Voronina, M., Yepifanova, O., & Tolmachov, V. (2022). Myslennieva taktyka zasvoiuvannia terminiv fakhovoi movy. *Fizyko-matematychna osvita*, 34(2), 25-32. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-004 (in Ukrainian).
5. Gershunskij, B. (2002). *Filosofija obrazovanija dlja XXI veka (Philosophy of education for the 21st century)*. InterDialekt+ (in Russian).
6. Gnedenko, B. (1991). Razvitie myshlenija i rechi pri izuchenii matematiki (Development of thinking and speech when studying mathematics). *Matematika v shkole (Mathematics at school). 4*. 3–9 (in Russian).
7. Goldenberg, P. (1996). «Habits of Mind» as an Organizer for the Curriculum. *Journal of Education. 1/178*. https://doi.org/10.1177/002205749617800102
8. Goldenberg, P. (2014). «Mathematical Literacy»: An Inadequate Metaphor. In: Fried, M., Dreyfus, T. (eds) *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. Advances in Mathematics Education*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_9
9. Honcharenko, S. (1997). *Ukrainskyi pedahohichnyi slovnyk (Ukrainian pedagogical dictionary)*. Lybid (in Ukrainian).
10. Jablonka, E. & Niss, M. (2014). Mathematical literacy. In S. Lerman, B. Sriraman, E. Jablonka, Y. Shimizu, M. Artigue, R. Even, R. Jorgensen, & M. Graven (eds.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 391-396). Dordrecht: Springer (Reference). Springer Science+Business Media
11. Malyshev, B. (2013). Sistema pedagogiki i vospitanija iezuitov (The system of Jesuit pedagogy and education). *Jetnodialogi* (*Ethnodialogues*), 2 (143), 178-184. (in Russian)
12. Murray, S. (2004). The assessment of adult literacy. In Moskowitz, J., Stephens, M. (eds) *Comparing Learning Outcomes. Routledge.* https://doi.org/10.4324/9780203403563.
13. OECD (2018). *PISA 2022: Mathematics framework*. https://pisa2022-maths.oecd.org/ca/index.html
14. Rumelhart, D. & Norman, D. (1978). Accretion, tuning and restructuring: Three modes of learning. In. J.W. Cotton & R. Klatzky (eds.), *Semantic Factors in Cognition*. Erlbaum. https://doi.org/10.21236/ada030406.
15. Sfard, A. (2014). Reflections on Mathematical Literacy. In: Fried, M., Dreyfus, T. (eds) *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. Advances in Mathematics Education.* Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_10.
16. Shynkaruk V. (red.) (2002). *Filosofskyi entsyklopedychnyi slovnyk (Philosophical encyclopedic dictionary).* Abrys (in Ukrainian).
17. Spacey, J. (October 19, 2020). 36 Examples of Cognitive Abilities. *Website Simplicable.* https://simplicable.com/thinking/cognitive-abilities.
18. Vakulenko T. (red.) (2018). *PISA: matematychna hramotnist (Mathematical Literacy)*. Ukrainskyi tsentr otsiniuvannia yakosti osvity (Ukrainian Center for Evaluation of the Quality of Education). http://dev.nus.org.ua/wp-content/uploads/2018/02/Math_PISA_Framework-1.pdf (in Ukrainian).
19. Vakulenko T. (red.) (2021). *PISA-2022: ramkovyi dokument z matematyky (PISA-2022: Mathematics framework).* Ukrainskyi tsentr otsiniuvannia yakosti osvity (Ukrainian Center for Evaluation of the Quality of Education). https://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2021/12/pisa_2022_ramkovyj_dokument_matematyka.pdf (in Ukrainian).
20. Vojshvillo, E., & Degtjarjov, M. (2001). *Logika*. VLADOS-PRESS (in Russian).

Матеріал надійшов до редакції 20.04.2024р.

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/fmo2024.v39i3-07 УДК 378:531.3

ВИМІРЮВАННЯ КУТА ВІДРИВУ ТІЛ ПІД ЧАС ЇХ РУХУ ПО СФЕРИЧНІЙ ПОВЕРХНІ

Валерій ЗДЕЩИЦ
Криворізький державний педагогічний університет, Україна
valeriy.zdeschits@kdpu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-2404-8979

Анастасія ЗДЕЩИЦ ✉
Науково-дослідний гірничорудний інститут КНУ, Україна
a.v.zdeshchyts@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5092-6918

Карина ПИРХОВКА
Криворізький державний педагогічний університет, Україна
pyrhovka@kdpu.edu.ua

АНОТАЦІЯ

Розглянуто методику проведення фізичного експерименту, яка використовує саморобну дослідницьку установку для визначення кута відриву кульки та шайби під час їх руху по сферичній поверхні.

Формулювання проблеми. *В* задачах класичної механіки, пов'язаних з рухом по поверхні сфери під дією гравітаційної сили матеріальної точки або кульки, пропонується знайти кут, при якому вони відриваються від поверхні. Це завдання відносно легко розв’язується більшістю студентів. Однак ті самі задачі з врахуванням сили тертя викликають труднощі під час їх розв’язання у багатьох обізнаних студентів. Перевірити результати теоретичного розгляду проблеми в експерименті неможливо, особливо дистанційно, через відсутність дослідницьких установок такого типу та методичних рекомендацій до них.

Матеріали і методи. Теоретично розглянуті з тертям і без нього всі можливі варіанти руху матеріальної точки та кульки по поверхні сфери. На основі цих розглядів визначено рівень складності отримання розв’язку такого рода завдань для студентів бакалаврського та магістерського рівня. Визначено оптимальний варіант постановки завдання для бакалаврського рівня з експериментальною перевіркою висновків теорії. Поставлена мета: визначення кута відриву плоского тіла та кульки під час їх руху по сферичній поверхні – вирішувалася за допомогою розробленої дослідницької установки у вигляді двох транспортирів, розділених аркушами паперу для утворення рейкової сферичної дороги. Смартфони студентів у режимі slow motion використовувалися під час дистанційного виконання ними шкільного фізичного експерименту як цифрова вимірювальна лабораторія.

Результати. Експериментально визначено кут відриву від поверхні сфери плоского тіла (шайби), який дорівнює 52^0 та кульки – 57^0. Розроблена методика вимірювання кутів відриву та дослідницька установка.

Висновки. Значення кутів відриву, передбачені теорією руху тіл при наявності тертя – 52^0 для шайби та $57^{0,}$ для кульки підтверджені в експериментах. Доведена незмінність величини кута відриву від сферичної поверхні кульки незалежно від її маси та радіусу. Ці результати доводять той факт, що розроблена методика та дешева дослідницька установка дозволяє бакалаврам високоточно вимірювати кути відриву кульки та її швидкість навіть в дистанційному режимі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *фізичний експеримент; кут відриву; сферична поверхня; рух кульки; шайби.*

Для цитування:	Здещиц В., Здещиц А., Пирховка К. Вимірювання кута відриву тіл під час їх руху по сферичній поверхні. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 3. С. 53-60. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i3-07
	Здещиц, В., Здещиц, А., & Пирховка, К. (2024). Вимірювання кута відриву тіл під час їх руху по сферичній поверхні. *Фізико-математична освіта*, *39*(3), 53-60. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-07
For citation:	Zdeshchyts ,V., Zdeshchyts, A., & Pyrhovka, K. (2024). Measurement of the angle of departure of bodies during their motion on a spherical surface. *Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 53-60. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-07
	Zdeshchyts ,V., Zdeshchyts, A., & Pyrhovka, K. (2024). Vymiriuvannia kuta vidryvu til pid chas yikh rukhu po sferychnii poverkhni [Measurement of the angle of departure of bodies during their motion on a spherical surface]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 53-60. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-07

✉ Corresponding author

MEASUREMENT OF THE ANGLE OF DEPARTURE OF BODIES DURING THEIR MOTION ON A SPHERICAL SURFACE

Valeriy ZDESHCHYTS
Kryvyi Rih State Pedagogical University, Ukraine
valeriy.zdeschits@kdpu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-2404-8979

Anastasiia ZDESHCHYTS ✉
Mining Research Institute of KNU, Ukraine
a.v.zdeshchyts@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5092-6918

Karina PYRHOVKA
Kryvyi Rih State Pedagogical University, Ukraine
pyrhovka@kdpu.edu.ua

ABSTRACT

The method of conducting a physical experiment, which uses a homemade research installation to determine the separation angle of a ball and a puck during their movement on a spherical surface, is considered.

Formulation of the problem. In the problems of classical mechanics, related to the movement of a sphere on the surface under the influence of the gravitational force of a material point or ball, it is proposed to find the angle at which they break away from the surface. This task is relatively easy to solve for most students. However, the same problems with the friction force cause difficulties during their solution for many knowledgeable students. It is impossible to verify the results of the theoretical consideration of the problem in an experiment, especially remotely, due to the lack of research installations of this type and methodological recommendations for them.

Materials and methods. Theoretically, with and without friction, all possible options for the movement of a material point and a ball on the surface of the sphere are considered. Based on these considerations, the level of difficulty of obtaining the solution of this kind of task for students of bachelor's and master's level is determined. The optimal variant of setting the task for the bachelor's level with experimental verification of the conclusions of the theory was determined. The goal: to determine the separation angle of a flat body and a ball during their movement on a spherical surface - was solved with the help of a developed research installation in the form of two protractors separated by sheets of paper to form a rail spherical road. Students' smartphones in slow-motion mode were used as a digital measurement laboratory during their remote performance of a school physics experiment.

Results. The angle of separation from the surface of the sphere of a flat body (puck) was experimentally determined, which is equal to 52^0, and the ball - 57^0. The technique of measuring separation angles and a research facility were developed.

Conclusions. The values of the separation angles predicted by the theory of the movement of bodies in the presence of friction - 52^0 for the puck and 57^0 for the ball - have been confirmed in experiments. The invariance of the separation angle from the spherical surface of the ball is proven, regardless of its mass and radius. These results prove the fact that the developed technique and cheap research equipment allow undergraduates to measure ball separation angles and their speed with high accuracy even in remote mode.

KEYWORDS: *physical experiment; angle of separation; spherical surface; movement of ball; puck.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Одна із задач класичної механіки, яка часто розв'язується в школах та вищих навчальних закладах, пов'язана з матеріальною точкою, яка без тертя ковзає під дією гравітаційної сили по поверхні сфери (Irodov, 2012). Зазвичай студентам-фізикам пропонується знайти кут відриву θ_c, при якому матеріальна точка, яка рухається без азимутальної компоненти, залишає сферичну поверхню (рис. 1 а).

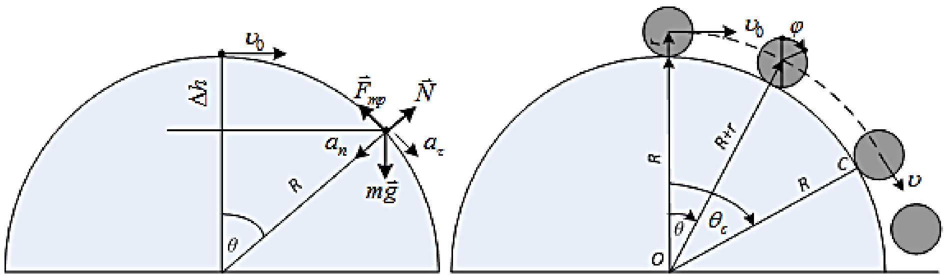


Рис. 1. Схема руху тіла по поверхні сфери радіуса *R*: а) тіло – матеріальна точка, б) тіло – кулька радіуса *r*.
Джерело: авторська розробка.

Це завдання відносно легко розв'язується більшістю студентів. Дійсно, за законом збереження енергії $mg\Delta h = \frac{mv^2}{2}$ в точці відриву, де $\Delta h = R(1 - \cos\theta_c)$. Сила реакції опори $N = 0$, $mg\ \cos\theta_c = \frac{mv^2}{R}$ за другим законом Ньютона і з цих формул отримуємо вираз для $\cos\theta_c = \frac{2}{3}$ та сам кут $\theta_c = 48{,}19^0$.

Однак розв'язок задачі з рухом матеріальної точки по сферичній поверхні з урахуванням тертя є проблемою для багатьох студентів. Ще більш складною є задача, що включає не тільки рух у вертикальній площині, але і азимутальний рух матеріальної точки без тертя та с тертям (Daniel, 2021).

Задача також ускладнюється при заміні матеріальної точки на кульку з врахуванням законів руху твердого тіла, моменту інерції, зміни режиму кочення на ковзання тощо. Якщо ж треба враховувати й можливий азимутальний рух тіл, тоді складність ще більше зростає і ця задача може бути розв'язана тільки на магістерському рівні.

Отже, проста на перший погляд задача стає багаторівневою зі зростаючою складністю її розв'язання. Експериментальне доведення справедливості результатів теоретичного розв'язання подібних задач, наприклад, в рамках шкільного фізичного експерименту, також є проблемою. Виконання шкільних фізичних експериментів, що проводяться дистанційно, стає неможливим через відсутність дослідницьких установок такого типу та методичних рекомендацій до них. Тому поєднання теоретичних викладок та розробка конструкції експериментальної установки для вимірювання кута та швидкості відриву тіл, що рухаються по сферичній поверхні, і є тим напрямком, якому присвячена ця робота.

Аналіз актуальних досліджень. Коли виконання шкільного фізичного експерименту, що реалізується у формі лабораторних робіт, робіт фізичного практикуму, навчальних проектів, стає можливим тільки дистанційно, стають актуальними технології, при яких на заняттях використовується обладнання, яке є «в кармані» сучасного студента або школяра, а саме, власні смартфони, планшети, ручки, олівці, кульки, іграшки тощо. Такі технології дають можливість кожному студенту самотужки виготовити дослідницьки установки та провести на них наукові дослідження досить високого рівня. Саме смартфон стає тим потужним інструментом, який збільшує можливості навчання, робить лабораторну практику не надто складною; надає можливість проводити досліди як в лабораторії, так й дистанційно.

Що стосується теоретичного та практичного розв'язку проблеми руху тіл по сферичній поверхні, то статті на цю тему в наукових журналах не вичерпуються, починаючи, наприклад, з роботи (Symon, 1961), у якої розглядався рух маленького циліндра, що котиться по більшому, роботах (Prior & Mele, 2007; González-Cataldo at all, 2017). У роботі (Phan-Budd, 2020) наводиться постановка досліду та результати вимірювання кута відриву пофарбованої сталевої кульки від поверхні гімнастичного м'яча з довжиною кола 180,9 см (рис. 2).

У дослідах визначено кут відриву, який дорівнював $52^{o} \pm 1^{o}$. Авторка статті визнає, що пофарбовані доріжки трохи коротші, ніж передбачає модель без ковзання; робить припущення про те, що кулька ковзає перед тим, як впасти з поверхні великої сфери, спираючись на роботи (Flores at all, 1972; Jayanth at all, 2009), але не на власні спостереження. Зрозуміло, що така постановка вимірювань буде недешевою, досить неточною (хоча автор оцінює похибку в 2%), з невизначеністю відносно точки старту (кута θ_0), початкової швидкості υ_0 та впливу фарби на рух кульки, тому для досягнення нашої мети вона не підходить.

Більш вдала конструкція дослідницької установки розглядається в роботі (Souza & Coluc, 2017). Пристрій складався з двох паралельних рейок, які утворюють чверть кола. Кутове положення та швидкість сталевої кульки вимірюють за допомогою рухомої штанги, оснащеної фотодетектором. Ця конструкція добре відповідає меті наших досліджень, але її дороговартість та громоздкість (радіус сферичної доріжки – 487мм) не дозволяє використати її безпосередньо для дистанційного навчання (рис. 3). Електричний метод реєстраціїї часу перебування кульки на доріжці передбачає ще й цифровий осцилограф. Отримані кути кочення кульки (при наявності тертя з μ = 0,21) $\theta_{коч}$ = 28,7$\pm$0.8^0, відриву $\theta_{сц}$ = 53,4$\pm$0.1^0. Автори работи визнали, що електричний метод реєстраціїї часу перебування кульки на доріжці та визначення кута відриву не є вдалим й метод візуалізації був би більш доречним.

Рис. 2. Маленька кулька вивільняється з верхньої частини м'яча, залишаючи видимий слід від фарби, який можна виміряти.
Джерело: (Phan-Budd, 2020).

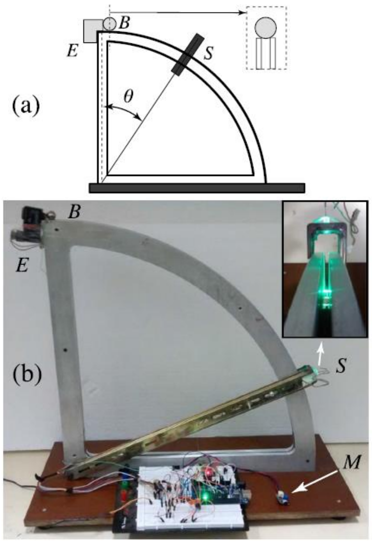


Рис. 3. Пристрій для визначення кута, під яким кулька втрачає контакт із круговою доріжкою: (a) схематична діаграма та (b) фотографія, на якій зображена кулька *B*, оптичний детектор *S*, електромагнітний пристрій *E* для вивільнення кульки, і мікрофон *M*. На вставці (a) показано окремі пластини, які використовуються для утримання м'яча на круговій траєкторії. На вставці (b) показаний оптичний датчик; світлодіод розташовується під доріжкою, а фотоприймач знаходиться вище.
Джерело: (Souza & Coluc, 2017).

Бакалаврам і магістрам дуже важливо мати ілюстративні приклади, які демонструють розв'язок проблеми з широким діапазоном рівнів складності. Такий аналіз руху матеріальної точки по сфері з тертям, надається в роботах (Daniel, 2021), де теоретично визначається кутове положення, під час якого матеріальна точка залишає сферичну поверхню 1) без азимутального руху та 2) з азимутальним рухом. Це відкриває можливості для побудови багаторівневого аналізу, що включає обчислення, як аналітичні, з застосуванням спеціальних функцій для пошуку розв'язку закритої форми, так і числові.

Результати таких досліджень, підтверджених експериментами, будуть корисними для розширення дискусій у класичній механіці на більш складні теми з використанням підходів Лагранжа та Гамільтона. Ця послідовність тем та рівнів складності дає можливість студентам отримати насолоду від прекрасної сумісності та взаємодоповнюваності фізики та прикладної математики. Такі проблеми можна потім використовувати на багатьох етапах навчальної програми, ефективно використовуючи переваги попереднього знайомства студентів із вступними темами, дозволяючи викладачеві поступово вводити різноманітні точки зору та все більш просунуті методи.

Мета статті. Створення дешевого малогабаритного пристрою та методики вимірювання кута, під яким кулька або шайба втрачає контакт із сферичною доріжкою.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Якщо тіло знаходиться на вершині сфери, тобто в стані нестійкої рівноваги, тоді, отримавши поштовх, воно почне рухатися по поверхні сфери. В залежності від умов тіло може або зупинитися, або збільшити швидкість і відірватися від поверхні. Велику роль у режимі руху відіграє величина коефіцієнта тертя μ. Якщо рухається плоска шайба (матеріальна точка), тоді можливий тільки режим ковзання, якщо кулька – можливий як режим ковзання $(\mu = 0)$, так і кочення з переходом до режиму ковзання $(\mu \neq 0)$. Розглянемо при яких умовах реалізуються ці режими.

А. Матеріальна точка ковзає по шорсткій поверхні сфери. Розглянемо розв'язок класичної задачі з розділу “Механіка” (Mungan, 2003). Тіло масою *m* ковзає по шорсткій поверхні сфери радіуса *R* (рис. 1 а). В деякий момент часу воно розташується під кутом θ до вертикалі. На тіло діють три сили: нормальна *N*, тяжіння *mg* і тертя ковзання $F_{\text{тр}} = \mu N$, де μ — коефіцієнт кінетичного тертя. Прискорення тіла розділимо на доцентрову компоненту $a_n = \frac{v^2}{r}$ і тангенціальну a_τ. За другим законом Ньютона радіальна складова сил, що діють на тіло, дорівнює:

$$mg\cos\theta - N = ma_n. \tag{1}$$

Тоді сила *N* буде дорівнювати:

$$N = m\left(g\cos\theta - \frac{v^2}{R}\right), \tag{2}$$

де $v(\theta)$ – швидкість тіла.

Тіло вилітає з поверхні сфери, якщо *N* = 0. Відповідно до (2) це відбувається, коли “нормована” швидкість

$$V^2 = \left(\frac{v}{\sqrt{Rg}}\right)^2 = \cos\theta. \tag{3}$$

Графік залежності *V* від θ наведений на рис. 4 (графік 1). Оскільки $\cos\theta \le 1$, V_0 не може бути більше 1, якщо тіло має бути на поверхні сфери. Це надає фізичний сенс швидкості $v \equiv \sqrt{rg}$, яка використовується для нормування *V*.

За другим законом Ньютона, для тангенціальної складової сил, що діють на тіло:

$$ma_\tau = mg\sin\theta - \mu N, \tag{4}$$

де тангенціальне прискорення $a_\tau = \frac{dv}{dt}$

З урахуванням рівнянь (2) та (4) отримуємо:

$$g(\sin\theta - \mu\cos\theta) + \frac{\mu v^2}{r} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}, \tag{5}$$

де кутова швидкість $\omega = \frac{v}{R}$.

Використовуючи тотожність $\frac{d(v^2)}{d\theta} = \frac{2v dv}{d\theta}, \frac{dv}{d\theta} = \frac{d(v^2)}{2v d\theta}$ з рівняння (5) отримуємо вираз:

$$\frac{d(V^2)}{d\theta} - 2\mu V^2 = 2(\sin\theta - \mu\cos\theta). \tag{6}$$

Чисельний розв'язок цього диференціального рівняння можна отримати за допомогою електронної таблиці Excel для даної безрозмірної початкової швидкості на полюсі сфери $V_0 = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}$ та стартового кута θ_0. Рівняння (6) також можна розв'язати аналітично (Mungan, 2003). Розв'язок рівняння (6) виглядає так:

$$V^2 = \frac{(2-4\mu^2)(e^{2\mu\theta} - \cos\theta) - 6\mu\sin\theta}{1+4\mu^2} + V_0^2 \cdot e^{2\mu\theta}. \tag{7}$$

Якщо μ = 0, V_0 = 0, тоді рівняння (7) буде виглядати так (рис. 4, графік 3):

$$V = \sqrt{2(1-\cos\theta)}. \tag{8}$$

Оскільки умовою відриву тіла від поверхні сфери є швидкість

$$V = \sqrt{\cos\theta}, \tag{9}$$

тоді, прирівнявши рівняння (8) та (9) отримуємо:

$$2(1-\cos\theta) = \cos\theta, \cos\theta_{\text{відр}} = 2/3. \tag{10}$$

Отже, кут відриву для цих умов складає величину $\theta_{\text{відр}} = 48{,}19^0$, а швидкість відриву:

$$V_{\text{відр}} = \sqrt{\cos\theta_{\text{відр}}} = \sqrt{2/3} = 0{,}8165.$$

Результати розрахунків для деяких інших пар μ та V_0 наведені на графіках рис. 4. Так, при μ = 0,3; V_0 = 0,6 (графік 5) тіло спочатку зменшує швидкість, а потім швидкість починає зростати завдяки збільшенню нахилу поверхні сфери, і, після досягнення кута $\theta_{\text{відр}} \approx 45^0$, відривається від поверхні зі швидкістю 0,85 м / с.

При μ = 0,14; V_0 = 0,14 графік *2* на рис. 4 майже торкається горизонтальної осі, тобто початкова швидкість тіла зменшується майже до нуля, коли кут θ = 8^0, а потім починає зростати завдяки збільшенню нахилу поверхні сфери, і, після досягнення кута $\theta_{\text{відр}} \approx 52^0$, відривається від поверхні.

Кут відриву можна збільшувати за рахунок збільшення величини коефіцієнта тертя. Доведемо це розглянувши рух тіла при μ = 1 та такому значенні V_0, щоб графік торкався горизонтальної осі ($V \to 0$, і $\frac{d(V^2)}{d\theta} = 0$) при досягненні кута $\theta_{\text{торк}}$, а після нього тіло прискорювалося і вилітало за межі поверхні сфери при досягненні кута $\theta_{\text{відр}}$. Коли $\theta = \theta_{\text{торк}}$ ліва частина рівняння (6) дорівнює нулю. Це означає, що $\theta_{\text{торк}} = 45^0$, і тоді рівняння (7) можна розв'язати саме для цього кута. У результаті отримуємо значення нормованої початкової швидкості:

$$V_0 = \sqrt{0{,}4\left(1 + \sqrt{2}e^{-\pi/2}\right)} = 0{,}719. \qquad (11)$$

Згодом тіло залишає поверхню під кутом θ = 69,6^0 з безрозмірною швидкістю V = 0,59, що відображено графіком 6 на рис. 4. Отже, варіюючи значення μ, тіло можна уповільнити до швидкості, як завгодно близькою до нуля, так що його рух виглядає так, ніби воно «відскакує» від горизонтальної осі (див. криві 2, 6). Можливі сценарії руху, коли тіло зупиниться на поверхні сфери (графік 4, μ = 0,6; V_0 = 0,5).

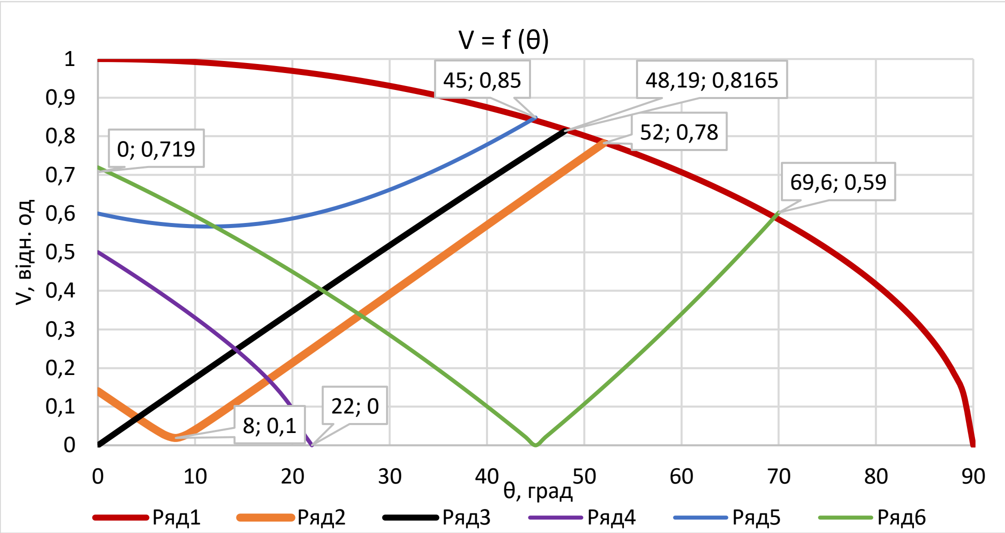


Рис. 4. Графіки залежності нормалізованої швидкості *V* від азимутального кута *θ*:
1 – $V = \sqrt{\cos\theta}$, ***2*** – μ = 0,14; V_0 = 0,14, ***3*** – $V = \sqrt{2(1-\cos\theta)}$, μ = 0, V_0 = 0, ***4*** – μ = 0,6; V_0 = 0,5, ***5*** – μ = 0,3; V_0 = 0,6, ***6*** – μ = 1; V_0 = 0,71944.
Джерело: розраховано авторами на основі (Mungan, 2003).

Таким чином, для шайби, яка ковзає по шорсткій поверхні сфери, можливе велике різноманіття кривих $\upsilon(\theta)$. Створення та побудова графіків руху тіла по поверхні сфери є цікавим завданням для студентів.

Б. Кулька рухається по шорсткій поверхні сфери. Розглянемо випадок, коли кулька радіусом $r_\text{к}$ і масою m вивільняється зі стану спокою під малим (< 1^0) кутом θ_0 з вершини кругової доріжки радіуса R (рис. 1 б). Положення кульки задається змінними $r = R + r_\text{к}$ і θ, тоді як обертання кульки визначається кутом φ. Доріжка складається з двох паралельних рейок, відстань між якими дорівнює l, тому ефективний радіус кульки $r_{\text{ef}} = kR = \sqrt{r_\text{к}^2 - (l/2)^2}$ ($k = \sqrt{(r_\text{к}/R)^2 - (l/2R)^2}$). Після поштовху, внаслідок тертя між кулькою і доріжкою, кулька починає котитися, збільшуючи свою швидкість. Досягнув кута $\theta_{\text{коч}}$ кулька починає ковзати, і це ковзання продовжується, доки кулька не досягне кута θ_C ($> \theta_\text{к}$), коли нормальна сила N стає рівною нулю. У цей момент кулька втрачає контакт із доріжкою і вільно падає.

Для отримання рівняння руху та зв'язку між поступальною швидкістю кульки та її кутовим положенням використовується процедура, яка описана у роботі (Symon, 1961) для опису руху циліндра, що котиться по іншому циліндру та (Souza, Coluc; 2017) для руху кульки по сферічній дорожці. Співвідношення між швидкістю та кутовим положенням кульки використовується для визначення режиму кочення кульки та режиму ковзання. Максимальний кут $\theta_{\text{коч}}$, до якого кулька котиться без ковзання, визначається з виразу:

$$\cos\theta_{\text{коч}} = \frac{(150+20\eta)\mu^2 + 2\eta\sqrt{4\eta^2(1+\mu^2)+60\eta\mu^2+125\mu^2}}{4\eta^2(1+\mu^2)+60\eta\mu^2+225\mu^2}, \qquad (12)$$

де $\eta = (r_\text{к}/kR)^2$.
В межах $\theta_{\text{коч}} < \theta < \theta_C$ кулька починає ковзати. Кут θ_{C0}, під яким кулька злітає з доріжки, дорівнює:

$$\cos\theta_{C0} = \frac{2(5+2\eta\cos\theta_{\text{коч}})}{15+6\eta}. \qquad (13)$$

Якщо поверхня сфери гладка (без тертя), тоді кулька негайно почне ковзати (при ненульовому θ << 1^0), тому для цього випадку $\cos\theta_{\text{коч}} = 1$. Якщо при цьому і зазору між доріжками немає, тобто l = 0, $\eta = 1$, тоді маємо стандартну задачу щодо ковзання точкової маси без тертя по сферичній поверхні. У цьому випадку рівняння (13) зводиться до $\cos\theta_{C0} = 2/3$, тобто, кут відриву кульки від поверхні сфери буде дорівнювати $\theta_{C0} = 48{,}19^0$, як раніше і було доведено для матеріальної точки.

Кут відриву $\theta_{C\mu}$, під яким кулька втрачає контакт із доріжкою за наявності тертя, буде дорівнювати:

$$\cos\theta_{C\mu} = \frac{2\left[g_1(\eta,\theta_{\text{коч}}) - 3\mu\sin\theta_{\text{коч}} - \mu\sqrt{g_2(\mu,k,\beta,\theta_{\text{коч}})}\right]}{9+4\eta^2}, \tag{14}$$

де $\beta = \frac{5}{(5+2\eta)(1+k)}$, а

$$g_1(\eta,\theta_{\text{коч}}) = 3\cos\theta_{\text{коч}} + 3\beta(1+k)(1-\cos\theta_{\text{коч}}), \tag{15}$$

$$g_2(\mu,k,\beta,\theta_{\text{коч}}) = 9 + 4(\mu^2-1)\cos^2\theta_{\text{коч}} - 16\beta(1+k)\left[\beta(1+k)\sin^2\left(\frac{\theta_{\text{коч}}}{2}\right) + \mu\sin\theta_{\text{коч}}\right]\sin^2\left(\frac{\theta_{\text{коч}}}{2}\right) - 8\left[2\beta(1+k)\sin^2\left(\frac{\theta_{\text{коч}}}{2}\right) + \mu\sin\theta_{\text{коч}}\right]\cos\theta_{\text{коч}}. \tag{16}$$

На рис. 5 показано зміну кутів $\theta_{\text{коч}}$ (графік 1) і $\theta_{C\mu}$ (графік 2), коли (максимальний) коефіцієнт статичного тертя μ змінюється від 0 до 1. Для $\mu = 0{,}14$ фаза кочення кульки буде спостерігатися до кута $\theta_{\text{коч}} = 23{,}14^0$ (рис. 5), потім буде фаза ковзання до кута $\theta_{C\mu} = 57^0$, що ми і повинні спостерігати в дослідах.

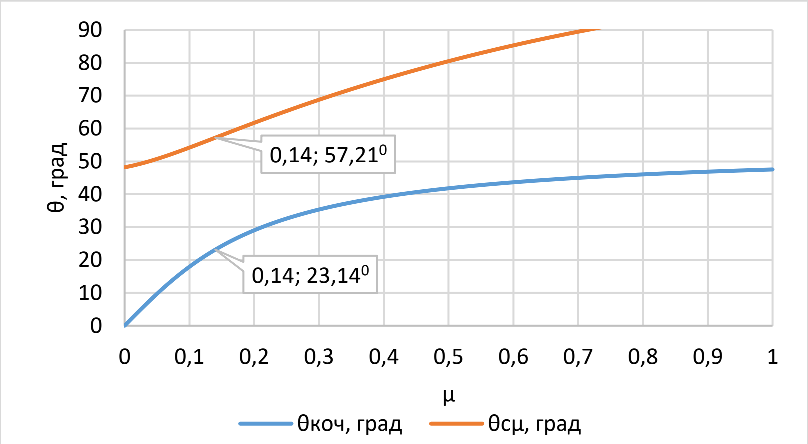


Рис. 5. Залежність кутів $\theta_{\text{коч}}$, $\theta_{C\mu}$ від величини коефіцієнта статичного тертя μ кульки.

Джерело: розраховано авторами на основі (Souza, Coluc; 2017).

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Робота носить теоретичний та прикладний характер. Спочатку теоретично розглянуті всі можливі варіанти руху матеріальної точки (шайби) з тертям і без нього по поверхні сфери. Потім розглянуто рух кульки з тертям і без нього по поверхні сфери. На основі цих розглядів визначено рівень складності отримання розв'язку такого рода завдань для студентів бакалаврського та магістерського рівня. Після цього визначено оптимальний варіант постановки завдання для бакалаврського рівня та експериментальної перевірки результатів теоретичного розгляду з можливістю дистанційного виконання цих дослідів. Технологія отримання високоточних експериментальних результатів на дешевому саморобному дослідному приладі була відпрацьована та перевірена 11 студентами групи ФІ, ФМ-20 Криворізького державного педагогічного університету під час їх проходження у 2024 році навчальної практики "Шкільний фізичний експеримент" у дистанційному режимі. У якості цифрової вимірювальної лабораторії використовувалися смартфони студентів, оснащені застосунками Stopwatch, Physics Toolbox Sensor Suite та Phyphox. Опція slow motion дозволяла реєструвати рух тіл за допомогою деяких смартфонів зі швидкістю 960 кадрів в секунду. Секудомір застосунка Stopwatch вимірював час з точністю 1 мс.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ідея використання сферичних рейок для руху шайби та кульки втілилася й в розроблену нами малогабаритну дешеву дослідницьку установку у вигляді двох шкільних транспортирів радіусом 45 мм, куплених за 8 гривень (0,2 $), розділених між собою листами аркушів паперу (рис. 6а). Для покращення процесу вимірювання часу руху, кута відриву, а також спостереження за процесами кочення та ковзання використовувалася відеозйомка камерою смартфона в режимі slow motion з частотою 960 кадрів в секунду.

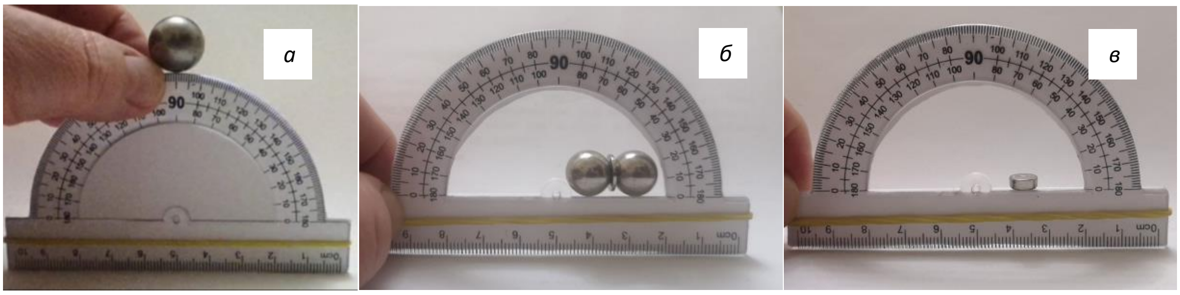


Рис. 6. Фотографія експериментальної установки: положення шайби та кульок для вимірювання коефіцієнта тертя μ.

Джерело: авторське фото.

Спочатку на вершину транспортира (відмітка 90^0) встановлювалася кулька (шайба). Перед тим торці транспортирів перевірялися пальцем чи гладеньки вони. Запускалась кулька з того боку транспортирів, де не було задирок. Для збільшення контрасту відеозйомка відбувалася на фоні білого листа паперу. Перед тим торці транспортиру, що направляють кульку, фарбувалися чорним фломастером. На кульці також ставилася мітка, яка дозволяла спостерігати за її обертанням та реєструвати режим кочення або ковзання кульки. “Матеріальною точкою” була невеличка шайба (маленька батарейка на 1,5 В). Радіус сталевої кульки *r* = 6,25 мм, сфери (транспортира) *R* = 45 мм. Невеликий радіус транспортира визначався оптичним методом реєстрації руху, для якого висока швидкість об’єкта протипоказана. Зазор між площинами транспортирів *l* = 0,6 мм, що дозволяло вважати ефективний радіус кульки $r_{\text{еф}} = r_{\text{к}}$ з похибкою 0,25%.

Для визначення коефіцієнта тертя μ дві кульки об’єднувалися в гантельку за допомогою магнітного кільця (або скотча) та поміщалися на горизонтальну доріжку в нижній частині транспортира (рис. 6б). Потім транспортири вертикально встановлювалися на екран смартфона, на якому відображався кут його нахилу. Застосунок, який використовувався для вимірювання кута – “*Physics Toolbox Sensor Suite* (опція *Inclinometer*). Аналогічно вимірювався коефіцієнта тертя μ для шайби (рис. 6.в). Як відомо, коефіцієнт тертя $\mu = tg\ \varphi_0$, де φ_0 – кут, при якому починається рух тіла (кульок або шайби) по похилій площині. Кульки та шайба починали рухатися, коли $\varphi_0 = 8^0$, тобто $\mu = tg\ 8^0 = 0{,}14$. Для збільшення точності визначення кута α_0 спочатку встановлювався смартфон під деяким кутом нахилу і тільки потім на екран встановлювалися транспортири.

Після вмикання відеокамери смартфона в режимі “Уповільнена зйомка” 960 кадрів в секунду запуск процесу відеозйомки здіснювався автоматично під час потрапляння кульки або шайби в поле зору об’єктива камери смартфона, для чого повільно зрушуючи кульку з вершини змушували її котитися вниз. Кут ϑ_0, при якому починався рух кульки, дорівнював $\sim 1^0$ шайби – $\sim 8^0$. Дослід з цією кулькою повторювався ще багато разів. Досліди проводилися також з кульками іншого радіусу та маси для визначення їх впливу на результат вимірювання кута відриву.

Обробка та аналіз результатів вимірювання. Кут відриву кульки від сферичної доріжки визначався за таким алгоритмом: 1. Під час перегляду стоп-кадрів відеозйомки вибирався той, на якому був зафіксований вільний політ кульки біля точки її відриву від сферичної доріжки (рис. 7б); 2. Визначався кут $\theta_{\text{C}\mu}$, при якому кулька відривалася від сферичної доріжки. Для чого на стоп-кадрі проводилася дотична до шкали транспортира та кульки так, як наведено на рис. 7б, в. Значення кутів $\theta_{\text{C}\mu}$ заносилися в табл. 1 та обчислювалося середнє значення $\bar{\theta}_{\text{C}}$ як середньоарифметичне результатів всіх дослідів. Аналогічно проводилося вимірювання кута відриву шайби від сферичної доріжки. Результати досліджень і розрахунків наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Результати вимірювання.

Тіло	$r_к$ мм	R мм	l, мм	k	η	β,	φ_0, град	μ	$\theta_{\text{C}\mu}^{\text{теор}}$, град	$\theta_{\text{коч}}$, град	$\bar{\theta}_{\text{C}\mu}$, град	$\theta_{\text{C}\mu}^{\text{студ}}$, град
кулька	6,25	45	0,9	0,139	1,005	0,626	8	0,14	57,2	23,14	57 ± 1	57 ± 2
кулька	4,75	45	0,9	0,106	1,009	0,644	8	0,14	57,2	23,10	57 ± 1	58 ± 2
шайба	10	45					8	0,14	52		52 ± 1	53 ± 2

$\theta_{\text{C}\mu}^{\text{студ}}$ –кути відриву, виміряні студентами на виготовлених власноруч дослідницьких установках.

Джерело: результати досліджень авторів.

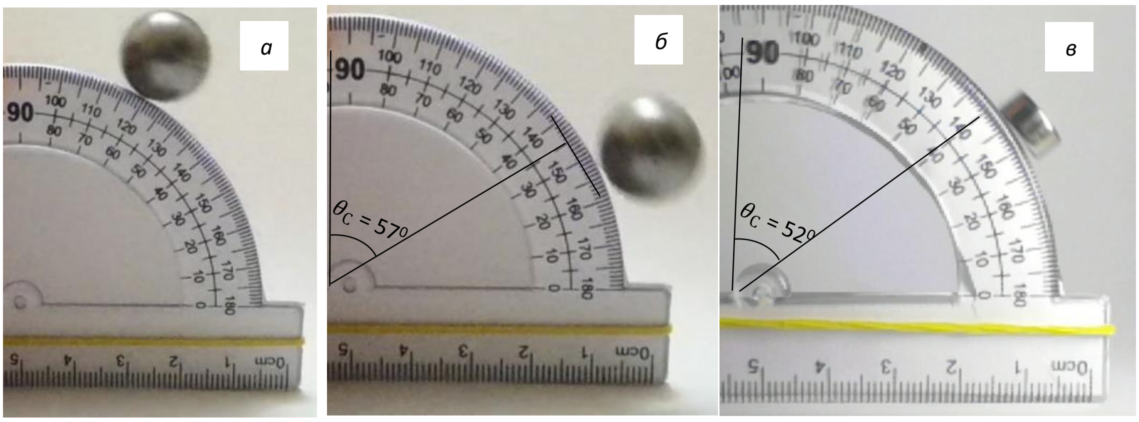


Рис. 7. Стоп-кадри руху кульки та шайби.

Джерело: авторське фото.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Висновки. Кут відриву від сферичної поверхні під час руху шайби дорівнює 52^0, а кульки – 57^0. Ці значення кутів відриву передбачені теорією руху тіл при наявності тертя. Доведена незмінність величини кута відриву від сферичної поверхні кульки незалежно від її маси та радіусу. Ці результати доводять той факт, що розроблена методика та дешева дослідницька установка дозволяє бакалаврам високоточно вимірювати кути відриву кульки та її швидкість навіть в дистанційному режимі. Таким чином, відкривається можливість експериментально перевіряти результати теоретичного розгляду проблеми руху тіл по сферичній поверхні з тертям.

Перспективи подальших досліджень. Ідею використання рейок для вимірювання кінематичних параметрів тіл, що рухаються по похилій площині, впроваджено у виготовлену нами дешеву експериментальну установку. Результати та методика досліджень у дистанційному режимі будуть опубліковані пізніше.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Irodov, I. E. (1988). *Problems in General Physics.* Mir Publishers.
2. Phan-Budd, S. (2020). Finger paint and physics: a simple demonstration of circular motion and conservation of Energy. *The Physics Teacher*, 58, 66-67. https://doi.org/10.1119/1.5141979
3. Flores, J., del Rio, A. G., Calles, A. & Riveros, H. (1972). A simple problem in mechanics: a qualitative approach. *The American Journal of Physics*, 40, 595–598.
4. Jayanth, V., Raghunadan, C., & Biswas, A. (2009). A sphere moving down the surface of a static sphere and a simple phase diagram, https://arxiv.org/abs/0808.3531. https://doi.org/10.48550/arXiv.0808.3531
5. Symon, K. R. (1961). *Mechanics, 2nd ed.* Addison-Wesley, Reading, MA.
6. McDaniel, Terry W. (2021). Analysis of the motion of a mass sliding on a sphere with friction. *American Journal of Physics*. 89, 921–926. https://doi.org/10.1119/10.0005071
7. McDaniel, Terry W. (2021). Solutions for the motion of a mass sliding on a sphere with friction. *Model Physics, Volcano, CA 95689 USA*
8. González-Cataldo, F., Gutiérrez G; Yáñez J. (2017). Sliding down an arbitrary curve in the presence of friction. *American Journal of Physics.* 85, 108–114. https://doi.org/10.1119/1.4966628
9. Prior, T, Mele, E. A. (2007). A block slipping on a sphere with friction: Exact and perturbative solutions. *American Journal of Physics.* 75, 423–426. https://doi.org/10.1119/1.2410018
10. Mungan, C. E. (2003). Sliding on the surface of a rough sphere. *The Physics Teacher*. 41, 326–328. https://doi.org/10.1119/1.1607801
11. de Souza, D. C, Coluci, V. R. (2017). The motion of a ball moving down a circular path. *American Journal of Physics.* 85, 124. https://doi.org/10.1119/1.4972177.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Irodov, I. E. (1988). *Problems in General Physics.* Mir Publishers.
2. Phan-Budd, S. (2020). Finger paint and physics: a simple demonstration of circular motion and conservation of Energy. *The Physics Teacher*, 58, 66-67. https://doi.org/10.1119/1.5141979
3. Flores, J., del Rio, A. G., Calles, A. & Riveros, H. (1972). A simple problem in mechanics: a qualitative approach. *The American Journal of Physics*, 40, 595–598.
4. Jayanth, V., Raghunadan, C., & Biswas, A. (2009). A sphere moving down the surface of a static sphere and a simple phase diagram, https://arxiv.org/abs/0808.3531. https://doi.org/10.48550/arXiv.0808.3531
5. Symon, K. R. (1961). *Mechanics, 2nd ed.* Addison-Wesley, Reading, MA.
6. McDaniel, Terry W. (2021). Analysis of the motion of a mass sliding on a sphere with friction. *American Journal of Physics*. 89, 921–926. https://doi.org/10.1119/10.0005071
7. McDaniel, Terry W. (2021). Solutions for the motion of a mass sliding on a sphere with friction. *Model Physics, Volcano, CA 95689 USA*
8. González-Cataldo, F., Gutiérrez G; Yáñez J. (2017). Sliding down an arbitrary curve in the presence of friction. *American Journal of Physics.* 85, 108–114. https://doi.org/10.1119/1.4966628
9. Prior, T, Mele, E. A. (2007). A block slipping on a sphere with friction: Exact and perturbative solutions. *American Journal of Physics.* 75, 423–426. https://doi.org/10.1119/1.2410018
10. Mungan, C. E. (2003). Sliding on the surface of a rough sphere. *The Physics Teacher*. 41, 326–328. https://doi.org/10.1119/1.1607801
11. de Souza, D. C, Coluci, V. R. (2017). The motion of a ball moving down a circular path. *American Journal of Physics.* 85, 124. https://doi.org/10.1119/1.4972177.

Матеріал надійшов до редакції 19.03.2024р.

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI **10.31110/fmo2024.v39i3-08** UDC **372.851, 51-75, 519.2**

FEATURES OF USING VBA IN TEACHING ACTUARIAL MATHEMATICS

Volodymyr ZUBCHENKO
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
volodymyr.zubchenko@knu.ua
https://orcid.org/0000-0002-1513-9326

Rostyslav YAMNENKO ✉
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
rostyslav.yamnenko@knu.ua
https://orcid.org/0000-0002-9612-7959

ABSTRACT

The article is devoted to the analysis of practice of application of specific computational techniques within MS Excel, including VBA, for teaching selected topics in actuarial mathematics.

Formulation of the problem. With the evolution of financial and actuarial models towards complexity and reliance on machine learning and data science, there is a growing demand for modern mathematicians, particularly actuaries, to acquire new skills and knowledge. This demand is being driven by new fintech trends in banking and insurance, such as smart payments, real-time credit risk assessment, automated reputation management, customer analytics, fraud detection and cryptocurrency trading. As a result, the training of future actuaries must meet high standards to ensure they are equipped to handle the sophisticated mathematical calculations required by insurance companies and other financial institutions.

Materials and methods. To yield results, both theoretical methods, which involve analyzing books and publications, in particular in professional journals in the domains of finance and actuarial mathematics, and empirical methods, entailing the observation of the educational process aimed at training prospective actuaries, are employed in this study.

Results. A study aimed at tackling the challenges encountered in teaching actuarial mathematics topics, such as life expectancy and mortality tables, revealed that incorporating a balanced blend of theoretical concepts and hands-on applications, coupled with illustrating mathematical models through real-world examples and reinforcing diverse computational techniques, constitutes a cornerstone of successful training for aspiring actuaries. Leveraging a versatile and user-friendly tool like VBA (Visual Basic for Applications) integrated into MS Excel enables educators to customize examples and assignments to match the intricacy and emphasis of their syllabus, thereby offering students a more targeted learning journey.

Conclusions. The teaching of mathematical disciplines, especially financial and actuarial mathematics, in academic programmes for future actuaries requires the adaptation of traditional methods and approaches. In particular, the integration of VBA is key to teaching specific actuarial mathematics concepts, which aims to equip students with the necessary practical competencies. VBA facilitates interactive learning by enabling students to manipulate variables and observe changes in calculations in real time, which improves their understanding of actuarial concepts. VBA also allows you to automate repetitive tasks involving complex mathematical calculations, which saves time and reduces errors. Therefore, its use is recommended when teaching topics involving tabular data, especially life expectancy.

KEYWORDS: *teaching actuarial mathematics; actuarial education; life contingency table; VBA; MS Excel.*

Для цитування:	Zubchenko V., Yamnenko R. Features of using VBA in teaching actuarial mathematics. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 3. С. 61-67. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i3-08
	Zubchenko, V., & Yamnenko, R. (2024). Features of using VBA in teaching actuarial mathematics. *Фізико-математична освіта*, *39*(3), 61-67. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-08
For citation:	Zubchenko, V., & Yamnenko, R. (2024). Features of using VBA in teaching actuarial mathematics. *Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 61-67. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-08
	Zubchenko, V., & Yamnenko, R. (2024). Features of using VBA in teaching actuarial mathematics. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 61-67. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-08

✉ Corresponding author

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ VBA У ВИКЛАДАННІ АКТУАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Володимир ЗУБЧЕНКО
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
volodymyr.zubchenko@knu.ua
https://orcid.org/0000-0002-1513-9326

Ростислав ЯМНЕНКО ✉
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
rostyslav.yamnenko@knu.ua
https://orcid.org/0000-0002-9612-7959

АНОТАЦІЯ

Стаття присвячена аналізу практики застосування конкретних обчислювальних прийомів у середовищі MS Excel, зокрема VBA, для викладання окремих тем актуарної математики.

Формулювання проблеми. Постійне ускладнення фінансових та актуарних моделей, що залучають машинне навчання і статистичний аналіз даних, спричиняє стійкий попит на сучасних математиків, зокрема актуаріїв, які повинні володіти новими навичками і знаннями. Цей попит посилюється новими фінтех-тенденціями в банківській та страховій сферах, такими як смарт-платежі, оцінка кредитних ризиків у режимі реального часу, автоматизоване управління репутацією, клієнтська аналітика, виявлення шахрайства та торгівля криптовалютами. Як наслідок, підготовка майбутніх актуаріїв повинна відповідати високим стандартам, щоб вони були здатні виконувати складні математичні розрахунки, яких вимагають страхові компанії та інші фінансові установи.

Матеріали і методи. Для отримання результатів у дослідженні використано як теоретичні методи, що передбачають аналіз книг і публікацій, зокрема в професійних журналах у галузі фінансів та актуарної математики, так і емпіричні методи, що передбачають спостереження за навчальним процесом, спрямованим на підготовку майбутніх актуаріїв.

Результати. Дослідження, зосереджене на вирішенні проблем, що виникають при викладанні таких тем актуарної математики, як побудова таблиць тривалості життя і смертності, показало, що інтеграція безперервного поєднання теоретичних і практичних компонентів, що супроводжується демонстрацією математичних моделей на практичних прикладах і посиленням різних обчислювальних методів, є фундаментальним аспектом ефективної підготовки майбутніх актуаріїв. Використання в навчальному процесі такого інтегрованого в MS Excel гнучкого й легкого в опануванні інструменту, як VBA (Visual Basic for Applications), дозволяє викладачам адаптувати приклади та вправи відповідно до складності та цілеспрямованості їхнього навчального плану, надаючи студентам більш цілеспрямований досвід навчання.

Висновки. Викладання математичних дисциплін, особливо фінансової та актуарної математики, в рамках академічних програм підготовки майбутніх актуаріїв вимагає адаптації традиційних методів і підходів. Зокрема, інтеграція VBA має ключове значення для викладання специфічних концепцій актуарної математики, що має на меті забезпечити студентів необхідними практичними компетенціями. VBA полегшує інтерактивне навчання, даючи можливість студентам маніпулювати змінними та спостерігати за змінами в обчисленнях у реальному часі, що покращує розуміння актуарних концепцій. Також VBA дозволяє автоматизувати повторювані завдання, пов'язані зі складними математичними розрахунками, що економить час і зменшує число помилок. Тому при викладанні тем, що залучають табличні дані, особливо очікуваної тривалості життя, рекомендується його використання.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *викладання актуарної математики; актуарна освіта; таблиця тривалості життя; VBA; MS Excel.*

INTRODUCTION

Formulation of the problem. On January 1, 2024, a new edition of the Law of Ukraine "On Insurance" came into effect. This edition is the result of the active integration of Ukrainian insurance legislation into the requirements of the European Union. Additional requirements and standards are being implemented, including the approved and effective Regulation on the procedure for forming technical provisions by insurance companies (Board of the National Bank of Ukraine, 2023) and the International Financial Reporting Standard 17 "Insurance Contracts" (IFRS 17 Insurance Contracts, 2024). The requirements of the relevant regulatory documents provide for the construction and active implementation of complex models of actuarial mathematics.

Previously, most classical models were relatively simple and could, in principle, be calculated using a calculator or in Excel. However, nowadays, an increasing number of actuarial and financial mathematics models involve machine learning and data science methods. We are hearing more and more about fintech technology trends in banking and insurance. Cases related to smart payments, real-time credit risk assessment using intellectual data processing systems, automation of brand and company reputation management, customer-oriented analytics, fraud detection, and cryptocurrency trading are becoming increasingly common.

All of this necessitates the application of new skills and knowledge by modern mathematicians in the insurance and banking sectors — specifically, actuaries. Consequently, the training of such specialists must adhere to the highest standards, as their future roles as actuaries will involve crucial mathematical calculations for an insurance company.

Relevance of research. The training of actuaries includes shaping the insurance rate policy, computing insurance provisions and the necessary amount of the insurance company's capital, ensuring its stability, reliability, and solvency, and controlling main risks such as underwriting, market, credit, operational, and liquidity risks.

Actuaries conduct quarterly verifications of the liquidity adequacy test of insurance companies, participate in preparing insurance and financial reports, and compile the annual actuarial report. The position of the responsible actuary entails making strategic management decisions for the insurance company in collaboration with the chairman of the board and key officials of the insurer.

Educators and practitioners such as (Wu, 2015; Gan, 2017; Martínez et al., 2020) underscore the significance of incorporating VBA (Visual Basic for Applications) into actuarial practice and its role in cultivating essential competencies among students.

Aim of research. The aim of this study is to examine the effective application of specific computational techniques within MS Excel, including VBA, for teaching selected topics in actuarial mathematics, identify and analyze challenges encountered when teaching topics such as evaluating contingency tables using computational techniques in MS Excel, explore the effectiveness of utilizing VBA and other computational tools in addressing challenges related to teaching actuarial mathematics topics, propose strategies for integration of MS Excel and VBA into the curriculum for actuarial mathematics education.

THEORETICAL FOUNDATIONS OF THE STUDY

Disciplines such as mathematical analysis, algebra, financial analysis, fundamentals of economics, and, notably, probability theory and mathematical statistics, form the foundation for the qualitative preparation of actuarial models. For instance, many cash flow models incorporate a discounting model that blends financial analysis approaches with the scenario approach of probability theory.

At the core of any insurance company's operations lies a balanced insurance rate policy. Actuarial mathematics employs the balance equation to calculate the so-called fair price of the insurance rate. This equation ensures equality at the time of concluding the insurance contract between the expected present value of future benefits for the insurance company and the client's payments to the insurance company.

The initial approach to studying this model for a long-term life insurance contract involves working with probabilities of death and survival throughout the term of the insurance contract. For each year of the insurance contract, the value at the time of concluding the insurance contract of the discounted benefit, multiplied by the probability of receiving a benefit for the corresponding insurance year, is calculated.

For instance, the expected present value for a whole life insurance contract with the benefit of 1 paid at the end of the insured person's death is given by:

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_k p_x\, q_{x+k}$$

where v represents the discount factor, and ${}_k p_x$ and q_{x+k} are the probabilities of surviving or dying, respectively, during one year for the insured person at the age of x years at the time of concluding the life insurance contract. Special actuarial notations are employed for the typical components of classic insurance contracts, facilitating the subsequent construction of actuarial models based on these components. Similar to A_x notations are used for a term life or pure endowment insurance contracts, for the endowment insurance contract, or for various annuity payments (International Actuarial Notation, 1949–1950).

However, this approach involves rather complicated calculations of sums. Therefore, an alternative is to use so-called commutation functions. The formulas for calculating the main commutation functions are as follows (Zubchenko, 2016):

$$D_x = v^x\, l_x, \qquad N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j\,, \qquad S_x = \sum_{j=x}^{\omega} N_j,$$

$$C_x = v^{x+1} d_x, \qquad M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j\,, \qquad R_x = \sum_{j=x}^{\omega} M_j.$$

In this case, the main insurance functions for the whole life insurance, term life and pure endowment insurance can be calculated using commutation functions much more simply:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}, \qquad A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, \qquad {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

RESEARCH METHODS

Analysis of personal pedagogical experience in the organization of the educational process of certain issues of actuarial mathematics and discussion of results with colleagues. Theoretical (analysis of educational sources in the field of finance and actuarial mathematics) and empirical (observation of the educational process of training future actuaries) methods of scientific investigation.

RESEARCH RESULTS

However, it is extremely important for future actuaries to be able to quickly and effectively perform relevant calculations on the insurance basis -- the life table, which contains statistical data on the survival of individuals of the corresponding age. For example, the following figure shows the calculation of commutation functions for the educational training basis AM92 (Institute of Actuaries, 2002) (see Fig. 1).

For real case studies, students use life contingency tables from open sources, such as the State Statistics Service of Ukraine (State Statistics Service of Ukraine, 2022).

Relevant calculations of commutation functions, insurance functions, insurance rates, payments, and sums can conveniently be performed, for example, in Microsoft Excel. Here, a typical choice would be between using regular Excel tools with standard functions and the Visual Basic for Applications (VBA) editor built into Excel. For instance, to find the necessary value of the commutation function based on the insurance basis, one can use the standard Excel function VLOOKUP (Fig. 2).

However, as an alternative, you can write a universal macro in VBA, thus avoiding being "tied" to the cells of a specific Excel sheet (Fig. 3).

i	4,0%
$i^{(12)}$	0,03928
u	0,96154
d	0,03922

$i/i^{(12)}$	1,01820351
i/δ	1,01986927

age	l_x	d_x	q_x	p_x	u^{x+1}	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	S_x
17	10 000,0000	6,0000	0,000600	0,9994	0,4936	5 133,73	119 959,94	2,96	519,89	27 725,81	2 398 087,20
18	9 994,0000	5,9364	0,000594	0,9994	0,4746	4 933,32	114 826,20	2,82	516,93	27 205,92	2 278 127,26
19	9 988,0636	5,8630	0,000587	0,9994	0,4564	4 740,76	109 892,88	2,68	514,11	26 689,00	2 163 301,06
20	9 982,2006	5,8096	0,000582	0,9994	0,4388	4 555,75	105 152,13	2,55	511,43	26 174,89	2 053 408,17
21	9 976,3909	5,7564	0,000577	0,9994	0,4220	4 377,98	100 596,38	2,43	508,88	25 663,45	1 948 256,05
22	9 970,6346	5,7032	0,000572	0,9994	0,4057	4 207,16	96 218,40	2,31	506,46	25 154,57	1 847 659,67
23	9 964,9313	5,6700	0,000569	0,9994	0,3901	4 043,04	92 011,24	2,21	504,14	24 648,11	1 751 441,27
24	9 959,2613	5,6469	0,000567	0,9994	0,3751	3 885,32	87 968,21	2,12	501,93	24 143,97	1 659 430,03
25	9 953,6144	5,6337	0,000566	0,9994	0,3607	3 733,77	84 082,88	2,03	499,81	23 642,04	1 571 461,82
26	9 947,9807	5,6405	0,000567	0,9994	0,3468	3 588,13	80 349,12	1,96	497,78	23 142,23	1 487 378,94
27	9 942,3402	5,6671	0,000570	0,9994	0,3335	3 448,17	76 760,99	1,89	495,82	22 644,45	1 407 029,82
28	9 936,6730	5,7037	0,000574	0,9994	0,3207	3 313,66	73 312,82	1,83	493,93	22 148,63	1 330 268,83
29	9 930,9694	5,7600	0,000580	0,9994	0,3083	3 184,38	69 999,16	1,78	492,10	21 654,70	1 256 956,02
30	9 925,2094	5,8559	0,000590	0,9994	0,2965	3 060,13	66 814,78	1,74	490,33	21 162,60	1 186 956,85

Fig. 1. Calculation of commutation functions using AM92 mortality.
Source: calculated by the authors based on (Institute of Actuaries, 2002).

B4 =VLOOKUP($A4;'am92'!$A$9:$L$120;10;0)

	A	B	C	D	E	F	G
1		ВПР	vlookup				
2							
3	age	M_x	D_x	N_x	A_x	a_x	a^k_x
4	17	519,889	5133,73	119960	0,10127	23,37	23,37

Fig. 2. Using VLOOKUP function in MS Excel.
Source: calculated by the authors based on (Institute of Actuaries, 2002).

```
Const ii = 0.04, delta = 3.92207131532813E-02, v = 0.961538461538461
Public Function bs(r)
Dim res
If r = "d" Then
   res = "am92"
ElseIf r = "2d" Then
   res = "am92@2"
ElseIf r = "d6" Then
   res = "am92_6p"
End If
Set bs = ThisWorkbook.Worksheets(res)
End Function
Public Function M_x(x, r)
M_x = bs(r).Cells(x, 10)
End Function
Public Function D_x(x, r)
D_x = bs(r).Cells(x, 7)
End Function
Public Function N_x(x, r)
N_x = bs(r).Cells(x, 8)
End Function
```

Fig. 3. Using VBA macro instead of VLOOKUP.
Source: author's own elaboration.

```
Public Function ntar(x, n, l, k, m, kz, sex, prog)
ntar = (A1xn(x, n, "d", sex) + Exn(x, n, "d", sex)) / al_xlk_pr(x, l, k, "d", sex)
End Function
Public Function npr(x, n, l, k, s)
npr = s * (A1xn(x, n, "d") + Exn(x, n, "d")) / al_xlk_pr(x, l, k, "d")
End Function
Public Function gpr(x, n, l, k, s, init, f, e)
gpr = (init + s * (1 + f) * (A1xn(x, n, "d") + Exn(x, n, "d"))) / ((1 - e) * al_xlk_pr(x, l, k, "d"))
End Function
End If
Set bs = ThisWorkbook.Worksheets(res)
End Function
Public Function M_x(x, r)
M_x = bs(r).Cells(x, 10)
End Function
Public Function D_x(x, r)
D_x = bs(r).Cells(x, 7)
End Function
Public Function N_x(x, r)
N_x = bs(r).Cells(x, 8)
End Function
```

Fig. 4. Using VBA macro.
Source: author's own elaboration.

The VBA approach is undoubtedly more versatile. As a further step in modeling the dynamics of an insurance company, VBA provides the opportunity to quickly program the calculation of the insurance net rate, net payment, and gross premium without being bound to specific Excel objects (Fig. 4).

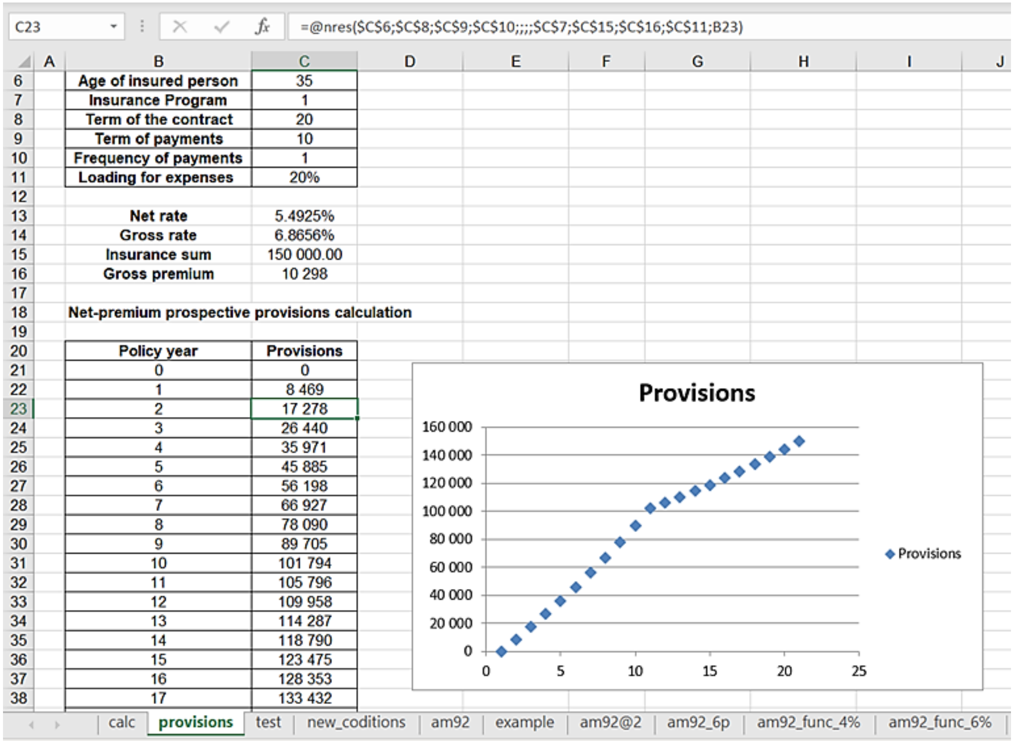
And to present the calculation results in the form of a dynamic actuarial calculator, where, depending on the age, insurance program, contract term, payment term, frequency, loading for expenses of the insurance company, and insurance sum, one can calculate the net rate, gross rate, and gross premium (Fig. 5).

Age of insured person	35
Insurance Program	1
Term of the contract	20
Term of payments	20
Frequency of payments	1
Loading for expenses	20%
Sum insured	150 000

Net rate	3,2969%
Gross rate	4,1212%
Insurance sum	150 000,00
Gross premium	6 182

Fig. 5. Actuarial calculator.
Source: author's own elaboration.

A continuous combination of theoretical and practical components, along with the demonstration of the mathematical model on practical cases and reinforcement of several variants of calculations, are integral components of successfully training actuaries. The following figure shows an example of modeling the net premium insurance provision for the endowment life insurance contract (Fig. 6).



Age of insured person	35
Insurance Program	1
Term of the contract	20
Term of payments	10
Frequency of payments	1
Loading for expenses	20%
Net rate	5.4925%
Gross rate	6.8656%
Insurance sum	150 000.00
Gross premium	10 298

Net-premium prospective provisions calculation

Policy year	Provisions
0	0
1	8 469
2	17 278
3	26 440
4	35 971
5	45 885
6	56 198
7	66 927
8	78 090
9	89 705
10	101 794
11	105 796
12	109 958
13	114 287
14	118 790
15	123 475
16	128 353
17	133 432

Fig. 6. Net premium insurance provision for the endowment life insurance contract.
Source: calculated by the authors based on (Institute of Actuaries, 2002).

DISCUSSION

Conducting actuarial mathematics courses at the Department of Probability Theory, Statistics, and Actuarial Mathematics involves the study of theoretical material during lectures in accordance with the developed programs, combined with practical exercises using modern software. Students are provided with all necessary recommendations, examples, and templates. An integral part includes group work, studying business cases, team competitions, group discussions, and Q&A sessions. Students implement individual projects, receiving step-by-step recommendations and constant support from instructors. This practical experience better prepares them for careers in the field by bridging the gap between theoretical knowledge and practical application.

Using VBA (Visual Basic for Applications) in teaching actuarial mathematics, especially when working with life expectancy tables, offers several advantages and features. Among them, the following should be highlighted.

Automation: VBA allows for the automation of repetitive tasks involved in actuarial calculations. This automation streamlines the process of working with life expectancy tables, saving time and reducing errors.

Customization: VBA enables customization of calculations based on specific requirements or scenarios. Educators can tailor examples and exercises to match the complexity and focus of their curriculum, providing students with a more targeted learning experience.

Interactivity: VBA facilitates interactive learning experiences by allowing students to manipulate variables and observe the resulting changes in calculations in real time. This hands-on approach enhances understanding and engagement with actuarial concepts related to life expectancy.

Visualization: VBA can be utilized to create visual representations of data derived from life expectancy tables, such as charts or graphs. Visualizations help students interpret and analyze the data more effectively, reinforcing key concepts and insights.

Integration with Excel: Since VBA is integrated with Excel, educators can leverage the spreadsheet software's familiar interface and functionality. This integration simplifies the process of incorporating VBA scripts into teaching materials and encourages students to apply their Excel skills in actuarial contexts.

The Department of Probability Theory, Statistics, and Actuarial Mathematics of Taras Shevchenko National University of Kyiv consistently develops materials and textbooks, covering topics in financial mathematics and risk theory (Mishura, 2016; Mishura & Ragulina, 2016; Mishura & Ralchenko, 2021), both life insurance (Zubchenko, 2016) and mathematical methods for insurance types beyond life insurance (Zubchenko & Yamnenko, 2023). Collaborating with the Public organization “Society of Actuaries of Ukraine,” the department's professors actively participate in working groups focused on the development of insurance legislation, enhancing the efficiency of training actuaries and financial analysts, and standardizing Ukrainian actuarial and financial terminology (Zubchenko & Mishura, 2016, 2018).

The department has extensive experience in training actuaries. Graduates from the department are employed in the largest insurance companies in Ukraine and around the world, the National Bank of Ukraine, banks, and investment companies. Many students and alumni have successfully completed international qualification exams conducted by the British Institute and Faculty of Actuaries, thereby validating their highest qualifications at the international level.

CONCLUSIONS AND PROSPECTS OF FURTHER RESEARCH

In summary, utilizing VBA in teaching actuarial mathematics, particularly in the context of life expectancy tables, offers numerous benefits, including automation, customization, interactivity, visualization, integration with Excel, scenario analysis, debugging skills development, and real-world application. These features enhance the learning experience and equip students with valuable skills for their future careers as actuaries.

Actuaries are leading experts in risk management and financial uncertainties, making the actuarial profession one of the most successful in the world. We are actively working to ensure the highest standards of actuarial mathematics teaching.

Based on the benefits highlighted in the use of VBA for teaching actuarial mathematics, future research can focus on the following areas.

✓ **Effectiveness of VBA in Improving Student Learning Outcomes:** Conducting empirical studies to measure the impact of VBA-based teaching methods on student understanding, retention of concepts, problem-solving skills, and overall academic performance in actuarial mathematics courses.

✓ **Comparison with Traditional Teaching Methods:** Comparing the effectiveness of VBA-based teaching approaches with traditional methods (e.g., lectures, textbooks, problem sets) in terms of student engagement, comprehension, and long-term retention of knowledge.

✓ **Development of Advanced VBA Modules:** Creating advanced VBA modules and tools tailored specifically for actuarial mathematics education, addressing complex topics such as mortality modeling, pension valuation, risk assessment, and insurance pricing.

✓ **Long-Term Impact on Career Readiness:** Exploring the long-term impact of VBA-based learning experiences on students' preparedness for careers in actuarial science, including their ability to apply it in real-world actuarial practice, adapt to technological advancements, and pursue continuous professional development.

✓ **Industry Collaboration and Feedback**: Collaborating with actuarial firms, insurance companies, industry professionals, and professional organizations to gather feedback on the relevance and applicability of VBA-based teaching methods to the evolving needs of the actuarial profession.

By exploring these research areas, educators and researchers can contribute to advancing the field of actuarial mathematics education and preparing students for successful careers in the dynamic and evolving field of actuarial science.

REFERENCES

1. Board of the National Bank of Ukraine. *Regulations on the procedure of formation of technical provisions for insurance companies*. DECREE No. 203 of December 29, 2023. https://bank.gov.ua/ua/legislation/Resolution_29122023_203.
2. Gan, G. (2017). An Introduction to Excel VBA Programming: with Applications in Finance and Insurance. Chapman and Hall/CRC.
3. IFRS 17 Insurance Contracts. https://www.ifrs.org/issued-standards/list-of-standards/ifrs-17-insurance-contracts.
4. International Actuarial Notation (1949–1950). *Transactions of the Faculty of Actuaries*. 19(170): 89–99. Cambridge University Press.
5. Institute of Actuaries (2002). *Formulae and tables for examinations of the Faculty of Actuaries and the Institute of Actuaries*.
6. Law of Ukraine "On Insurance". Revision on January 1, 2024. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1909-20\#Text. Accessed 23 February 2024. [in Ukrainian].
7. Martínez, E. T., De la Peña Esteban, J. I., Ruiz, R. M., & Bajo, A. G. (2020). Coordination between universities for professional certification. A teaching mission experience in the master of actuarial and finance sciences. In *ICERI2020 Proceedings* (5634–5642). IATED.
8. Mishura, Yu. (2016). *Financial Mathematics.* ISTE Press - Elsevier.
9. Mishura, Yu., & Ragulina O. (2016). *Ruin Probabilities. Smoothness, Bounds, Supermartingale Approach.* ISTE Press - Elsevier.

10. Mishura, Yu., & Ralchenko K. (2021). *Discrete-Time Approximations and Limit Theorems In Applications to Financial Markets.* De Gruyter, Series in Probability and Stochastics, Vol.2.
11. State Statistics Service of Ukraine (2022). *Table about birth rate, death rate and average life expectancy 2021*. Kyiv. http://db.ukrcensus.gov.ua/PXWEB2007/ukr/publ_new1/2022/zb_tabl_nas_2021.pdf.
12. Wu, Z. (2015). *Develop Students' Key Actuarial Capabilities in College.* Society of actuaries. https://www.soa.org/493580/globalassets/assets/files/static-pages/research/arch/2016/arch-20162-2-wu.pdf
13. Zubchenko, V. (2016). *Matematychni osnovy strahuvannya zhyttya [Mathematical foundations of life insurance]*. Kyiv: VPC "Kyiv University". [in Ukrainian].
14. Zubchenko, V., & Yamnenko, R. (2023). *Statystychni metody v ryzykovomu strahuvanni [Statistical methods in risk insurance]*. Kyiv: Lyudmila Publishing House. [in Ukrainian].
15. Zubchenko, V., & Mishura, Yu. (2016). Standartyzatsiia aktuarnoi ta finansovoi terminolohii [Standardization of actuarial and financial terminology]. *Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic", series "Problems of Ukrainian Terminology*, 59–64. [in Ukrainian].
16. Zubchenko, V., & Mishura, Yu. (2018). Standartyzatsiia aktuarnoi terminolohii, yaka stosuietsia vydiv strakhuvannia, inshykh nizh strakhuvannia zhyttia [Standardization of actuarial terminology relating to types of insurance other than life insurance]. *Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic", series "Problems of Ukrainian Terminology"*, 46–49. [in Ukrainian].

Text of the article was accepted by Editorial Team 26.01.2024

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X
DOI: 10.31110/2413-1571
https://fmo-journal.org/

DOI **10.31110/fmo2024.v39i3-09** УДК **372.851**

РІВНЯННЯ В ЦІЛИХ ЧИСЛАХ У ОЛІМПІАДНІЙ МАТЕМАТИЦІ

Марія ОПР
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
opr.mv@pdpu.edu.ua
https://orcid.org/0009-0001-4437-6152

Сергій ДРАГАНЮК ✉
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
drahanyuk.sv@pdpu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-8514-2769

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Знайомство з теорією рівнянь у цілих числах або діофантових рівнянь не передбачено базовим контентом курсів математики закладів загальної середньої освіти. Проте такі рівняння часто зустрічаються у завданнях математичних олімпіад для школярів різних рівнів. Мета роботи полягає у проведенні аналізу типів задач з теми «Рівняння в цілих числах» у сучасних змаганнях з математики для учнів та основних методів розв'язання подібних задач.

Матеріали і методи. При проведенні дослідження було використано як теоретичні методи: опрацювання та здійснення аналізу визначених інформаційних джерел, проведення теоретичних міркувань дедуктивного та індуктивного характеру; так і практичні: розв'язування різного виду завдань і вправ з визначеної тематики, розробка детальних пояснень до отриманих розв'язків.

Результати. У роботі з'ясовано роль і місце діофантових рівнянь у контенті завдань на змаганнях з математики для школярів починаючи з рівня III етапу Всеукраїнської олімпіади. При цьому виокремлено такі типи задач, як задачі на розв'язання лінійних діофантових рівнянь з різною кількістю змінних, задачі, пов'язані з рівнянням Пелля, завдання на встановлення певних властивостей розв'язків заданого діофантового рівняння, задачі на розв'язання систем діофантових рівнянь, задачі, що вимагають пошуку послідовностей цілих чисел. Серед найбільш поширених методів, що застосовуються у шкільній олімпіадній математиці для розв'язання подібних задач, визначено такі методи, як канонічний розклад натуральних чисел, розкладання однієї чи обох частин рівняння на множники, метод математичної індукції , метод оцінок та інші. Наведено зразки розв'язків відповідних задач.

Висновки. Включення знайомства з основами теорії діофантових рівнянь до змістового наповнення курсів математики закладів загальної середньої освіти безумовно варто визнати корисним для всебічного розвитку школярів, насамперед для формування та розвитку навичок їх логічного мислення. Представлений у роботі аналіз типів відповідних завдань і методів їх розв'язання може стати у нагоді діючим вчителям-практикам при організації роботи математичних гуртків та проведенні факультативних занять за темами, які пов'язані з рівняннями у цілих числах. Подальшої розробки вимагає створення детальних планів-конспектів подібних занять.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *рівняння в цілих числах; курси математики закладів загальної середньої освіти; завдання математичних олімпіад для школярів; типи шкільних олімпіадних задач на розв'язання діофантових рівнянь; методи розв'язання діофантових рівнянь у шкільній олімпіадній математиці; розвиток логічного мислення школярів.*

Для цитування:	Опр М., Драганюк С. Рівняння в цілих числах у олімпіадній математиці. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 3. С. 68-74. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i3-09
	Опр, М., & Драганюк, С. (2024). Рівняння в цілих числах у олімпіадній математиці. *Фізико-математична освіта*, *39*(3), 68-74. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-09
For citation:	Opr, M., & Dragahiyk, S. (2024). Equations in integers in olimpic mathematics. *Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 68-74. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-09
	Opr, M., & Dragahiyk, S. (2024). Rivniannia v tsilykh chyslakh u olimpiadnii matematytsi [Equations in integers in olimpic mathematics]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 68-74. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-09

✉ Corresponding author

EQUATIONS IN INTEGERS IN OLIMPIC MATHEMATICS

Mariia OPR
State institution «South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky», Ukraine
opr.mv@pdpu.edu.ua
https://orcid.org/0009-0001-4437-6152

Sergiy DRAGAHIYK ✉
State institution «South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky», Ukraine
drahanyuk.sv@pdpu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-8514-2769

ABSTRACT

Formulation of the problem. The base content of math courses of institutions of general secondary education does not intend acquaintance with the theory of equations in integers or equations of Diophantus. Simultaneously we often meet such equations among the problems of student's math competitions of different level. The work is devoted to carrying out analysis of types of problems on the theme "Equations in integers" at the up-to-date math competitions of students of institutions of general secondary education and basis methods of solving such problems.

Materials and methods. In the process of carried out investigation such theoretical methods as studying and analyzing the determined sources of information, providing reasoning of deductive and inductive character together with such practical methods as solving different problems and tasks of the determined theme, working out the detail explanations to the received solutions are used.

Results. The role and the place of Diophantine equations in the content of problems of schoolchildren's math competitions beginning from the level of the III stage of the All-Ukrainian Math Olympiad are elucidated. Such types of problems as the tasks on solving linear Diophantine equations with different numbers of variables, some tasks connected with an equation of Pell, the tasks on establishing some properties of solutions of the given Diophantine equation, tasks on solving systems of Diophantine equations, tasks on finding some sequences of integer numbers are marked out. Among the most spread methods that are used in school Olympic mathematics for solving the problems such methods as canonical decomposition of natural numbers, decomposition of the one or the both parts of the equation onto multipliers, the method of mathematical induction and the method of estimation are distinguished. Examples of solutions to the corresponding problems are given.

Conclusions. Inclusion acquaintance with the beginnings of the theory of Diophantine equations to the content of math courses of institutions of general secondary education is undoubtedly useful for the all-round development of students, first of all from the position of forming and developing skills in their logical thinking. The represented analysis of the types and methods of solution of the corresponding problems can be useful to working teachers for organizing the work of math circles and conducting the elective courses according to the themes that are connected with equations in integers. The creation of detail synopses of such courses needs further working out.

KEYWORDS: *equations in integers; math courses of institutions of general secondary education; tasks for Olympic mathematics for schoolchildren; types of school Olympic problems on solving Diophantine equations; methods of solving Diophantine equations in school Olympic mathematics; development of logical thinking of schoolchildren.*

ВСТУП

Постановка проблеми та аналіз актуальних досліджень. Поняття рівняння є одним з основних понять курсу математики закладів загальної середньої освіти. Вміння розв'язувати рівняння (цілі алгебраїчні, раціональні, ірраціональні, тригонометричні, показникові, логарифмічні та змішані) є однією з базових складових математичної культури школяра. Апарат рівнянь широко використовується у різних галузях математики, у різних суміжних дисциплінах, зокрема, у фізиці та хімії. Знайомство з теорією рівнянь у цілих числах або діофантових рівнянь не передбачено базовим контентом курсів математики закладів загальної середньої освіти. Проте такі рівняння часто зустрічаються у завданнях математичних олімпіад різних рівнів (як для школярів, так і для студентів) і не залишають байдужими до себе тих, хто по-справжньому цікавиться математикою. Розгляд питань, пов'язаних з теорією діофантових рівнянь, на засіданнях математичних гуртків або під час факультативних занять дозволяє вчителю повторити з учнями теорію подільності та основні числові системи, підвищити їхню загальну математичну культуру та вміння розв'язувати нестандартні задачі, посилити загальний інтерес учнів до математики і занять нею, сприяє вихованню спроможності до альтернативного мислення, конструктивізму та винахідливості, формує вміння гармонійно поєднувати алгоритмічні методи і штучні прийоми розв'язування задач. Не зважаючи на те, що існує чимало робіт, як наукового, так і методичного характеру, присвячених тематиці діофантових рівнянь (Schmidt, 1991; Smart, 1998; Ядренко, 2004; Кравчук, 2019), роль та місце діофантових рівнянь у шкільній математиці вимагає подальшого усвідомлення та обговорення.

Мета роботи полягає у проведенні аналізу типів задач з теми «Рівняння в цілих числах» у сучасних змаганнях з математики для учнів закладів загальної середньої освіти та основних методів розв'язання подібних задач. Такий аналіз може бути корисним для діючих вчителів-практиків з математики, особливо, для вчителів-початківців, може визначити структуру та зміст відповідного курсу за вибором для здобувачів вищої освіти - майбутніх вчителів-практиків з математики закладів загальної середньої освіти.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Діофант Олександрійський був грецьким математиком, який жив і працював у третьому столітті нашої ери, автором серії книг під назвою «Арифметика», суттєву кількість яких присвячено розв'язуванню алгебраїчних рівнянь

(Stillwell, 2004). Діофант шукав розв'язки алгебраїчних задач у натуральних числах. Він першим ввів буквені символи для невідомих. Найпростіші діофантові рівняння розв'язували ще шумеро-вавілонські математики, піфагорійці та Евклід (Van der Waerden, 1983). Діофант розробив першу теорію таких рівнянь. У наступному, цю теорію розвивали такі видатні математики як Ф. Вієт, П. Ферма, А. Пуанкаре, А. Вейль, Л. Ейлер, Ж. Лагранж, К. Гаус, А. Лежандр, К. Якобі, П.Л. Чебишев, Г.Ф. Вороний та ін. (Бевз, 2006; Stillwell, 2004). З неї пізніше сформувалася така окрема галузь математики як діофантовий аналіз або діофантова геометрія (Mordell, 1969; Stiwell, 2004).

На даний час, у загальній постановці питання, діофантові рівняння – це алгебраїчні рівняння або системи алгебраїчних рівнянь з раціональними коефіцієнтами, розв'язки яких шукають у цілих або раціональних числах. Зазвичай розглядають такі діофантові рівняння, у яких число невідомих є більшим за число рівнянь. В силу цього діофантові рівняння також є відомими як невизначені рівняння.

Загальна теорія діофантових рівнянь є далекою до завершеності. Лише для окремих класів діофантових рівнянь натепер побудовано цілісну теорію. Зокрема, для алгебраїчних рівнянь з довільною кількістю змінних. Деяких типів рівнянь другого степеню з двома невідомими та небагатьох інших (Mordell, 1969; Schmidt, 1991; Smart, 1998). Багато інших типів діофантових рівнянь і натепер є відкритими проблемами. Десята проблема Гільберта – одне з 23 завдань, які Давид Гільберт запропонував 8 серпня 1900 року на II Міжнародному конгресі математиків, полягає у знаходженні універсального методу визначення розв'язності довільного алгебраїчного діофантового рівнння. Доведення алгоритмічної нерозв'язності цього завдання було завершено лише у 1970 році Юрієм Матіясевичем (Stillwell, 2004). Отриманий результат з одного боку трохи знизив інтерес до діофантових рівнянь, а з іншого – визначив нові класи задач, які потребують дослідження та побудови нових теорій.

У сучасній математиці поняття діофантового рівняння застосовують також до алгебраїчних рівнянь, розв'язки яких шукають у цілих алгебраїчних числах деякого алгебраїчного розширення поля Q раціональних чисел або поля p - адичних чисел.

МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

При проведенні дослідження було використано як теоретичні методи: опрацювання та здійснення необхідного аналізу визначених інформаційних джерел, проведення теоретичних міркувань дедуктивного та індуктивного характеру; так і практичні: розв'язування різного виду завдань і вправ з визначеної тематики, розробка детальних пояснень до отриманих розв'язків відповідно до представленого для учнів закладів загальної середньої освіти теоретичного контенту.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У олімпіадних змаганнях школярів з математики різних рівнів складності зустрічаються діофантові рівняння різних видів. Достатньо часто зустрічаються лінійні діофантові рівняння з різною кількістю змінних, але, найчастіше, з двома чи з трьома змінними. Для лінійних діофантових рівнянь побудовано чітку теорію, яку має сенс розглядати у повному обсязі у межах занять математичних гуртків чи відповідних факультативів. Деякі факти цієї теорії можуть бути використаними для створення низки нових та цікавих олімпіадних задач різних рівнів складності. При цьому відносно новою є ідея пошуку саме представлень натуральних чисел, хоча протягом останніх років у олімпіадній математиці цю ідею іноді почали застосовувати (див., наприклад, (Ядренко, 2004)).

Однією з найскладніших тем шкільної олімпіадної математики, присвячених діофантовим рівнянням, є тема, пов'язана з рівняннями Пелля. Рівняння Пелля, які також називають рівняннями Пелля-Ферма, – це будь-які діофантові рівняння виду $x^2 - D\cdot y^2 = 1$, де D – це натуральне число. (Van der Waerden, 1983). Далеко не завжди загальній теорії рівнянь Пелля приділяється необхідна увага на заняттях математичних гуртків. В силу цього, поява таких рівнянь на математичних змаганнях для переважної більшості учасників цих змагань стає суттєвою проблемою. Зауважимо також, що рівняння Пелля є цікавими не лише самі собою, а й можуть використовуватися для пошуку розв'язків рівнянь інших видів.

У загальному випадку, на математичних змаганнях школярів діофантові рівняння найчастіше зустрічаються на математичних олімпіадах, починаючи з рівня Всеукраїнської олімпіади з математики для школярів (Анікушин та ін., 2013; Анікушин, Ківвата та ін., 2014; Кравчук, 2019). Класичною при цьому є наступна задача, запропонована для учнів 9 класу на LXXIII Київській міській олімпіаді юних математиків.

Задача 1. *Знайти усі трійки* (x, y, p) *натуральних чисел, у яких число* p *є простим, що задовольняють рівність* $y\cdot(x^2+p)-x\cdot(y^2+p)=p$.

Відповідь: $(3,2,3)$ *та* $(p+1,1,p)$, *де* p *– довільне просте число.*

Розв'язання*. Розкладемо ліву частину заданої рівності на множники:* $y\cdot(x^2+p)-x\cdot(y^2+p)=(x\cdot y-p)\cdot(x-y)$. *Отримаємо рівність* $(x\cdot y-p)\cdot(x-y)=p$. *Зрозуміло, що вона може бути правильною виключно у кількох наступних випадках.*

1. $x\cdot y-p=1$, $x-y=p$. *Тоді* $x=y+p$, *підстановка отриманого виразу до першої рівності приводить до квадратного рівняння* $y^2+y\cdot p-p-1=0$ *відносно змінної* y. *Число* 1 *є коренем цього рівняння. Другий корінь –* $(-p-1)$ *– при цьому не є натуральним числом. Отже, залишається лише випадок* $y=1$. *Тоді* $x=p+1$, *трійка чисел* $(p+1,1,p)$ *задовольняє умови задачі для довільного простого числа p.*

2. $x\cdot y-p=-1$, $x-y=-p$. *Тоді* $y=x+p$, *маємо квадратне рівняння відносно змінної* x : $x^2+x\cdot p-p+1=0$.

В силу того, що потрібними є лише натуральні розв'язки, дискримінант $D=p^2+4\cdot p-4$ *отриманого рівняння повинен бути квадратом цілого числа. Очевидно, що взагалі, для будь-яких дійсних значень змінної* p, *правильною є нерівність* $p^2+4\cdot p-4<(p+2)^2$. *Отже, дискримінант* D *не може бути квадратом цілого числа для тих простих значень змінної* p, *для яких справджується нерівність* $(p+1)^2<p^2+4\cdot p-4$. *Ця нерівність є рівносильною нерівності* $2\cdot p>5$, *або, з урахуванням того, що число* p *повинно бути простим, до нерівності* $p\geq 3$. *У підсумку, для змінної* p *достатньо лише окремо перевірити значення* 2, *для всіх інших її простих значень дискримінант* D *не може бути квадратом цілого числа і, в силу цього шуканих натуральних значень змінної* x *не існує. У випадку* $p=2$ *маємо, що* $D=8$, *тобто, дискримінант* D *так само не є квадратом цілого числа, шуканих натуральних значень змінної* x *не існує.*

3. $x\cdot y-p=p$, $x-y=1$. *У цьому випадку маємо:* $x=y+1$, $x\cdot y=2\cdot p$. *З першої рівності випливає, що* $x>y$. *Тоді друга рівність може бути правильною лише у двох випадках:* $y=1$, $x=2\cdot p$ *або* $y=2$, $x=p$. *З урахуванням того, що* $x=y+1$, *у першому випадку маємо* $y=1$, $x=2$, $p=1$ *– суперечність, у другому -* $y=2$, $x=p=3$ *– розв'язок.*

4. $x\cdot y-p=-p$, $x-y=-1$. *Зрозуміло, що перша рівність одразу приводить до суперечності.*

Корисним інструментом для пошуку розв'язків рівнянь у цілих числах буває використання канонічного розкладу натурального числа. Канонічний розклад натурального числа може успішно застосовуватися для розв'язання навіть найпростіших діофантових рівнянь. Це ілюструє наступна задача для учнів 10 класу LXXII Київської міської олімпіади юних математиків.

Задача 2. *Відомо, що три попарно різних натуральних числа* a, b, c *мають добуток* 80. *Визначити, якому найменшому простому числу може дорівнювати сума цих чисел.*

Відповідь: *19.*

Розв'язання. *Зрозуміло, що сума трьох попарно різних натуральних чисел є більшою за* 2. *Отже, просте число, яким може бути їхня сума, є непарним. В силу того, що усі три числа не можуть бути непарними бо мають добутком число* 80, *то можливим є лише той варіант, коли два числа є парними і одне – непарним. Варіанти, при яких усі три числа є парними або два з них є непарними, а одне – парним, не підходять, бо у таких випадках сума цих чисел є парним числом.* $80=2^4\cdot 5$. *Отже, число* 80 *має лише два непарних дільника. Це числа* 1 *і* 5. *Розглянемо усі можливі при цьому випадки.*

1. $c=1$, $a=2$, $b=40$. *Тоді* $a+b+c=43$. *Це просте число.*
2. $c=1$, $a=4$, $b=20$. *Тоді* $a+b+c=25$ *- не є простим числом.*
3. $c=1$, $a=8$, $b=10$. *У даному випадку* $a+b+c=19$. *Це просте число, що є меншим за число* 43.
4. $c=5$, $a=2$, $b=8$. *У даному випадку число* $a+b+c=15$ *не є простим.*

У завданнях математичних олімпіад не завжди вимагають знаходити усі розв'язки заданого рівняння у цілих числах. Іноді треба встановити лише певну властивість розв'язків. Прикладом завдання подібного типу є задача, яку свого часу було запропоновано учням 9 класу на заключному етапі відбору команди Києва до участі у IV етапі Всеукраїнської математичної олімпіади.

Задача 3. *Для простого числа* p *натуральні числа* u *і* v, $u\neq v$, *є такими, що задовольняють рівність* $p^2=\frac{1}{2}\cdot(u^2+v^2)$. *Довести, що число* $2\cdot p-u-v$ *є квадратом або подвоєним квадратом цілого числа.*

Розв'язання. *Елементарні підрахунки дозволяють зробити висновок про те, що, за умови даної задачі (* $p^2=\frac{1}{2}\cdot(u^2+v^2)$*), має місце рівність* $(2\cdot p-u-v)\cdot(2\cdot p+u+v)=(u-v)^2$, *звідки, між іншим, випливає (* $u\neq v$ *), що* $2\cdot p-u-v>0$. *Число* p^2 *є натуральним, отже, число* u^2+v^2 *є парним. Це означає, що числа* u *і* v *мають однакову парність. Але це означає, що парним є кожний з множників* $2\cdot p-u-v$ *та* $2\cdot p+u+v$, *натуральними числами є кожне з чисел* $\frac{1}{2}\cdot(2\cdot p-u-v)$, $\frac{1}{2}\cdot(2\cdot p+u+v)$, $\frac{1}{2}\cdot(u-v)$. *Одночасно, очевидно, має місце рівність* $\frac{1}{2}\cdot(2\cdot p-u-v)\cdot\frac{1}{2}\cdot(2\cdot p+u+v)=\left(\frac{u-v}{2}\right)^2$. *Із даної рівності, на підставі існування для кожного натурального числа однозначно визначеного канонічного розкладу, випливає існування таких натуральних чисел* a, b *і* q, *що* $\frac{1}{2}\cdot(2\cdot p-u-v)=q\cdot a^2$, $\frac{1}{2}\cdot(2\cdot p+u+v)=q\cdot b^2$, *число* q *у своєму канонічному розкладі не містить повних квадратів* *натуральних чисел. Тоді* $\frac{u+v}{2}=p-q\cdot a^2$, $\frac{u+v}{2}=q\cdot b^2-p$, $p-q\cdot a^2=q\cdot b^2-p$, $2\cdot p=q\cdot a^2+q\cdot b^2$ *, число* q *є дільником числа* $2\cdot p$ *. За умови задачі, число* p *є простим. Із представлення квадрата цього числа у вигляді половини суми квадратів певних натуральних чисел* u *і* v *випливає, що* $p>2$ *. Отже, дільниками числа* $2\cdot p$ *є лише числа* 1, 2, p, $2\cdot p$ *, число* q *може дорівнювати виключно одному з них. Якщо* $q=p$ *або* $q=2\cdot p$ *, то натуральне число* q *ділиться на просте число* p*. В силу того, що* $\frac{u+v}{2}=p-q\cdot a^2$ *, тоді і натуральне число* $\frac{u+v}{2}$ *ділиться на число* p*, звідки випливає, що* $\frac{u+v}{2}\geq p$ *. З іншого боку, із умови задачі, унаслідок безпосередніх підрахунків маємо, що* $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2=p$ *і, в силу цього,* $p>\frac{u+v}{2}$ *. Отримано суперечність. Якщо* $q=1$ *, то* $2\cdot p-u-v=2\cdot a^2$ *, якщо* $q=2$ *, то* $2\cdot p-u-v=(2\cdot a)^2$ *.*

Зрозуміло, що представлена задача 3, як за своєю умовою, так і за способом свого розв’язання не носить природного характеру. Вона передбачає наявність у відповідних учнів навичок використання спеціальних штучних прийомів міркувань. Можна мати різні погляди з приводу того, чи варто, чи не варто включати задачі подібного типу до складу олімпіадних. Але на даний час ми маємо беззаперечний факт їхньої присутності, який зайвий раз підтверджує необхідність спеціальної додаткової підготовки учнів, спрямованої на створення необхідних передумов отримання ними дипломів на олімпіадах з математики для школярів різних рівнів.

У підсумку, можна зробити висновок про те, що на олімпіадних змаганнях рівня III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для школярів зустрічаються достатньо різні задачі як на розв’язання діофантових рівнянь, так і на доведення певних властивостей розв’язків таких рівнянь.

На змаганнях IV етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для школярів рівняння у цілих числах також зустрічаються традиційно часто. Тут відповідні задачі стають більш складними, збільшується різноманітність методів їхнього розв’язання. Як і раніше, зустрічаються не лише задачі на розв’язання діофантових рівнянь, а й задачі, близькі за тематикою. Наступну задачу, запропоновану учням 9 класу на L Всеукраїнській олімпіаді з математики, розглянемо як приклад.

Задача 4. *Визначити, яке найменше значення може приймати математичний вираз* $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2+(x_n-x_1)^2$ *, у якому числа* x_1 *,* x_2 *, … ,* x_n *є цілими, попарно різними.*

Відповідь: $4\cdot n-6$ **.**

Розв’язання. *За допомогою методу математичної індукції доведемо, що для довільного натурального числа* n *та довільних попарно різних цілих чисел* x_1 *,* x_2 *, … ,* x_n *вірною є нерівність*

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2+(x_n-x_1)^2 \geq 4\cdot n-6 \ .$$

Справедливість твердження бази індукції є очевидною. Дійсно, нерівність $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_1)^2\geq 2$ *є правильною в силу того, що, за умови задачі, цілі числа* x_1 *і* x_2 *є різними.*

Припустимо, твердження є істинним для натурального числа k *, тобто*

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{k-1}-x_k)^2+(x_k-x_1)^2 \geq 4\cdot k-6 \ .$$

Нехай цілі числа x_1 *,* x_2 *, … ,* x_k *,* x_{k+1} *є попарно різними. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що число* x_{k+1} *найбільше з них. Легко переконатися у тому, що* $(x_k-x_{k+1})^2+(x_{k+1}-x_k)^2-(x_k-x_1)^2=2\cdot(x_{k+1}-x_k)\cdot(x_{k+1}-x_1)$ *. В силу того, що числа* x_1 *,* x_k *, та* x_{k+1} *є попарно різними і число* x_{k+1} *є найбільшим з них, правильною є нерівність* $2\cdot(x_{k+1}-x_k)\cdot(x_{k+1}-x_1)\geq 4$ *. Отже,* $(x_k-x_{k+1})^2+(x_{k+1}-x_k)^2-(x_k-x_1)^2\geq 4$ *. Додаючи цю нерівність до припущення індукції, отримаємо потрібне твердження для числа* $k+1$*. У підсумку, згідно принципу математичної індукції, доведено, що воно є істинним для довільного натурального числа* n *.*

Для завершення розв’язання задачі залишається навести приклади таких чисел, для яких у доведеній нестрогій нерівності буде мати місце рівність. Легко переконатися у тому, що для непарного числа n *,* $n=2\cdot k-1$*,* $k\in N$ *, можна покласти* $x_j=2\cdot j-2$ *при* $j\leq k$ *та* $x_j=-2\cdot j+4\cdot k-1$ *при* $j\geq k+1$*. Для парного числа* n *,* $n=2\cdot k$ *,* $k\in N$ *, можна припустити, що* $x_j=2\cdot j-2$ *, якщо* $j\leq k$ *та* $x_j=-2\cdot j+4\cdot k+1$ *, якщо* $j\geq k+1$*.*

На змаганнях рівня IV етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики суттєвим чином розширюється апарат, що застосовується для розв’язання діофантових рівнянь. Так, доволі часто використовується метод оцінок.

На даному етапі змагань біля третини завдань з визначеної теми вимагають розв’язання вже систем діофантових рівнянь. Однією з класичних задач такого виду є наступна задача, запропонована для учнів 10 класу на LVIII Всеукраїнській олімпіаді юних математиків.

Задача 5. *Розв’язати у натуральних числах x ,y, p, n, k систему рівнянь* $\begin{cases} 5\cdot x+y=p^k \\ 5\cdot y+x=p^{k+n} \end{cases}$.

Відповідь: *будь-яке натуральне число k, що задовольняє нерівність* $k\geq 3$, $x=2^{k-3}$, $y=3\cdot 2^{k-3}$, $p=2$, $n=1$.

Зустрічаються також і вельми «екзотичні» завдання на розв’язування рівнянь у цілих числах. У якості прикладу можна навести задачу, запропоновану учням 10 класу на LIX Всеукраїнській олімпіаді юних математиків.

Задача 6. *Знайти усі натуральні числа* a *і* b*, для яких число* $2^{a!}+2^{b!}$ *є кубом натурального числа. (При цьому учням нагадують, що для натурального числа* n *за означенням* $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n$ *).*

Відповідь: $a=2$, $b=2$.

На відміну від олімпіад, інший вид змагань з математики для школярів – математичні бої – містять задачі дещо інших типів. Тут найчастіше підбирають завдання, що вимагають більше пояснень, передбачають існування різних випадків, припускають узагальнення. Тут вітається можливість дискусій. Тема діофантових рівнянь є широко представленою у цьому розділі олімпіадної математики. У завданнях для математичних боїв різноманітні рівняння у цілих числах можуть бути присутніми вже для учнів 8 класу. Прикладами таких задач можуть бути наступні.

Задача 7*. Довести, що число 2019 є найменшим натуральним числом, яке одночасно задовольняє дві наступні умови: 1) воно є сумою четвертих степенів п’яти попарно різних натуральних чисел; 2) воно є сумою шести послідовних натуральних чисел.*

Задача 8. *Знайти усі пари* $(m;n)$ *натуральних чисел* m, n*, для яких кожне з чисел* 3^m+1 *і* 3^n+1 *є кратним до добутку* $m\cdot n$.

Для учнів старших класів зустрічаються навіть задачі, що вимагають пошуку послідовностей цілих чисел. Взагалі, тут переважають достатньо складні задачі, прикладом яких може бути наступна.

Задача 9. *Через* $\varphi(n)$ *позначено кількість натуральних чисел, які не перевищують натурального числа* n *і є взаємно простими з ним. Довести, що існує таке натуральне число* m*, що рівняння* $\varphi(n)=m$ *має принаймні* 2015 *розв’язків.*

Зрозуміло, що деякі ідеї, що застосовуються при розв’язанні наведених вище задач, можуть бути використані у науковій роботі школярів, зокрема, при підготовці робіт для участі у конкурсах МАН.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Натуральні та цілі числа є первинними, у певному сенсі основними числовими системами, що входять до контенту шкільної математичної освіти, системами, властивості яких у межах середньої освіти у достатньо повному обсязі опановують протягом усього періоду навчання. В силу цього, умови задач, які сформульовано за допомогою цілих чисел, розв’язання яких передбачає знаходження певних цілих чисел, часто представляються учням цілком зрозумілими, відповідні задачі, на перший погляд здаються достатньо простими. З іншого боку, переважну більшість подібних задач аж ніяк не можна вважати тривіальними. Пошук розв’язків подібних задач часто відкриває майже необмежене джерело для творчості.

Задачі, пов’язані з розв’язанням та дослідженням діофантових рівнянь, серед вказаних вище задач займають почесне місце. Включення знайомства з основами теорії діофантових рівнянь до змістового наповнення курсів математики закладів загальної середньої освіти, безумовно, варто визнати корисним для всебічного розвитку школярів, насамперед для формування та розвитку навичок їх логічного мислення. На даний час переважна більшість подібного матеріалу, віднесена до поглибленого рівня навчання, міститься серед задач олімпіадної математики.

У роботі з’ясовано роль і місце діофантових рівнянь у контенті завдань на змаганнях з математики для школярів починаючи з рівня III етапу Всеукраїнської олімпіади. При цьому виокремлено такі типи олімпіадних задач, як задачі на розв’язання лінійних діофантових рівнянь з різною кількістю змінних, задачі, пов’язані з рівнянням Пелля, завдання на встановлення певних властивостей розв’язків заданого діофантового рівнняння, задачі на розв’язання систем діофантових рівнянь, задачі, що вимагають пошуку послідовностей цілих чисел. Серед найбільш поширених методів, що застосовуються у шкільній олімпіадній математиці для розв’язання подібних задач, визначено такі методи, як представлення натуральних чисел у вигляді добутку натуральних степенів різних простих чисел, розкладання однієї чи обох частин рівняння на множники, метод математичної індукції, метод оцінок та інші. Наведено зразки розв’язків відповідних задач. Мається на увазі, що представлений матеріал буде корисним для вчителів-практиків при організації роботи математичних гуртків та проведенні факультативних занять за темами, які пов’язані з рівняннями у цілих числах. Подальшої розробки вимагає створення детальних планів-конспектів подібних занять. Представлений матеріал також може визначити структуру та зміст відповідного курсу за вибором для здобувачів вищої освіти – майбутніх вчителів-практиків з математики закладів загальної середньої освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Анікушин, А. В. та ін. (2013). *Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2011/2012 н. р*. (Б. В. Рубльов, Ред.) Гімназія.
2. Анікушин, А. В. та ін. (2014). *Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2012/2018 н. р.* (Б. В. Рубльов, Ред.) Гімназія.
3. Бевз, В. Г. (2006). *Історія математики.* Основа.
4. Кравчук, В. Р. (2019). *Задачі математичних олімпіад.* Підручники і посібники.
5. Ядренко М.Й. (2004). Піфагорові трикутники і Велика теорема Ферма. *У світі математики*, *11*(2), 1-9. http://195.20.96.242:5028/rvportal/DocDescription?docid=RvROBU.BibRecord.35254.
6. Van der Waerden, B. L. (1983). *Diophantine Equations. In: Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61779-95
7. Mordell, L. J. (1969). Diophantine equations. *Pure and Applied Mathematics, 30.* Academic Press.
8. Schmidt, Wolfgang M. (1991). Diophantine approximations and Diophantine equations. *Lecture Notes in Mathematics.* 1467. Berlin: *Springer-Verlag*.
9. Smart, Nigel P. (1998). The algorithmic resolution of Diophantine equations. *London Mathematical Society Student Texts.* 41. Cambridge University Press.
10. Stillwell, J. (2004). *Mathematics and its History (Second ed.). Springer Science + Business Media Inc.*

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Anikushyn, A. V. ta in. (2013). *Matematychni olimpiadni zmahannia shkoliariv Ukrainy. 2011/2012 n. r. [Mathematical Olympiad competitions of schoolchildren of Ukraine. 2011/2012 e. y.].* (B. V. Rublov, Red.) Himnaziia.
2. Anikushyn, A. V. ta in. (2014). *Matematychni olimpiadni zmahannia shkoliariv Ukrainy. 2012/2018 n. r. [Mathematical Olympiad competitions of schoolchildren of Ukraine. 2012/2018 e. y.].* (B. V. Rublov, Red.) Himnaziia.
3. Bevz, V. H. (2006). *Istoriia matematyky [History of mathematics.].* Osnova.
4. Kravchuk, V. R. (2019). Zadachi matematychnykh olimpiad [Problems of mathematical Olympiads.]. Pidruchnyky i posibnyky.
5. Iadrenko M.I. (2004). Pifahorovi trykutnyky i Velyka teorema Ferma [Pythagorean triangles and Fermat's Great Theorem.]. *U sviti matematyky — In the world of mathematics*, 11(2), 1-9. http://195.20.96.242:5028/rvportal/DocDescription?docid=RvROBU.BibRecord.35254.
6. Van der Waerden, B.L. (1983). *Diophantine Equations. In: Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61779-95
7. Mordell, L. J. *(1969). Diophantine equations. Pure and AppliedMathematics. Vol. 30.* Academic Press.
8. Schmidt, Wolfgang M. *(1991). Diophantine approximations and Diophantine equations. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1467. Berlin: Springer-Verlag.*
9. *Smart, Nigel P. (1998).* The algorithmic resolution of Diophantine equations. *London Mathematical Society Student Texts. Vol. 41. Cambridge University Press.*
10. *Stillwell, J. (2004). Mathematics and its History (Second ed.). Springer Science + Business Media Inc.*

Матеріал надійшов до редакції 20.02.2024р.

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/fmo2024.v39i3-10 UDC 372.853

DETERMINING THE DENSITY AND MOLAR MASS OF AIR IN A HOME EXPERIMENT

Serhii PODLASOV ✉
National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine
s.podlasov@kpi.ua
https://orcid.org/0000-0002-3947-4401

ABSTRACT

Formulation of the problem. Experimental research is an integral part of physics education. During distance learning, students can carry out hands-on experiments only at home. Modern smartphones, equipped with various sensors, offer significant capabilities for this purpose. The literature offers quite extensive descriptions of experiments aimed at determining mechanical, acoustic, and optical quantities using smartphones. At the same time, insufficient attention has been paid to determining gas parameters that can be measured using the pressure sensor embedded in smartphones. Therefore, the relevant task is to develop a methodology for experimenting to determine the density of air and its molar mass at home using a pressure sensor.

Materials and methods. To achieve the objective of the study, we used the analysis of the curriculum of the course "General Physics for Bachelor of Engineering", a review of the methodological instructions for performing laboratory work in the section "Molecular Physics and Thermodynamics" of the physics course of technical universities, a review of the literature on the topic of the study, and an analysis of the results of student research on the dependence of air pressure on altitude. We also surveyed students about the possibility of conducting the research at home and their interest in conducting other experiments using a smartphone.

Results. The methodology for determining the density and molar mass of air was developed based on the results of a study of the pressure-height dependence. It is shown that it is necessary to perform statistical processing of experimental data to estimate the sought quantities. The experimental results allowed us to obtain values of density and molar mass of air that show a good correlation with the tabulated values.

Conclusions. Studying the pressure-altitude relationship using a smartphone and the PhyPhox application allows for fairly accurate calculations of air density and molar mass. According to the survey results, students responded positively to conducting home experiments using smartphones.

KEYWORDS: *barometric formula; air density; smartphone; pressure sensor; home experiment; teaching physics.*

ВИЗНАЧЕННЯ ГУСТИНИ ТА МОЛЯРНОЇ МАСИ ПОВІТРЯ В ДОМАШНЬОМУ ЕКСПЕРИМЕНТІ

Сергій ПОДЛАСОВ ✉
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна
s.podlasov@kpi.ua
https://orcid.org/0000-0002-3947-4401

АНОТАЦІЯ

Постановка проблеми. Невід’ємною складовою навчання фізики є проведення експериментальних досліджень. Під час дистанційного навчання натурний експеримент студенти можуть виконувати тільки вдома. Значні можливості для цього надають сучасні смартфони, які оснащені різноманітними датчиками. В літературі достатньо широко описані експерименти по визначенню механічних, акустичних та оптичних величин з використанням смартфона. У той же час, недостатньо уваги приділено визначенню параметрів газів, що можна здійснювати, використовуючи датчик тиску, які встановлений у смартфоні. Тому актуальним постає завдання розробки методики проведення експерименту по визначенню густини повітря та його молярної маси в домашніх умовах з використанням датчика тиску.

Для цитування:	Podlasov S. Determining the density and molar mass of air in a home experiment. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 3. С. 75-80. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i3-10
	Podlasov, S. (2024). Determining the density and molar mass of air in a home experiment. *Фізико-математична освіта*, *39*(3), 75-80. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-10
For citation:	Podlasov, S. (2024). Determining the density and molar mass of air in a home experiment. *Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 75-80. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-10
	Podlasov, S. (2024). Determining the density and molar mass of air in a home experiment. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(3), 75-80. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-10

✉ Corresponding author

Матеріали і методи. Для досягнення поставленої мети дослідження використано аналіз навчальної програми курсу «Загальна фізика для бакалаврів інженерних спеціальностей», огляд методичних вказівок до виконання лабораторних робіт з розділу «Молекулярна фізика і термодинаміка» курсу фізики технічних ВНЗ, огляд літератури за темою дослідження та аналіз результатів студентських досліджень щодо залежності тиску повітря від висоти. Також ми проводили опитування студентів стосовно можливості проведення домашніх дослідження та готовності до проведення інших експериментів з використанням смартфона.

Результати. Розроблена методика визначення густини та молярної маси повітря за результатами дослідження залежності тиску від висоти. Показано, що для коректного оцінювання шуканих величин необхідно проводити статистичну обробку експериментальних даних. Проведені експерименти дозволили одержати значення густини та молярної маси повітря, які добре корелюють з табличними значеннями.

Висновки. Дослідження залежності тиску від висоти із застосуванням смартфона і програми PhyPhox дозволяє достатньо точно обчислити густину і молярну масу повітря. За результатами опитування встановлено, що студенти схвально відносяться до виконання домашніх досліджень з використанням смартфона.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *барометрична формула; густина повітря; смартфон; датчик тиску; домашній експеримент; навчання фізики.*

INTRODUCTION

The problem statements. Studying physics at any level includes conducting educational experiments. As a result of their implementation, students receive direct confirmation of the principles of physics, acquire experimental skills, and develop critical thinking. According to the results of the study by Klein et al. (2021), this is most effective when students independently acquire experimental data. During distance learning, students can independently conduct research and process obtained data by working with real equipment in remote access mode or using available or home-made equipment. Mobile devices with a range of sensors offer significant opportunities for conducting physical experiments in both face-to-face and distance learning. (Sukariasih et al., 2019; Slipukhina et al., 2020). As emphasized by Milner-Bolotin & Milner (2023), and Cukierman et al., (2017), the use of smartphones in the educational process stimulates students' interest in scientific research and bridges the gap between first-year students and Engineering. The use of smartphones makes it quite easy to conduct research when students study the sections "Mechanics" (see, for example, Bug-Os et al. (2023)), "Electricity and Magnetism" Lincoln, (2024), Zhuang et al. (2023), "Oscillations and Waves" Sárközi (2023), Podlasov et al. (2023), Csernovszky et al. (2024). A detailed review of Experiments with mobile devices is presented by Kuhn & Vogt (2022), Imtinan (2023), and Colt et al. (2021).

At the same time, the literature is poorly represented by experiments that students can conduct in distance learning outside of educational laboratories to study the properties of gases, especially using mobile device sensors. Therefore, it may be of interest to develop a methodology for experimenting at home to determine the density of air and its molar mass.

The analysis of current research. In the scientific and methodical literature, practically no attention is paid to the experimental determination of the density and molar mass of air. Only the pumping method is described in the methodological instructions for laboratory works in physics for face-to-face education (see, for example, Golovina et al., 2013; Ruda, 2018). The essence of the method is to weigh the flask with air before and after pumping and measure the pressure change in the flask. Such an experiment can be performed only in a physics laboratory.

Another way to determine air density is to study the pressure-altitude dependence using an Arduino or Raspberry with a pressure sensor (for example, the GY-68 module has a pressure accuracy of up to 3 Pa, i.e., it can detect a change in altitude of 17 cm), or using a smartphone equipped with a pressure sensor, as suggested by Wye (2023). In his paper, Wye (2023) described the use of the iPhone 11. Measurements made with the PhyPhox app installed on the iPhone 11 allowed the author to calculate the air density with an accuracy of ± 0.03 kg/m^3, which is approximately 2.5% of the tabulated density value and corresponds to a pressure change of about 1.2 Pa. Perhaps such high accuracy is determined by the use of the iPhone itself. In smartphones of other manufacturers, there are fluctuations in the readings of the pressure sensor in the range of 2-5 Pa, which does not allow to reliably register small changes in pressure when climbing even one stair, not to mention changes in the height of a brick, as mentioned by the author. The procedure for determining the error of the pressure sensor is not described clearly in the paper.

Since most students do not have iPhones, it is necessary to develop a measurement procedure to investigate the relationship between pressure and altitude, taking into account the errors of pressure sensors in smartphones from other manufacturers.

The purpose of this article is to describe an experiment to determine the density and molar mass of air using only mobile devices and processing the obtained data.

THEORETICAL BASES OF THE RESEARCH

In general, the pressure-altitude relationship is described by the barometric formula:

$$P = P_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad (1)$$

where P_0 is the pressure at the height h = 0, M is the molar mass of the gas, g - free fall acceleration, R - the universal gas constant, and T - the temperature.

Experimental verification of the formula (1) could, in principle, confirm the validity of the Boltzmann distribution and could be used to determine the molar mass of air, or the universal gas constant. However, when rising even to a height of ~50-60 m above the initial level (this corresponds to the height of an 18-20-storey building), taking into account the table values of the molar mass of air and other constant values for a temperature of 290 K, the exponent power is about $6 \cdot 10^{-3}$, which is significantly less than one. Taking into account the errors of the experiment, this does not allow us to determine the power factor in formula (1) with sufficient accuracy, therefore to calculate R or M.

Taking into account the smallness of the exponent, one can write $e^{-\frac{Mgh}{RT}} \approx 1 - \frac{Mgh}{RT}$ then

$$P = P_0\left(1 - \frac{Mgh}{RT}\right)$$

and pressure difference for two altitudes is

$$\Delta P = P_1 - P_2 = P_0\frac{Mg(h_2 - h_1)}{RT} = P_0\frac{Mg}{RT}\Delta h.$$

From the ideal gas equation of state

$$\frac{PM}{RT} = \rho, \tag{2}$$

where ρ is the density of the gas. Assuming that the air density and temperature do not depend on the altitude, we obtain

$$\rho = \frac{\Delta P}{g\Delta h}. \tag{3}$$

Equation (3) clearly shows that if the pressure is measured at different altitudes and a graph of $P(h)$ is constructed, then the tangent of its slope angle equals ρg, which allows you to calculate the air density. With known air density, temperature, and pressure from the equation of state of an ideal gas, we can obtain the molar mass:

$$M = \frac{\rho RT}{P}. \tag{4}$$

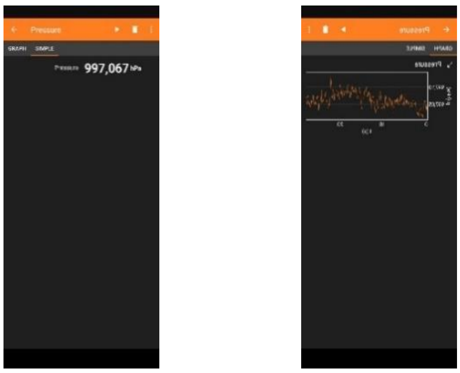
METHODS OF THE RESEARCH

To achieve the research objectives, we used an analysis of the general physics course syllabus for bachelor of engineering specialties, a review of the methodological instructions for laboratory work in the section "Molecular Physics and Thermodynamics" of the physics course at technical universities, a review of the literature on the topic of the study, and an analysis of the results of students' research on the dependence of air pressure on altitude.

RESULTS OF RESEARCH

Modern mobile smartphones, smartwatches, and tablets are equipped with various sensors, some of them includes a pressure sensor. To find out if a device has a pressure sensor and its specific characteristics (sensitivity, measurement range, and some others), you can use a program like Sensors Multitool or a similar one. The operation principle of the pressure sensor in mobile devices is similar to that of a membrane barometer. However, in this case, a tensor resistor is attached to the membrane, which is one of the arms of the Wheatstone bridge. The change in the deflection of the membrane results in a variation in the resistance of the strain gauge, thereby causing an imbalance in the Wheatstone bridge circuit. This imbalance is detected by the corresponding software and displayed on the gadget's screen. Processing of the pressure sensor signal is carried out by such free software as Sensors Multitool or PhyPhox, or by applications that simulate the appearance of a barometer on the screen of a mobile device. The Sensors Multitool software (Fig. 1) displays only instantaneous pressure values to the nearest hundredth of a hPa. In contrast, the PhyPhox software has two modes - displaying instantaneous pressure values with an accuracy of thousands of hPa (Fig. 2a) or a graph of pressure versus time (Fig. 2b). In this mode the data is accumulated and can be sent to a computer in MS Excel or CSV file format. In addition, the PhyPhox program can be controlled directly from the computer. Apps that display a barometer on a smartphone screen (Fig. 3) smooth out instantaneous pressure values and usually round them to tenths of a hectopascal (hPa). Note that these readings may differ significantly from laboratory membrane barometer readings and have a relatively large margin of error. Therefore, in our opinion, it is not advisable to use a "barometer" application in a smartphone to conduct experiments.

Fig. 1. Sensors Multitool screen.



a) b)

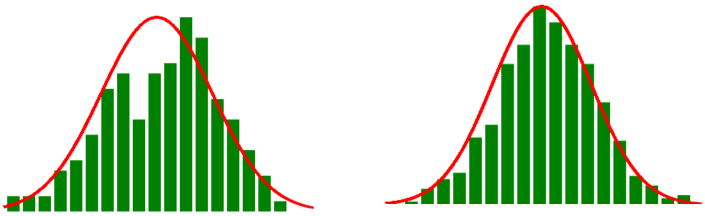
Fig. 2. PhyPhox screen.

Fig. 3. Barometer in smartphone.

Source: author's development.

The pressure sensor in electronic gadgets, like other sensors (acceleration, magnetic field), has 'noise' (fig. 2b), and its readings change rapidly over time, practically preventing the capture of instantaneous pressure values in applications like Sensors Multitool and PhyPhox. This noise can be one of the reasons for inaccuracies in the barometer readings on the smartphone screen.

In order to estimate the pressure value and the errors that can be assumed when determining it with PhyPhox, it is necessary to perform a statistical analysis of the pressure values recorded in it, namely to calculate the sample mean and standard deviation. For this purpose, we used the pressure values recorded by the PhyPhox program over 30 s and 45 s (300 and 450 values, respectively). Based on these data, we calculated the mean, the standard error and built he histograms of the distribution of the deviations from the mean (Fig. 4). The solid line on the figure, corresponding to a normal distribution with values of variance determined from the experimental data. It's clear that that the 'noise' of the pressure sensor is distributed nearly to a normal law. The standard error for the data shown in fig. 4 is 2.5×10^{-2} hPa and 2.3×10^{-2} hPa, respectively.



a) b)

Fig. 4. Histogram of deviations of instantaneous pressure values from the mean.
a) 30 s; б) 45 s.
Source: author's development.

The change of altitude of 20 cm (this is comparable to the standard step height of 15 cm in high-rise buildings) causes the air pressure to change by approximately 2.5 Pa, i.e. within the error of the measuring device. This means that reliably detecting a change in pressure can be achieved with a change in height of around 60-70 cm so that the pressure change exceeds the error by about three times. To construct a graph of the pressure-altitude relationship and determine air density 5-7 data points are sufficient. This corresponds to a change in height of 3-3.5 meters, which corresponds to a rise of one floor. Of course, increasing the height of the altitude reduces the error in plotting and the error in calculation of air density.

The task of determining the density and molar mass of air was proposed to students of the Institute of Thermal and Atomic Power Engineering at Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute (54 individuals). The task was optional, and only approximately half of the students completed it. The devices used by the students for measurements may be equipped with pressure sensors from different manufacturers with different resolutions and thus different errors. That's why, we recommend conducting the measurement procedure as follows: at each altitude, activate pressure measurements for 25-30 seconds using the PhyPhox program, and then send the obtained data to a computer using the "Export data" option. Alternatively, you can save the data on the gadget using the "Save experiment state" option for future use.

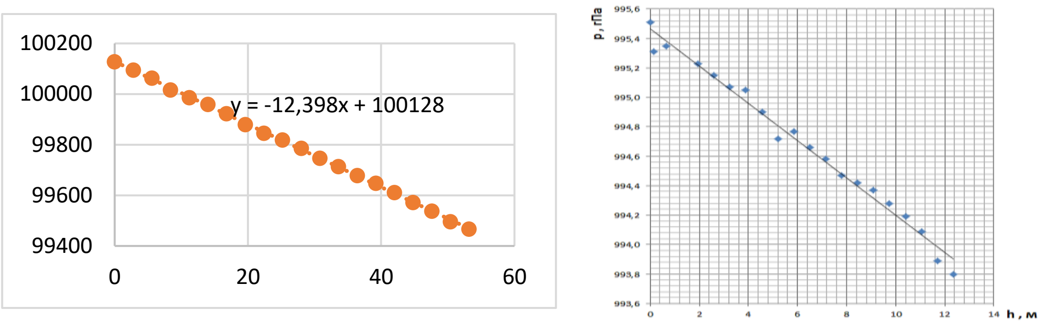
The processing of experimental data involves determining the statistical characteristics (mean and standard error) of a large dataset. For statistical parameters (mean values and errors) of a large number of exported experimental data, it is advisable to use mathematical packages such as MS Excel, Google Sheets, or use the program that was developed by us for such cases. This program is hosted on our website Physics.zfftt.kpi.ua within the Moodle environment and is accessible to registered users. In addition to the mean value and standard error, the program calculates other parameters of the statistical distribution and builds a histogram, an example of which is shown in Fig. 4.

Depending on where they lived, students had the opportunity to study pressure changes with height variations ranging from 6 meters (a two-story building) to 55 meters (a 20-story building). The largest number of experiments were conducted in 5- and 9-story buildings.

To plot the $P(h)$ dependence graph, it is convenient to use the Scatter Plot option of MS Excel with the construction of a trend line and display of the equation describing this line (fig. 5a). The multiplier before the function argument is the angular coefficient of the line is equal to the product $g\rho$. If students did not have access to MS Excel, they constructed the $P(h)$ graph using alternative software tools (Fig. 5b), or used graph paper to plot the graph and determined the slope coefficient manually. From the experimental results, the density values of air calculated by the students ranged from 1.17 to 1.28 kg/m³ with an error of ±0.1 kg/m³. These results are in good agreement with the data of the reference tables (see, for example, https://gutpfusik.blogspot.com/2020/07/blog-post.html), taking into account their dependence on the temperature and humidity of the air. Based on the experimental density values, students calculated the molar mass of air. Its values ranged from 27.8 g/mol to 30.4 g/mol with an error of up to ±2.4 g/mol. This range also reasonably corresponds to the tabulated value of 28.9 g/mol.

The lack of previous experimental experience and processing their results caused a number of questions that the students had. The most frequently asked questions were about how to use MS Excel to calculate the mean value and the error, and how to use the Scatter Plot. To answer these questions, we developed guidelines and posted them on the website physics.zfftt.kpi.ua.

At the end of the experiment, we surveyed students about their attitudes toward conducting home experiments and their reasons for not conducting the experimental investigation $P(h)$. The students who completed the research task were unanimous in their support for this type of work and expressed their satisfaction with getting acquainted with the capabilities of a smartphone as a measuring device. As for the students who were unable to complete the survey (28 out of 54), the main reason was the lack of a pressure sensor in their smartphones (23), lack of time (4), and personal reasons (1).



a) b)

Fig. 5. The examples of experimental dependences of pressure on altitude obtained by students.

Source: own research.

CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES FOR FURTHER RESEARCH

Using a smartphone as a measuring device allowed students to calculate the density and molar mass of air, based on the dependence of altitude pressure. The peculiarities of pressure registration using the PhyPhox application determined the methodology for performing measurements and calculating errors. Processing the results of the experiment stimulated a more detailed familiarization of students with the calculation of mean value and random errors using MS Excel, Google Spreadsheets, or other mathematical packages for this purpose. The values of density and molar mass of air obtained by students generally agree well with the tabulated data.

Modern smartphones, tablets, and smartwatches are advisable for conducting physical experiments by students during both remote and classroom learning. However, when formulating the task, you need to take into account the availability of the required sensor in the smartphone. For example, a pressure sensor is built into the iPhone, high-priced Samsung models, and smartwatches.

The prospects for further investigations we see in the formulation of tasks for physical experiments that can be conducted at home using affordable and home-made equipment, as well as smart devices.

REFERENCES

1. Bug-Os, M.A.A.C., Marte, S.J., & Pili, U.B. (2023). Verification experiment of the coefficient of static and kinetic friction utilizing a mobile application. *Physics Education*, 58 (6), 065013. https://doi.org/10.1088/1361-6552/acf431
2. Colt, M., Popescu, M., & Dragomir, F. L. (2021). Current Experimental Methods in Physics Using the Smartphone Sensors. *The 16th International Conference on Virtual Learning VIRTUAL LEARNING – VIRTUAL REALITY*, 223-232. https://icvl.eu/documents/9/ICVL2021-Proceedings-SITE.pdf#page=223
3. Csernovszky, Z., Hömöstrei M., & Kurucz, K. (2024). Study of damped oscillations using Phyphox and Arduino controlled Hall-sensor. *Journal of Physics: Conference Series*, 2693 (1), 012004. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2693/1/012004.
4. Cukierman, U. R., Silvestri, S., Drangosch, J., Ferrando, D. P., Agüero, M., Delmonte, R., Corrao, L. G., & Saclier, L. (2017). Bridging the gap between first-year students and Engineering: A novel application of mobile technologies for improving Mathematics and Physics learning. *Conference: 2017 7th World Engineering Education Forum (WEEF)*, 834-838. https://www.researchgate.net/publication/327820916_Bridging_the_gap_between_first-year_students_and_Engineering_A_novel_application_of_mobile_technologies_for_improving_Mathematics_and_Physics_learning.
5. Holovina, N. A., Kobel, H. P., Doskoch, V. P., & Kalapusha, L. R. (2013). *Laboratornyi praktykum iz molekuliarnoi fizyky y termodynamiky [Laboratory workshop on molecular physics and thermodynamics.].* Lutsk : VezhaDruk, 91-95. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/5219/1/Laboratornyy%20praktykum.pdf (in Ukrainian).
6. Imtinan, N., & Kuswanto, H. (2023). The Use of Phyphox Application in Physics Experiments: A Literature Review. *JIPF (JURNAL ILMU PENDIDIKAN FISIKA)*. 8(2), 183-191. https://doi.org/10.26737/jipf.v8i2.4167
7. Klein, P., Ivanjek, L., Dahlkemper, M. N., Jeličić, K., Geyer, A., Küchemann, S., & Susac, A. (2021). Studying physics during the COVID-19 pandemic: Student assessments of learning achievement, perceived effectiveness of online recitations, and online laboratories. *PHYSICAL REVIEW PHYSICS EDUCATION RESEARCH 17, 010117*. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.010117
8. Kuhn, J., & Vogt, P. (2022). Experiments with mobile devices — A retrospective on 10 years of iPhysicsLabs. *The Physics Teacher* 60, 88–89. https://doi.org/10.1119/10.0009416
9. Lincoln, J. (2024). Biot–Savart law with a smartphone: Phyphox app. *Phys. Teach*. 62, 72–73. https://doi.org/10.1119/5.0188271
10. Milner-Bolotin, M., & Milner, V. (2023). Breaking the vicious circle of secondary science education with twenty-first-century technology: Smartphone physics labs. *Challenges in Science Education: Global Perspectives for the Future*, 177 – 199. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18092-7_9
11. Podlasov, S., Sverdlichenko, D., & Matviichuk, O.(2023). Eksperymentalni zadachi z fizyky v tekhnichnomu universyteti [The experimental physics problems at the technical university]. *Fizyko-matematychna osvita –Physical and Mathematical Education*, 38(3), 50-56. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-3-007 (in Ukrainian).
12. Ruda, L. M. (2018). *Laboratornyi praktykum z fizyky: mekhanika ta molekuliarna fizyky [Laboratory workshop on physics: mechanics and molecular physics].* Kharkiv. 34-38. http://lib.kart.edu.ua/handle/123456789/1385 (in Ukrainian).
13. Slipukhina, I., Chernetckiy, I., Kurylenko, N., Mieniailov, S., & Podlasov, S. (2020). Applied Aspects of Instrumental Digital Didactics: M-learning with the Use of Smartphone Sensors. *ICTERI 2020 ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer. Proceedings of the 16th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer. Volume I: Main Conference Kharkiv, Ukraine, October 06-10*. http://ceur-ws.org/Vol-2740/20200173.pdf (in English)

14. Sukariasih, L., Erniwati, La Sahara, Hariroh, L., & Fayanto, S. (2019). Studies the use of smartphone sensor for physics learning. *International journal of scientific & technology research*, 8, 10. https://www.ijstr.org/final-print/oct2019/Studies-The-Use-Of-Smartphone-Sensor-For-Physics-Learning.pdf.
15. Sárközi, Z., & Vörös, A.-I.-V. (2023). A version of Buys Ballot experiment for quantitative proof of the Doppler effect in students' laboratory work, adapted to online conditions. *AIP Conference Proceedings*, 2843 (1), 050013. https://doi.org/10.1063/5.0150800
16. Wye, S. (2023). Teaching remote laboratories using smart phone sensors: determining the density of air. *Phys. Educ. 58 015002*. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6552/ac9816.
17. Zhuang, W., Cao, H., Zhang, Z., Zhang, J., Zhao, X., Zhang, Y. (2023). Two capacitors' experiments using Phyphox app and ESP32 development board. *Physics Education*, 58 (5), 055013. https://doi.org/10.1088/1361-6552/ace57e

Text of the article was accepted by Editorial Team 04.03.2024

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Б

Г

Д

Ж

З

М

О

П

Т

Я

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Key title: Fìziko-matematična osvìta
Abbreviated key title: Fìz.-mat. osv.

Том 39, № 3
2024

Друкується в авторській редакції
Матеріали подані мовою оригіналу

Відповідальний за випуск
О.В. Семеніхіна

Комп'ютерна верстка
О.М. Удовиченко

Ідентифікатор медіа:
R30-02975

https://fmo-journal.org/

Підп. до друку 29.04.2024.
Формат 60х84/8. Гарнітура Calibri. Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 9,53.
Ум. фарб.-відб. 9,53. Обл.-вид. арк. 8,3. Тираж 50 пр. Вид. №24

Видавець:
СумДПУ імені А. С. Макаренка
40002, м.Суми, вул.Роменська, 87
Свідоцтво ДК № 231 від 02.11.2000 р.

Виготовлювач:
ФОП Цьома С.П. 40002, м. Суми, вул. Роменська, 100.
Тел.: 066-293-34-29.
Зам. № 40

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК, № 5050 від 23.02.2016.