

ПРО ЄДИНИЙ ПІДХІД ДО ВИВЧЕННЯ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ ТОТОЖНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ АЛГЕБРАЇЧНИХ ВИРАЗІВ

Василь ШВЕЦЬ ✉

Український державний університет
імені Михайла Драгоманова, Україна
v.o.shvets@udu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0003-2084-1336>

ON THE UNIFORM APPROACH TO THE ALGEBRAIC EXPRESSIONS IDENTICAL TRANSFORMATIONS STUDY IN THE COURSE OF ALGEBRA AND THE BEGINNINGS OF ANALYSIS

Vasyl SHVETS ✉

Ukrainian State University
named after Mykhailo Drahomanov, Ukraine
v.o.shvets@udu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0003-2084-1336>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. У статті розкривається авторський методичний підхід до вивчення алгебраїчних виразів в курсі алгебри і початків аналізу в старшій профільній школі. Оскільки за цим підходом рекомендується вивчати ірраціональні, тригонометричні, показникові та логарифмічні вирази, то він названий єдиним узагальненням.

Матеріали і методи. За таким підходом вивчення кожного з видів алгебраїчних виразів рекомендується здійснювати в чотири етапи: підготовчий, базовий, практичний і прикладний. Кожний з етапів природньо узгоджується з елементами дидактичного циклу, який розглядається як укрупнена одиниця навчального процесу для вивчення певної навчальної теми курсу алгебри і початків аналізу. На підготовчому етапі має акцентуватись увага на практичних потребах, що спонукають розглядати вказані вирази, повідомляються історичні відомості про розв'язання проблемних питань зусиллями математиків різних часів, зміст і визначення розглядуваного виразу тощо. На базовому – вивчаються основні тотожні рівності, на практичному – формуються вміння і навички виконання перетворень виразів, а на прикладному – демонструється застосування отриманих знань вмінь і навичок під час розв'язування прикладних задач, де ці вирази використовуються в якості математичних моделей.

Результати. Зміст єдиного узагальненого підходу чітко проілюстровано автором в статті на прикладі вивчення теми «Тригонометричні вирази і їх перетворення» (21 год). Зрозуміло, що змістове наповнення кожного з етапів залежить від виду виразів, які вивчатимуться, але методичні схема (правило-орієнтир) – однаковий.

Висновки. Як показала апробація названого підходу його практичне використання є менш затратним в часі в порівнянні з традиційними підходами: він ефективний, модерний, більш інформативний, реалізує прикладну спрямованість навчання математики і заслуговує на увагу та використання під час навчання алгебри і початків аналізу в старшій профільній школі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: алгебра і початки аналізу; алгебраїчний вираз; тригонометричні вирази і їх перетворення; єдиний узагальнений методичний підхід до вивчення.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Швец В. Про єдиний підхід до вивчення в курсі алгебри і початків аналізу тотожних перетворень алгебраїчних виразів. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 2. С. 63-71. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-09>.

ABSTRACT

Formulation of the problem. The article reveals the author's methodical approach to the study of algebraic expressions in the course of algebra and the beginnings of analysis in a senior professional school. Since this approach is recommended for studying irrational, trigonometric, exponential, and logarithmic expressions, it is called the only generalized one.

Materials and methods. According to this approach, it is recommended to study each type of algebraic expression in four stages: preparatory, basic, practical, and applied. Each of the stages is naturally consistent with the elements of the didactic cycle, which is considered as a consolidated unit of the educational process for the study of a specific educational topic of the algebra course and the beginnings of analysis. At the preparatory stage, attention should be focused on practical needs that prompt consideration of the specified expressions, historical information about the solution of problematic issues by the efforts of mathematicians of different times, the meaning and definition of the expression under consideration, etc., should be reported. At the basic level, the basic identical equalities are studied, at the practical level, the skills and abilities to perform transformations of expressions are formed, and at the applied level, the application of the acquired knowledge, skills and abilities is demonstrated when solving applied problems, where these expressions are used as mathematical models.

Results. The content of the unified generalized approach is clearly illustrated by the author in the article on the example of studying the topic "Trigonometric expressions and their transformations" (21 hours). It is clear that the content of each of the stages depends on the type of expressions to be studied, but the methodical scheme (guideline rule) is the same.

Conclusions. As the approbation of the mentioned approach showed, its practical use is less time-consuming compared to traditional approaches: it is effective, modern, more informative, implements the applied orientation of mathematics education, and deserves attention and use during the teaching of algebra and the beginnings of analysis in high school.

KEYWORDS: algebra and the beginnings of analysis; algebraic expression; trigonometric expressions and their transformations; a single generalized methodical approach to study.

FOR CITATION: Shvets, V. (2025). On the uniform approach to the algebraic expressions identical transformations study in the course of algebra and the beginnings of analysis. *Physical and Mathematical Education*, 40(2), 63-71. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i2-09>.

ВСТУП

Однією із змістових ліній шкільного курсу математики є лінія «Вирази і їх перетворення». Вона розпочинається з 7 класу і продовжується аж до випускного класу середнього закладу освіти. В курсі алгебри основної школи учні вивчають одночлени, многочлени, дробово-раціональні вирази, вчать їх спрощувати, доводити тотожну рівність, обчислювати числові значення для заданих значень змінних. У курсі алгебри і початків аналізу вивчення виразів і їх перетворень продовжується. Зокрема, вивчаються ірраціональні, тригонометричні, показникові і логарифмічні та інші вирази. Для їх вивчення можна використовувати методику вивчення кожного з них окремо яка включала б: як формувати поняття саме такого виразу; як вивчати основні тотожні рівності; як формувати в учнів вміння спрощувати вирази та доводити їх тотожну рівність; як вчити обчислювати значення, застосовувати перетворення таких виразів до розв'язування рівнянь і нерівностей тощо. Такий роздільний підхід, на наш погляд, є затратним, оскільки вимагає значного часового ресурсу на вивчення. А чи не можна запропонувати інший, менш затратний підхід, який був би більш науково інформаційним, сучасним і, що важливо, ефективнішим? Саме про такий підхід і йде мова в даній статті. Ми назвали його *єдиним (узагальненим) підходом до вивчення всіх алгебраїчних виразів* в курсі алгебри і початків аналізу. Щоб розкрити зміст такого підходу нагадаємо спочатку визначення поняття *алгебраїчного виразу* в шкільному курсі математики, яке було запропоноване нами в статті (Литвиненко та ін., 1999).

Нехай розглядається непорожня числова множина A , множина латинських букв $X = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ – якими позначені змінні величини та множина арифметичних операцій $Q = \{+, -, \times, : \}$.

Означення. Алгебраїчний вираз – це запис, складений із скінченного числа чисел, букв, поєднаних знаками арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення).

Зауважимо, що учням базової школи таке поняття та означення мають бути відомими, відомим є і те що його обсяг включає числові вирази, одночлени, многочлени, дробові вирази, дробово-раціональні вирази. Суть запропонованого нами підходу розкриємо на прикладі вивчення тригонометричних виразів і їх перетворень.

Мета статті: розкрити суть єдиного (узагальненого) методичного підходу до вивчення виразів і їх перетворень в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи, запропонувати цей підхід вчителям математики, фахівцям з теорії та методики навчання математики.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретичні – аналіз, синтез, порівняння, узагальнення теоретичного матеріалу, викладеного в навчальних та наукових джерелах. Емпіричні – опитування вчителів, математиків-методистів, вивчення діючих програм з математики, альтернативних підручників.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Тема: «Тригонометричні вирази і їх перетворення».

1. Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів. Орієнтовне планування навчального процесу.

Тригонометричні функції, як предмет вивчення в курсі Алгебри і початків аналізу, нині вивчаються в 10 класі старшої профільної школи. Зміст навчального матеріалу про такі функції в програмі викладений в двох навчальних темах: «Тригонометричні функції» (30 год) та «Тригонометричні рівняння і нерівності» (35 год).

Успішне вивчення обох тем, на наш погляд, можливе за умови, коли: відбудеться розділення, навчального матеріалу на окремі, логічно завершені підтеми; чітко визначена основна мета вивчення кожної підтеми та навчальні досягнення учнів; буде створене орієнтовне календарне планування навчального процесу.

Тому рекомендуємо наступний розподіл вивчення тригонометричного матеріалу.

Підтема 3.1 Тригонометричні вирази та їх перетворення (21 год).

Підтема 3.2 Тригонометричні функції, їх властивості і графіки (17 год).

Підтема 3.3 Тригонометричні рівняння і нерівності (29 год).

Зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів, основна мета вивчення та календарне планування вивчення підтеми «Тригонометричні вирази та їх перетворення» подано нижче (див. таблиці 1, 2).

Таблиця 1. Підтема 3.1. «Тригонометричні вирази і їх перетворення» (21 год.)

<i>Зміст навчального матеріалу</i>	<i>Навчальні досягнення учнів</i>
Числова міра кута. Кут повороту і його міра. Синус, косинус, тангенс і котангенс числа – як тригонометричні числа. Поняття про тригонометричний вираз. Основні тригонометричні тотожності: - співвідношення між тригонометричними числами однієї і тієї змінної, - тригонометричні формули: додавання, зведення, половинної та подвійної змінної, - формули перетворення суми і різниці тригонометричних чисел в добуток, - перетворення добутку тригонометричних чисел у суму. Дії з тригонометричними виразами: спрощення, доведення тотожної рівності, обчислення значень.	<i>Виконує</i> перехід від градусної міри кута до числової і навпаки. <i>Формулює</i> визначення синуса, косинуса, тангенса числа та вміє ілюструвати їх на одиничному тригонометричному колі. <i>Має поняття</i> про тригонометричний вираз, тотожну рівність двох тригонометричних виразів. <i>Вміє користуватися</i> таблицею тригонометричних формул під час виконання дій з тригонометричними виразами. <i>Вміє виконувати</i> дії над тригонометричними виразами під час розв'язування практичних вправ та прикладних задач.

Джерело: авторська розробка.

Основна мета вивчення: сформувати в учнів поняття тригонометричного (алгебраїчного) виразу, встановити основні тригонометричні тотожності і навчити застосовувати їх до виконання дій: спрощення; доведення тотожної рівності; обчислення значень.

Таблиця 2. Орієнтовне календарне планування вивчення підтеми 3.1. «Тригонометричні вирази і їх перетворення»

№	Теми занять, види письмових робіт	К-ть год	Дата проведення
1	Радіанна міра кута. Кут повороту, числова міра кута повороту. Синус, косинус, тангенс, котангенс, як тригонометричні числа. Тригонометричні вирази	2	
2	Основні співвідношення між тригонометричними числами, знаки тригонометричних чисел CP-1	3	
3	Формули суми тригонометричних чисел. Формули зведення, подвійного і половинного аргументу значення змінної CP-2	4	
4	Формули перетворення суми тригонометричних чисел в добуток CP-3	3	
5	Формули перетворення добутку тригонометричних чисел в суму CP-4	3	
6	Дії над тригонометричними виразами: спрощення, доведення тотожної рівності, обчислення значень CP-5	3	
7	Тригонометричні вирази як математичні моделі розв'язування прикладних задач	2	
8	Контрольна робота	1	
	Всього:	21	

Джерело: авторська розробка.

Перші заняття з підтеми «Тригонометричні вирази та їх перетворення» рекомендуємо провести у формі шкільної лекції, на якому розкрити суть поняття тригонометричного числа як числової характеристики кута, розповісти про числову міру кута та кута повороту, сформувати поняття тригонометричного виразу.

2. Шкільна лекція на тему «Числова міра кута. Тригонометричні числа».

Термін «тригонометрія» походить від грецьких слів *τρίγωνο* — трикутник та *μετρέειν* — вимірюю, в прямому розумінні означає «вимірювання трикутника». Його вжив вперше у 1595 р. німецький математик *Варфаламей Пітіск* (1561-1613 рр.). Вимірюванням трикутників займалися активно ще древні математики, коли вели астрономічні спостереження чи вимірювання на місцевості. Тому можна стверджувати, що тригонометрія, як математична наука, була довгий час частиною астрономії та географії. Згодом, вона виокремилася в самостійну галузь математики, а в шкільному курсі математики була довгий час навіть окремим навчальним предметом. З розвитком науки і техніки, зокрема, обчислювальної техніки, потреба в такому окремому предметі в шкільній освіті відпала.

На сьогодні тригонометричні знання представлені в шкільному курсі математики у вигляді окремих тем: у *геометрії* – «Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника» (8 кл); у *курсі алгебри і початків аналізу* – «Тригонометричні функції» та «Тригонометричні рівняння і нерівності» (10 кл).

З історії математики ми дізнаємось, що градусну міру кута запропонували *древні вавилоняни*. Спостерігаючи за рухом сонця на небесній сфері, вони помітили, що диск Сонця (рис. 1) на траєкторії руху зі Сходу і до Заходу вміщується 180 разів. Це природне явище і було використане вавилонянами для вибору еталону вимірювання кутів. Кут, під яким з поверхні Землі видно диск Сонця прийняли за одиницю вимірювання, а пізніше, вона отримала назву *градус* (від латинського *gradus* - крок). Таким чином Сонце на небесній сфері за світловий день робить 180 кроків.



Рис. 1

Джерело: авторська розробка.

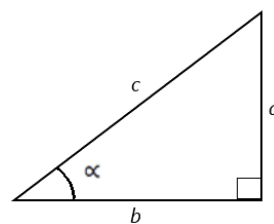


Рис. 2

Джерело: авторська розробка.

Саме тому в геометрії розгорнутий кут дорівнює 180°. А оскільки у древніх вавилонян використовувалася шістдесяткова система числення, то $\frac{1}{60}$ градуса отримала назву мінута, а $\frac{1}{60}$ міноти – секунда. Отже, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$ (подібні назви збереглися і до нині, для вимірювання часу). Градус застосовують і як одиницю вимірювання дуг кола.

Вивчаючи трикутники, древні математики помітили, що у всіх прямокутних трикутників із заданим гострим кутом α (рис. 2) відношення протилежного катета a до гіпотенузи c одне й теж.

Таке відношення (число) $\frac{a}{c}$, характерне для кожного гострого кута α прямокутного трикутника, вони й використовували в своїх астрономічних та географічних вимірюваннях та обчисленнях.

Назва *синус* для такого відношення і історія його введення поки що остаточно не встановлені. Відомо, що знак $\sin \alpha$ ввів швейцарський математик Леонард Ейлер у 1748 році, а древні грецькі математики, для потреб практики, склали *тригонометричні таблиці*. У них містилися довжини хорд, що відповідали центральним кутам кола сталого радіуса.

Фактично це були таблиці синусів, оскільки лінія синусів дорівнює половині хорди. Перші тригонометричні таблиці синусів склав давньогрецький астроном і математик Гіппарх (біля 150 років до нашої ери), він же визначив відстань від Землі до Місяця. Таблиці синусів склали також індійські, середньоазійські математики. Вони розглядали і інше відношення в прямокутному трикутнику – прилеглого катета до гіпотенузи $\frac{b}{c}$. Таке відношення отримало назву *косинус* кута α , а з подання Л. Ейлера отримало знак $\cos \alpha$ (від латинського *complementi sinus* – доповнення до синуса). Пізніше математики ввели в практику інші тригонометричні числа для гострого кута прямокутного трикутника: *тангенс* і *котангенс*, *секанс* і *косеканс*. Довгий час в шкільному курсі математики використовувалися чотиризначні таблиці В. М. Брадїса. На сьогодні, у зв'язку з появою потужних обчислювальних засобів – калькуляторів, персональних комп'ютерів, потреба в таких таблицях відпала.

Тепер трикутники, і не тільки прямокутні, а й довільні, вчать розв'язувати у школі на уроках геометрії, користуючись теоремами синусів, косинусів та вище названими відношеннями. Будемо надалі, для зручності, для кожного кута α називати його числові характеристики $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ *тригонометричними числами*.

З розвитком науки математика, зокрема, математичного аналізу, інших наук – фізики, механіки, електротехніки – виявилось, що градусна міра кута в багатьох застосуваннях незручна, оскільки доводиться вести обчислення за правилами шістдесяткової системи числення та правилами десяткової системи числення. Ці незручності спонукали математиків до введення числової міри кута (її ще іноді називають *радіанною мірою*).

Якщо розглянути два концентричних кола (рис. 3) з радіусами r_1 та r_2 (ці кола подібні), то в обох відношення довжин дуг A_1B_1 та A_2B_2 , на які спирається вписаний кут α , до їх радіусів r_1 та r_2 – стали. Тобто $\frac{A_1B_1}{r_1} = \frac{A_2B_2}{r_2}$.

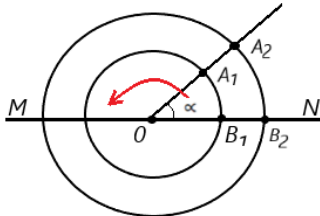


Рис. 3

Джерело: авторська розробка.

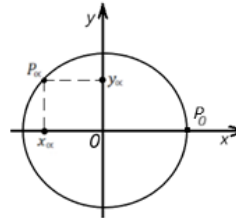


Рис. 4

Джерело: авторська розробка.

Цей факт і став визначальним у виборі нової одиниці вимірювання кутів. За числову одиницю вимірювання кутів вибрали величину кута, який спирається на дугу рівною за довжиною радіусу.

Таку одиницю вимірювання назвали *радіаном* (від латинського *radius* - промінь). Дрібніші одиниці відповідно дорівнюють 0,1; 0,01; 0,001; ... радіана. Оскільки розгорнутий кут MON дорівнює 180° , а довжина півкола дорівнює πr , то розгорнутий кут MON в радіанах буде дорівнювати числу $\alpha = \frac{\pi r}{r} = \pi$.

Звідси випливають формули переведення градусної міри кута в радіанну (числову) і навпаки:

$$a) 180^\circ = \pi, 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ (радіана)} \approx 0,017453292 \dots \approx 0,017 \text{ (радіана)};$$

$$b) \pi = 180^\circ, 1 \text{ рад.} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \approx 57,2957795 \dots \approx 57,3^\circ = 57^\circ 18'.$$

У таблиці 3 приведені градусна і радіанна міри найчастіше вживаних кутів.

Таблиця 3. Градусна і радіанна міри найчастіше вживаних кутів

Кут α	Градусна міра	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°
	Числова (радіанна) міра	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

У загальному випадку для довільного кута (як геометричної фігури) його міра в градусах α° , а міра в радіанах α визначаються за формулами (1) та (2):

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi} \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \quad (2)$$

Оскільки міра дуги кола дорівнює мірі центрального кута, що на неї спирається, то й дуги стали вимірювати як в градусах, так і в радіанах. На практиці кути вимірюють транспортиром (градусним або радіанним)

Бурхливий розвиток в XIX ст. техніки, вивчення коливних та обертальних рухів у механіці, призвели до виникнення такого поняття як *кут повороту* та його міри, а з ним і поняття синуса, косинуса кута повороту.

Що ж таке *кут повороту*? З'ясуємо зміст цього поняття. Розглянемо коло і розміщену на ньому зі своїм початком в центрі цього кола прямокутну декартову систему координат XOY (рис. 4). Його називають *тригонометричним колом*.

Рух точки P_0 по колу називають *кутом повороту*. Довжину дуги α , яку проходить точка P_0 , рухаючись по колу, P_0P_α називають *мірою кута повороту*. Якщо рух відбувається проти годинникової стрілки, то таке число береться зі знаком «+», а якщо за годинниковою стрілкою, то зі знаком «-».

Міра кута повороту таким чином стала виражатися і в градусах, і в радіанах, бути додатною чи від’ємною. Модулі цих чисел можуть бути і як завгодно великі, і як завгодно малі. Точка P_α в системі координат XOY має абсцису x_α та ординату y_α .

Виходячи з таких тлумачень, стали розглядати синус кута повороту α та косинус кута повороту α як відношення: $\sin \alpha = \frac{y_\alpha}{R}$, $\cos \alpha = \frac{x_\alpha}{R}$, де R – радіус кола. Таким поняттям в техніці, механіці, фізиці послуговується і нині.

Математики, які вивчають числові функції та їх властивості, провели узагальнення названих понять. Оскільки кожному дійсному числу α можна поставити у відповідність за допомогою тригонометричного кола кут повороту α , а йому, в свою чергу, відповідно $\sin \alpha$ та $\cos \alpha$, то були введені такі поняття як *синус числа α та косинус числа α* .

А для того, щоб спростити відношення $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$, коло стали оберати з радіусом рівним одиниці довжини (*одиничне тригонометричне коло*). Тепер в математиці, зокрема в курсі Алгебри і початків аналізу дотримуються наступних означень.

Означення 1. Синусом числа α називається ордината точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка $P_0(1; 0)$ при повороті навколо центра кола на кут повороту α рад, і позначається $\sin \alpha$.

Означення 2. Косинусом числа α називається абсциса точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка $P_0(1; 0)$ при повороті навколо центра кола на кут повороту α рад, і позначається $\cos \alpha$.

Виходячи з названих означень розглядаються також відношення $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ і $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Їх назвали відповідно тангенсом числа α та котангенсом числа α і позначають $tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Таким чином, для кожного дійсного числа $\alpha \in R$ існують його числові характеристики (тригонометричні числа) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, а також якщо $\cos \alpha \neq 0$ то існує і $tg \alpha$, якщо $\sin \alpha \neq 0$ то існує і $ctg \alpha$. Їх можна знайти з певною точністю за допомогою калькулятора. З’ясуємо, де ж відкладаються в одиничному тригонометричному колі названі числа. Відповідь на це запитання подано на рис. 5, 6, 7.

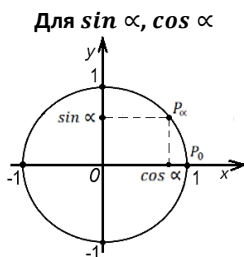


Рис. 5

Джерело: авторська розробка.

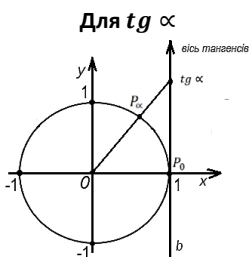


Рис. 6

Джерело: авторська розробка.

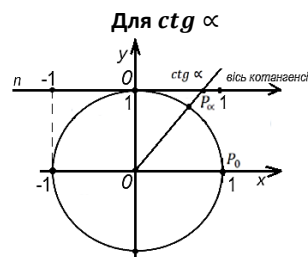


Рис. 7

Джерело: авторська розробка.

Фактично, одиничне коло з вісями OX, OY, b (вісь тангенсів) та n (вісь котангенсів) є *графічною моделлю*, за якою встановлюється відповідність між множиною дійсних чисел R і тригонометричними числами $\sin \alpha, \cos \alpha, tg \alpha, ctg \alpha$. Саме коло, можна розглядати як кругову числову шкалу з початком в точці P_0 , за якою на колі відкладаються додатні та від’ємні дійсні числа.

За допомогою одиничного тригонометричного кола, для окремих часто вживаних кутів була створена таблиця відповідних їм тригонометричних чисел (таблиця 4).

Таблиця 4. Таблиця відповідності

α	$0(0^\circ)$	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$\frac{2\pi}{3}$ (120°)	$\frac{3\pi}{4}$ (135°)	$\frac{5\pi}{6}$ (150°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$tg \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не існує	0
$ctg \alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не існує	0	не існує

* відповідність в таблиці між числами і їх тригонометричними числами обґрунтуйте самостійно.

Надалі будемо вивчати тригонометричні вирази та їх перетворення. Розглядатимемо множину дійсних чисел R , множину тригонометричних чисел $T = \{\sin \alpha, \cos \alpha, tg \alpha, ctg \alpha\}$, де $\alpha \in R$ та множину арифметичних операцій над числами $O = \{+, -, \times, : \}$.

Тригонометричним виразом (алгебраїчним виразом) будемо називати запис, складений із скінченної кількості дійсних чисел з множини R , тригонометричних чисел, з множини T , поєднаних знаками арифметичних операцій з множини O .

Наприклад, тригонометричними виразами є записи: а) $2\sin \alpha + \cos \alpha$; б) $\sin 3 \alpha - \cos \alpha$; в) $tg^2 \alpha - \cos 2 \alpha$.

Основною метою такого вивчення буде: - навчитись спрощувати такі вирази; - доводити тотожну рівність виразів; - обчислювати числове значення виразу для заданих значення змінних.

Кінець лекції

3. Після проведеної лекції, пропонуємо учням в якості домашнього завдання:

- вивчити зміст лекції; - обґрунтувати значення тригонометричних чисел для кутів, які подані в таблиці 4;
- обґрунтувати введення формул (1) та (2);
- підготувати короткі повідомлення про згаданих на лекції математиків і їх внесок у створення тригонометрії як науки.

На наступному занятті (практичному) перевірити виконання домашнього завдання і приступити до розв'язування вправ на: - переведення градусної міри кута в радіанну і навпаки; - зображення чисел на одиничному тригонометричному колі і навпаки, на запис всіх чисел для точки P_α , вибраної на одиничному тригонометричному колі; - на обчислення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ для заданих значень α , за допомогою калькулятора.

Виведення основних тригонометричних тотожностей. Після розв'язання достатньої кількості тренувальних вправ (вони є в діючих підручниках з алгебри і початків аналізу) рекомендуємо перейти до виведення основних тригонометричних тотожностей: 1) знаки значень $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ залежно від значення числа α ; 2) співвідношень між тригонометричними числами для одного й того ж числа α ; 3) формул для тригонометричних чисел суми, різниці двох чисел; 4) формул для подвійного і половинного кутів; 5) формул зведення (з встановленням загального правила); 6) формул переведення суми тригонометричних чисел в добуток і навпаки, добутку двох тригонометричних чисел в суму.

Розгляд усіх цих важливих тотожностей пропонуємо провести також у формі шкільної лекції та практичного заняття. На лекції довести найважливіші з них. Наприклад, про синус суми, формули зведення, а іншим – запропонувати учням на вивчення доведень самостійно, за одним з діючих підручників. На практичному занятті, яке послідує за лекцією, учні будуть демонструвати доведення інших тотожностей.

У результаті в них буде створений (власними руками) довідник основних тригонометричних тотожностей. Окремі, з яких, наприклад, $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, вони довели разом вчителем, а інші самостійно, користуючись колективними доведеннями як зразками.

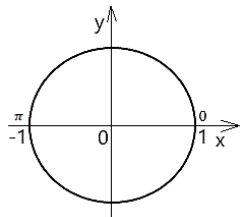
Зрозуміло, що виведення формул можна проводити як за лекційно-практичною формою навчання так і за класно-урочною. Бажано всіляко заохочувати учнів до самостійних доведень чи до повідомлень готових доведень, розміщених у підручниках. Гарним стимулом до роботи є похвала, позитивна оцінка, вибір найкращого доведення тощо. Разом із виведеннями слід розв'язувати тренувальні вправи, які виступають як ілюстрації застосувань вивчених формул.

4. Перетворення тригонометричних виразів. Окремо, увагу слід звернути на розв'язування вправ підвищеного і поглибленого рівнів на спрощення тригонометричних виразів, доведення тотожних рівностей, обчислення числових значень виразів, коли доводиться застосовувати не одну основу тотожність, а кілька. Розглянемо приклади таких вправ і особливості їх розв'язання.

1) Спростить вираз
$$\frac{(1 - \cos^2 \alpha)(\cos 4\alpha - \cos 2\alpha)}{\sin \alpha - 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}.$$

Розв'язання. Оскільки знаменник виразу може дорівнювати 0, то встановлювати область визначення виразу будемо по ходу виконання дій. Позначимо даний вираз $A(\alpha)$. Тоді:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{(1 - \cos^2 \alpha)(\cos 4\alpha - \cos 2\alpha)}{\sin \alpha - 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha (-2) \sin \frac{4\alpha + 2\alpha}{2} \cdot \sin \frac{4\alpha - 2\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha + 5\alpha}{2} \cos \frac{5\alpha - \alpha}{2} - 2 \sin 3\alpha} = -\frac{2 \sin^2 \alpha \cdot \sin 3\alpha \cdot \sin \alpha}{2 \sin 3\alpha \cdot \cos 2\alpha - 2 \sin 3\alpha} = -\frac{2 \sin^3 \alpha \cdot \sin 3\alpha}{2 \sin 3\alpha (\cos 2\alpha - 1)} = \\ &= \frac{\sin^3 \alpha \cdot \sin 3\alpha}{2 \sin 3\alpha \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2}, \text{ за умови, що } \sin 3\alpha \neq 0, \sin \alpha \neq 0. \end{aligned}$$



Скористаємось
одиничним
тригонометричним
колом

а) $\sin 3\alpha = 0$, коли $3\alpha = n\pi$, де $n \in \mathbb{Z}$. Звідси $\alpha = \frac{\pi}{3}n$, де $n \in \mathbb{Z}$.

б) $\sin \alpha = 0$, коли $\alpha = n\pi$, де $n \in \mathbb{Z}$. Множина значень $\alpha = \frac{\pi}{3}n$, де $n \in \mathbb{Z}$ включає в себе множину значень $\alpha = n\pi$, де $n \in \mathbb{Z}$. Тому область визначення виразу $A(\alpha)$ буде $\alpha \in \mathbb{R}$, де $\alpha \neq \frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $A(\alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathbb{Z}$.

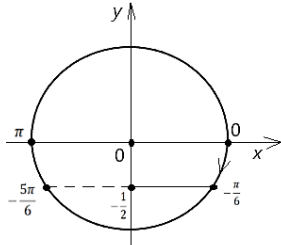
Методичний коментар. Щоб спростити даний вираз (замінити його на тотожно рівним йому) слід знати область визначення. Її краще встановлювати по ходу виконання перетворень. Для виконання перетворень потрібно скористатись основними тотожностями:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Варто звернути увагу учнів на те, що множина чисел $\alpha = \frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}$ є зліченною.

2) Доведіть тотожність $\frac{\sin 3\alpha + \cos 2\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + 2\sin 2\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$.

Розв'язання. Доведемо, що вираз зліва дорівнює виразу справа, на якій області визначення це відбувається встановимо по ходу доведення: $\frac{\sin 3\alpha + \cos 2\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + 2\sin 2\alpha - \cos 3\alpha} = \frac{(\sin 3\alpha - \sin \alpha) + \cos \alpha}{(\cos \alpha - \cos 3\alpha) + \sin 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 2\alpha (2\sin \alpha + 1)}{2\sin \alpha \sin 2\alpha + \sin 2\alpha - \sin 2\alpha (2\sin \alpha + 1)} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$, за умови, що $2\sin \alpha + 1 \neq 0$ і $\sin 2\alpha \neq 0$. Знайдемо за допомогою одиничного тригонометричного кола значення α , при яких ці вирази не дорівнюють 0.



а) $\sin 2\alpha = 0$, коли $2\alpha = n\pi$, де $n \in \mathbb{Z}$. Звідси $\alpha = \frac{\pi}{2}n$, де $n \in \mathbb{Z}$.

б) $2\sin \alpha + 1 = 0$, коли $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$. Звідки $\alpha_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$. Отже, рівність правильна для $\alpha \neq \frac{\pi}{2}n$, де $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ та $\alpha \neq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Обчисліть значення виразу $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} \alpha}$, якщо $\alpha = 15^\circ$.

Розв'язання. Зрозуміло, щоб обчислити значення даного виразу його слід спочатку спростити, встановити область допустимих значень та перекопатись що $\alpha = 15^\circ$ буде належати цій області. Тільки тоді провести обчислення. Позначимо вираз $A(\alpha)$.

$$A(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{\sin 4\alpha}{\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha}} - \frac{1}{\frac{\sin 4\alpha}{\cos 5\alpha \cdot \cos \alpha}} = \frac{\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha - \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\cos \alpha (\cos 3\alpha - \cos 5\alpha)}{\sin 4\alpha} = \frac{2\cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sin 4\alpha}{\sin 4\alpha} = 2\sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

за умови, що $\cos \alpha \neq 0, \cos 3\alpha \neq 0$ та $\cos 5\alpha \neq 0, \sin 4\alpha \neq 0$.

За допомогою одиничного тригонометричного кола, знайдемо якою буде область допустимих значень виразу $A(\alpha)$.

1) якщо $\sin 4\alpha = 0$, то $4\alpha = n\pi$, де $n \in \mathbb{Z}$. $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}n$, де $n \in \mathbb{Z}$.

2) якщо $\cos \alpha = 0$, то $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$.

3) якщо $\cos 3\alpha = 0$, то $3\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$. $\alpha_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, де $n \in \mathbb{Z}$.

4) якщо $\cos 5\alpha = 0$, то $5\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$. $\alpha_4 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n$, де $n \in \mathbb{Z}$.

За умови $\alpha = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$ не дорівнює жодному з чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Отже, $\frac{\pi}{12}$ належить області визначення виразу $A(\alpha)$. Тому $A(\frac{\pi}{12}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Методичний коментар. Для спрощення виразу використайте формули:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

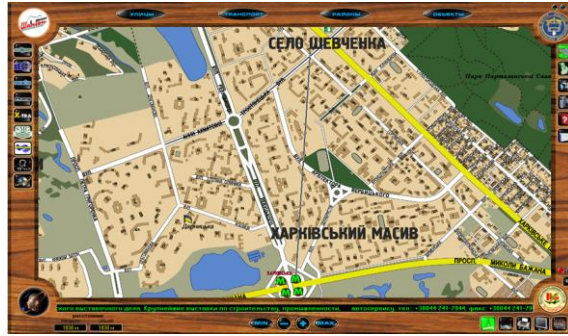
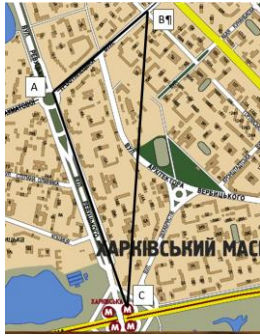
$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Область допустимих значень виразу знаходимо по ходу виконання перетворень.

В усіх прикладах для визначення області визначення виразу використовуємо одиничне тригонометричне коло. Це не випадково, оскільки тему «Тригонометричні рівняння» учні будуть вивчати пізніше, а таке використання є гарною пропедевтикою їх вивчення. На завершення вивчення підтеми пропонуємо обов'язково розглядати прикладні задачі, де тригонометричні вирази служать математичними моделями для їх розв'язування. Це можуть бути задачі з різним сюжетом.

5. Наведемо приклад однієї з них і можливе її розв'язання (геометрія).

Задача. Пішохід знаходиться на розі вулиць Тростянецької та Горлівської (м. Київ). Який шлях він має подолати пішки, якщо йому найшвидше потрібно дістатися до станції метро «Харківська»? Скільки часу він на це витратить, йдучи зі швидкістю 5-6 км/год? Попередньо було з'ясовано (за показниками пристроїв автомобіля), що частина вулиці Тростянецької (між вулицями Горлівською та Ревуцького) має довжину 750-800 м, а частина вулиці Ревуцького (між вулицями Тростянецькою та М. Бажана) має довжину 1400-1450 м.



Коментарі по розв'язанню задачі. Увагу учнів слід зосереджена на вимозі «найшвидше дістатися» до об'єкта, тому наближеною траєкторією руху необхідно обрати пряму. Наближеність траєкторії пов'язана із неможливістю руху крізь будівлі, які мають місце на шляху пішохода.

Аналіз умови задачі, зокрема виділення відомих даних, приводить до створення її математичної моделі (трикутника) та відповідного внутрішньомодельного розв'язування: дві сторони трикутника відомі за умовою ($1,40 \text{ км} \leq AC \leq 1,45 \text{ км}$; $0,75 \text{ км} \leq BC \leq 0,80 \text{ м}$); кут між ними можна виміряти за допомогою транспортира ($\angle C \approx 114^\circ$); а невідому сторону трикутника знайти за теоремою косинусів. Числове значення $\cos C$ є від'ємним. Це створює проблемну ситуацію: відомі учням правила виконання дії другого ступеня стосується лише для додатних чисел. Її виникнення слугує мотивацією для ознайомлення учнів із правилами виконання дій другого ступеня над довільними числами, що відбудеться у курсі алгебри. На даному ж етапі для розв'язання задачі необхідно виконати ряд перетворень:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(180^\circ - \alpha), \text{ де } \angle \alpha \approx 66^\circ$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC \cdot \cos \alpha, \text{ де } 0,3907 < \cos \alpha < 0,4067,$$

$$\text{тоді } \sqrt{1,40^2 + 0,75^2 + 2 \cdot 1,40 \cdot 0,75 \cdot 0,3907} < AB < \sqrt{1,45^2 + 0,80^2 + 2 \cdot 1,45 \cdot 0,80 \cdot 0,4067} \quad 1,828379... < AB < 1,919907...$$

$$\text{Враховуючи, що } t = \frac{S}{v} = \frac{AB}{v}, \text{ а } 5 \text{ км/год} \leq v \leq 6 \text{ км/год, маємо } 0,3047... \text{ год} \leq t \leq 0,3839... \text{ год} \Rightarrow 18 \text{ хв} \leq t \leq 24 \text{ хв}.$$

Відповідь: Пішохід має подолати шлях $1,82\text{-}1,92 \text{ км}$ і витратити для цього $18\text{-}24 \text{ хв}$.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

1. *Єдиний (загальний) підхід вивчення тригонометричних виразів і їх перетворень* має містити такі окремі етапи:

- *підготовчий*, на якому виокремлюються практичні потреби, що спонукали і спонукають людей вивчати такі вирази; описується історія розв'язання проблемних питань зусиллями математиків різних часів; сучасне трактування понять, що підлягають вивченню в курсі алгебри і початків аналізу;

- *базовий*, на якому вивчаються основні тотожності, пов'язані з розглядуваними виразами;

- *практичний*, на якому формулюються вміння і навички виконання перетворень виразів; спрощення, доведення тотожної рівності; обчислення значень виразів для заданих значень змінних;

- *прикладний*, на якому демонструється застосування отриманих знань, вмінь і навичок під час розв'язування прикладних задач, де ці вирази служать для них математичними моделями.

2. Підготовчий етап особливий, важливий, він є першим елементом дидактичного циклу вивчення теми, розкриває потребу вивчення теми, виступає гарним мотиватором здобуття учнями відповідних знань, вмінь і навичок, служить основою для вивчення відповідних функцій, рівнянь і нерівностей.

3. За описаним узагальненим підходом (всі чотири етапи) вивчення тригонометричних виразів і їх перетворень доцільно вивчати *іраціональні, показникові та логарифмічні вирази і їх перетворення*. Зрозуміло, що змістове наповнення кожного з етапів для окремого виду виразів буде іншим, але порядок дій (правило-орієнтир) – однаковим.

4. Для вчителів-практиків, і для студентів-майбутніх вчителів математики використання такого підходу відкриває широкий простір для творчості у навчанні учнів: використання історичних джерел; вибір вдалих (доцільних) методик доведень важливих базових тотожностей; створення добірок цікавих прикладних задач, презентацій; відеороликів; навчальних проєктів тощо.

5. Студенти вишів можуть обирати теми курсових чи дипломних робіт, пов'язаних з вивченням окремих видів виразів і розробляти власні методичні рекомендації щодо їх вивчення на основі узагальненого підходу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Швець, В. О. (2020). Коли і як має формуватися поняття алгебраїчного виразу в курсі алгебри і початків аналізу. *Фізико-математична освіта*, 1(23), 152-156. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2020-023-1-025>.
2. Програми з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. *Сайт МОН України*. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>.
3. Швець, В. О. (2024). Теорія та методика навчання математики в старшій профільній школі: курс лекцій. Київ: Видавництво УДУ імені Михайла Драгоманова. URL: <https://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/46732>.
4. Литвиненко, Г. М., Федченко, Л. Я., & Швець, В. О. (1999). *Збірник задач для екзамену з математики на атестат про середню освіту*. Частина. I. Алгебра та початки аналізу. Частина II: Геометрія. Видання виправл. Харків: БН.
5. Шкіль, М. І., Слєпкань, З.І., & Дубинчук, О. С. (1998). *Алгебра і початки аналізу*. К.: Зодіак-ЕКО.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Shvets, V. O. (2020). Koly i yak maie formuvatsia poniattia algebraichnoho vyrazu v kursi alhebry i pochatkiv analizu [When and how should the concept of algebraic expression be formed in the course of algebra and the beginnings of analysis]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and mathematical education*, 1(23), 152-156. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2020-023-1-025>.
2. Prohramy z matematyky dlia 10-11 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Mathematics programs for grades 10-11 of general education institutions]. *Sait MON Ukrainy – Website of the Ministry of Education and Science of Ukraine*. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>.
3. Shvets, V. O. (2024). Teorii ta metodyka navchannia matematyky v starshii profilnii shkoli: kurs lektsii. [Theory and methods of teaching mathematics in senior specialized schools: a course of lectures]. Kyiv: Vydavnytstvo UDU imeni Mykhaila Drahomanova. URL: <https://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/46732>.
4. Litvinenko, G. M., Fedchenko, L. Ya., & Shvets, V. O. (1999). *Zbirnyk zadach dlia ekzaminu z matematyky na atestat pro seredniu osvitu* [Collection of problems for the mathematics exam for the secondary education certificate]. Part. I. Algebra and the beginnings of analysis. Part II: Geometry. Revised edition. Kharkiv: BBN.
5. Shkil, M. I., Slepkan, Z. I., & Dubinchuk, O. S. (1998). *Algebra i pochatky analizu* [Algebra and the beginnings of analysis]. K.: Zodiak-EKO.

| Матеріал надійшов до редакції: 14.02.2025 р. | Прийнято до друку: 25.03.2025 р. | Опубліковано: 29.04.2025 р. |



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.