Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X
DOI: 10.31110/2413-1571
https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/fmo2024.v39i2-08 УДК 378

МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ У СТУДЕНТІВ ЗАКЛАДІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Олексій ТОМАЩУК ✉
Національний авіаційний університет, Україна
oleksii.tomashchuk@npp.nau.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-5631-3418

Петро САМУСЕНКО
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна
psamusenko@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-4241-6173

Олег ЛЕЩИНСЬКИЙ
Фаховий коледж інженерії, управління та землевпорядкування Національного авіаційного університету, Україна
oleshchinsky17.1@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6005-7779

Людмила ІЛЛІЧЕВА
Національний авіаційний університет, Україна
liudmyla.illicheva@npp.nau.edu.ua
https://orcid.org/0009-0000-5209-6823

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Сучасний розвиток суспільства характеризується широким використанням математичних методів у різних галузях діяльності людини. У зв'язку з цим висуваються підвищені вимоги до математичної підготовки фахівців різних спеціальностей. Важливим компонентом математичної підготовки є володіння студентами понятійним апаратом відповідних математичних дисциплін. Для курсів вищої математики та математичного аналізу ключовим поняттям є поняття границі. Пояснюється це тим, що такі важливі поняття цих дисциплін як границя функції, неперервність функції, похідна функції, різні види інтегралів вводяться, спираючись саме на операцію граничного переходу. Тому успішність оволодіння студентами цими курсами великою мірою визначається тим, наскільки добре вони оволодіють поняттям границі, що актуалізує проблему розробки ефективної методики формування поняття границі послідовності.

Матеріали і методи. Аналіз науково-методичної літератури з проблеми дослідження, підручників і навчальних посібників з вищої математики та математичного аналізу; систематизація й узагальнення вітчизняного і зарубіжного досвіду; узагальнення власного досвіду; порівняльний аналіз ступенів оволодіння студентами поняттям границі послідовності за умов використання різних методів уведення цього поняття (конкретно-індуктивний і абстрактно-дедуктивний методи).

Результати. Розроблено методику формування поняття границі послідовності у студентів закладів вищої освіти. Реалізовано підхід, який ґрунтується на використанні двох означень границі послідовності: мовою околів і мовою «ε-n_0». Причому описано два варіанти: спочатку вводиться поняття границі послідовності мовою «ε-n_0», а потім - мовою околів, і навпаки. Зважаючи на складність формального означення поняття границі послідовності, його введення здійснено конкретно-індуктивним методом. При цьому використано відповідні методи візуалізації, які дозволяють краще оволодіти студентами цим поняттям.

Висновки. Особливостями запропонованої методики введення поняття границі послідовності є те, що припущення, висунуті на основі міркувань наочності, одержують відповідне аналітичне обґрунтування, студенти самостійно приходять до формулювання різних означень границі послідовності. Ця методика передбачає активне включення студентів у процес підведення до поняття границі послідовності та формулювання його означення, що забезпечує свідоме оволодіння ними цим поняттям.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *вища математика; математичний аналіз; границя послідовності; методика формування математичного поняття.*

Для цитування:	Томащук О., Самусенко П., Лещинський О., Іллічева Л. Методика формування поняття границі послідовності у студентів закладів вищої освіти. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 2. С. 60-67. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i2-08
	Томащук, О., Самусенко, П., Лещинський, О., & Іллічева, Л. (2024). Методика формування поняття границі послідовності у студентів закладів вищої освіти. *Фізико-математична освіта*, *39*(2), 60-67. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i2-08
For citation:	Tomashchuk, O., Samusenko, P., Leshchynskii, O., & Illicheva, L. (2024). Methods of forming the concept of sequence limits for students of higher education institutions. *Physical and Mathematical Education*, *39*(2), 60-67. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i2-08
	Tomashchuk, O., Samusenko, P., Leshchynskii, O., & Illicheva, L. (2024). Metodyka formuvannia poniattia hranytsi poslidovnosti u studentiv zakladiv vyshchoi osvity [Methods of forming the concept of sequence limits for students of higher education institutions]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(2), 60-67. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i2-08

✉ Corresponding author

METHODS OF FORMING THE CONCEPT OF SEQUENCE LIMITS FOR STUDENTS OF HIGHER EDUCATION INSTITUTIONS

Oleksii TOMASHCHUK ✉
National Aviation University, Ukraine
oleksii.tomashchuk@npp.nau.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-5631-3418

Petro SAMUSENKO
National Technical University of Ukraine «Ihor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine
psamusenko@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-4241-6173

Oleh LESHCHYNSKII
Professional College of Engineering, Management and Land Management of the National Aviation University, Ukraine
oleshchinsky17.1@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6005-7779

Liudmyla ILLICHEVA
National Aviation University, Ukraine
liudmyla.illicheva@npp.nau.edu.ua
https://orcid.org/0009-0000-5209-6823

ABSTRACT

Formulation of the problem. The modern development of society is characterized by the wide use of mathematical methods in various fields of human activity. In this regard, society needs quality specialists' mathematical training in many specialties. Students' possession of the conceptual apparatus of relevant mathematical disciplines is essential to mathematical training. For courses in higher mathematics and mathematical analysis, the key concept is the concept of limit because by the fact that such fundamental concepts as the limit of a function, the continuity of a function, the derivative of a function, and various types of integrals are introduced based on the operation of the limit transition. Students' success in mastering these courses is primarily determined by how well they master the concept of the limit. It is better to form the concept of a limit using the example of a limit of sequence. Some formal definitions of this concept need to be explained by students. Therefore, the problem of developing an effective method of forming students' concept of the sequence limit becomes urgent.

Materials and methods. Analysis of scientific and methodical literature on the problem of research, textbooks on higher mathematics and mathematical analysis; systematization and generalization of national and foreign experience; generalization of own experience; comparative analysis of students' mastery of the concept of the limit of a sequence under the conditions of using different methods of introducing this concept (concrete-inductive and abstract-deductive methods).

The results. The method of forming the concept of the limit of sequence among students of higher education institutions has been developed. An approach has been implemented based on using two definitions of the limit of the sequence: in the language of neighborhoods and the language «ε-n_0». Moreover, two options are described: first, the concept of the limit of the sequence is introduced in the language «ε-n_0» and then - in the language of neighborhoods, and vice versa. Considering the complexity of the formal definition of the concept of sequence limit, its introduction was carried out using the concrete-inductive method. At the same time, appropriate visualization methods allowed students to master this concept better.

Conclusions. The features of the proposed method of introducing the concept of the sequence limit are that the assumptions put forward based on clarity considerations receive appropriate analytical justification; students independently come to the formulation of different definitions of the sequence limit. This technique involves the active inclusion of students in introducing the concept of sequence limit and formulating its meaning, which ensures their conscious mastery of this concept.

KEYWORDS: *higher mathematics; mathematical analysis; limit of sequence; method of forming a mathematical concept.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасний розвиток суспільства характеризується широким використанням математичних методів у різних галузях діяльності людини. Їх використовують не лише математики, але й IT-спеціалісти, технологи, економісти, психологи, соціологи та ін. У зв'язку з цим висуваються підвищені вимоги до математичної підготовки фахівців різних спеціальностей. Математична підготовка студентів здійснюється в процесі вивчення різних дисциплін: вищої математики, математичного аналізу, алгебри, геометрії тощо. Важливим компонентом цієї підготовки є володіння студентами понятійним апаратом відповідних математичних дисциплін. На жаль, питанням методики введення основних понять різних математичних дисциплін у закладах вищої освіти присвячено надзвичайно мало вітчизняних досліджень і публікацій. Разом з тим для шкільної математики ситуація зовсім інша: розроблені методики формування основних понять, які висвітлені в численних публікаціях. На нашу думку, однією з причин такої ситуації є панування думки про те, що здобувачі вищої освіти вже мають достатній рівень математичної підготовки і розробляти спеціально методики введення певних понять не має сенсу. Насправді ця думка є помилковою. Адже серед математичних понять є значна їх кількість, яка є складною для розуміння більшістю студентами. І до таких понять, зокрема, належить поняття границі. Для курсів вищої математики і математичного аналізу поняття границі є ключовим. Пояснюється це тим, що такі поняття як границя функції, неперервність функції, похідна функції, різні види інтегралів (визначений інтеграл, кратні інтеграли, криволінійні і поверхневі інтеграли) вводяться, спираючись на операцію граничного переходу. Тому успішність оволодіння студентами вищою математикою чи математичним аналізом великою мірою визначається тим, наскільки добре студенти засвоять поняття границі. Формування у студентів поняття границі найпростіше і найефективніше здійснювати на прикладі поняття границі послідовності. Як показує власний досвід викладання у закладах вищої освіти, поняття границі послідовності, будучи найпростішим серед інших понять, що ґрунтуються на операції граничного переходу, в той же час є складним для розуміння його студентами. Цікаво, що студенти можуть легко знаходити границі певних видів послідовностей, не розуміючи при цьому зміст самого означення границі послідовності. У цьому зв'язку актуальною постає проблема розробки ефективної методики формування у студентів поняття границі послідовності.

Аналіз актуальних досліджень. Особливостям введення поняття границі послідовності в шкільному курсі математики присвячені публікації (Музиченко, 2015; Колесник & Тарасенко, 2008). Вартим уваги є наукове дослідження (Босовський, 2010), яке присвячене наступності вивчення теорії границь у школі та закладах вищої освіти. Окремі аспекти, пов'язані з вивченням границь послідовностей у закладах вищої освіти, знайшли відображення в деяких публікаціях. Так, у статті (Рабець, 2008) розкрито особливості формування компетентнісно-світоглядних рис майбутнього вчителя математики під час вивчення теми «Границя послідовності». Автор аналізує підходи до введення поняття границі послідовності, реалізовані в шкільних підручниках. Також описує особливості підходу, запропонованого Г. Михаліним (2003). Цей підхід ґрунтується на понятті «майже рівності». За допомогою цього поняття вдається дуже легко формулювати і доводити властивості границь послідовностей. У статті (Курченко & Рабець, 2007) введено поняття границі послідовності у термінах скінченності: число a називають границею послідовності (a_n), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ поза ε−околом точки a знаходиться не більше, ніж скінченна кількість членів послідовності (a_n). По-суті, це є теж саме означення границі послідовності мовою околів, яке ми розглядатимемо нижче. Автори доводять еквівалентність цього означення і означення мовою «ε-n_0» і далі доводять основні властивості границь, спираючись на введене означення. Зрозуміло, що запропоноване означення є більш простішим для сприйняття студентами, оскільки в ньому присутній лише один квантор загальності на противагу трьом кванторам: загальності, існування і знову загальності, що присутні в означенні мовою «ε-n_0».

У статті (Третяк & Босовський, 2017) представлено авторське бачення змістового наповнення та методики вивчення теми «Границя числової послідовності» в курсі математичного аналізу для студентів математичних спеціальностей. Виклад ведеться у вигляді аргументованих відповідей на ряд традиційних для даної теми питань. Автори притримуються думки, що вивчення теорії границь потрібно розпочинати з вивчення границі послідовності, а потім – границі функції і неперервності. Такий підхід, до речі, реалізується в більшості підручників і навчальних посібників з математичного аналізу. Серед різних означень поняття границі послідовності автори пропонують першим вводити означення мовою околів та достатньо переконливо аргументують це. Сама методика введення поняття границі послідовності в цій публікації не висвітлена.

У статті (Przenioslo, 2005) описано типові помилкові уявлення учнів про зміст поняття границі послідовності. Розглянуто набір спеціально розроблених прикладів, використання яких у процесі навчання дозволяє учням позбутися цих помилкових уявлень і в результаті оволодіти поняття границі послідовності. Весь цей процес відбувається у вигляді навчальної дискусії з елементами створення проблемних ситуацій.

Публікація (Flores & Park, 2016) присвячена переосмиленню студентами поняття границі послідовності за допомогою використання в процесі навчання інтерактивних технологій. На основі спеціально підібраних інтерактивних прикладів студенти, працюючи в невеликих групах, самостійно формулювали тимчасові (нестрогі) означення границі послідовності мовою «ε-n_0», ділилися між собою цими означеннями, в процесі обговорень уточнювали їх. На останньому етапі дослідження студенти змогли сформулювати строге означення цього поняття. Питанню переосмислення студентами поняття границі послідовності присвячене також дослідження (Oehrtman et al., 2014).

Автори статті (Cory & Garofalo, 2011) описують вплив динамічних ескізів, що ілюструють зміст поняття границі послідовності, на зміну уявлень про це поняття у майбутніх вчителів математики. Шляхом виконання спеціально підібраних завдань із залученням динамічних засобів візуалізації учасникам дослідження вдається оволодіти поняттям границі послідовності. У дослідженні (Kyeong, 2008) в якості інструмента, який дозволяє студентам краще зрозуміти зміст поняття границі послідовності, використано так звані «ε-стрічки». Це стрічки прямокутної форми, виготовлені із прозорого паперу, які студенти накладали на графік числової послідовності. За рахунок прозорості паперу вони спостерігали, скільки членів послідовності потрапляли у певний ε-окіл.

Мета статті: висвітлити методику формування поняття границі послідовності у студентів закладів вищої освіти, продемонструвавши всі її складові елементи (зокрема, вказати метод введення поняття; розглянути конкретні приклади, що підводять до введення поняття; послідовно викласти відповідний навчальний матеріалу; розглянути конкретні засоби візуалізації (геометричні ілюстрації і обчислювальні експерименти), що супроводжують введення поняття; продемонструвати можливості використання комп'ютерних технологій; зазначити методи навчання, які доцільно використати для кращого засвоєння поняття студентами).

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Під час підготовки статті були використані такі методи дослідження: аналіз науково-методичної літератури, підручників і навчальних посібників з вищої математики та математичного аналізу; систематизація й узагальнення вітчизняного і зарубіжного досвіду; узагальнення власного досвіду; порівняльний аналіз ступенів оволодіння студентами поняттям границі послідовності за умов використання різних методів уведення цього поняття (конкретно-індуктивний і абстрактно-дедуктивний методи).

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Існують кілька означень поняття границі числової послідовності: на основі поняття нескінченно малої величини, мовою околів, мовою «ε-n_0», на основі поняття часткової границі, аксіоматичне за Фреше. Оскільки більшість формальних означень поняття границі послідовності є складними для розуміння студентами, то їх доцільно вводити конкретно-індуктивним методом. При цьому необхідно розглянути достатню кількість відповідних геометричних ілюстрацій. У запропонованому дослідженні пропонується методика формування поняття границі послідовності, що ґрунтується на використанні двох означень: мовою околів і мовою «ε-n_0». Послідовність ознайомлення студентів з цими означеннями може бути різною. Розглянемо варіант, коли спочатку буде введено поняття границі послідовності мовою «ε-n_0», а потім – мовою околів.

Введення поняття границі послідовності конкретно-індуктивним методом передбачає розгляд прикладів кількох послідовностей. Наприклад, можна вибрати такі послідовності:

(x_n): 2, 4, 6, ..., 2n, ...

(y_n): 1, 1/2, 1/3, ..., 1/n, ...

(z_n): 1, 3/2, 5/3, ..., (2n-1)/n, ...

(g_n): –1, 1, –1, 1, ... $(–1)^n$, ...

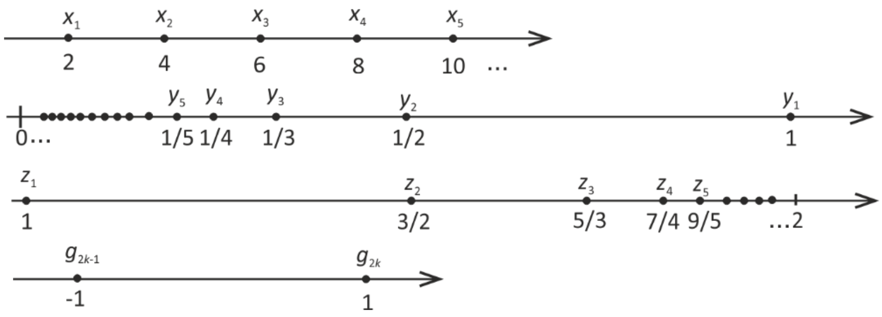

Рис. 1. Приклади послідовностей із зображеннями їхніх членів на числовій прямій

Джерело: авторська розробка.

Зобразивши члени цих послідовностей на координатних прямих, потрібно звернути увагу студентів на послідовності (y_n) і (z_n) та запропонувати їм виявити ту властивість, яка притаманна цим послідовностям, і яку не мають послідовності (x_n) і (g_n). Керуючись ілюстраціями, студенти помічають ту особливість, що члени послідовності (y_n) із зростанням їх номерів все ближче і ближче наближаються до числа 0, а члени послідовності (z_n) – до числа 2. У зв'язку з цим необхідно наголосити на необхідності «переведення» виявленої властивості послідовностей (y_n) і (z_n) на математичну мову, тобто на необхідності сформулювати строге означення границі послідовності.

У подальших викладках доцільно перейти до розгляду лише однієї послідовності, наприклад, (y_n). Те, що зі зростанням номерів члени цієї послідовності все ближче і ближче наближаються до числа 0 означає, що відстань від y_n до 0 стає все меншою, тобто зі зростанням номерів значення виразу $|y_n–0|$ стає все меншим. Тому це значення може бути меншим, наприклад, за ε=0,1, ε=0,01. З'ясуємо, якими повинні бути номери членів послідовності (y_n), щоб виконувалася нерівність $|y_n–0|<0{,}1$. Для цього розв'яжемо нерівність $|y_n–0|<0{,}1$: $\left|\frac{1}{n}-0\right|<0{,}1 \Leftrightarrow n>10$. Отже, якщо взяти n_0=10, то для всіх $n>n_0$=10 виконуватиметься нерівність $|y_n–0|<0{,}1$, тобто нерівність $|y_n–0|<0{,}1$ є правильною для всіх членів послідовності (y_n), номери n яких є більшими за 10. Цей факт доцільно проілюструвати графічно (див. рисунок 2), попередньо зробивши перетворення: $|y_n–0|<0{,}1 \Leftrightarrow –0{,}1<y_n<0{,}1$ для всіх $n>$ 10. Тобто починаючи із номера 11, члени послідовності (y_n) потрапляють у смугу, обмежену двома прямими y=–0,1 і y=0,1. Зазначені обчислення та графічна ілюстрація здійснені за допомогою табличного процесора Microsoft Excel. Зручність полягає в тому, що саме за допомогою цього процесора можна швидко здійснити необхідні обчислення та виконати рисунок. Зрозуміло, що такі дії повинні бути зроблені завчасно і на лекції їхній результат можна продемонструвати у вигляді презентації.

Далі потрібно перед студентами поставити запитання: чи для будь-якого $\varepsilon>0$ існуватиме номер n_0 такий, що для всіх $n>n_0$ виконуватиметься нерівність $|y_n–0|<\varepsilon$? Щоб це з'ясувати, розв'яжемо останню нерівність:

$$|y_n–0|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Необхідно наголосити студентам, що число $\frac{1}{\varepsilon}$, взагалі кажучи, не є натуральним, тобто не є «номером». Тому за номер n_0 потрібно взяти його цілу частину, тобто покласти $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тоді для всіх $n>n_0$ буде справедливою нерівність $|y_n–0|<\varepsilon$. Наприклад, якщо ε=0,06, то $n_0=\left[\frac{1}{0{,}06}\right]$=[16,666…]=16. Тобто для всіх $n>n_0$=16 матимемо: $|y_n–0|<0{,}06 \Leftrightarrow –0{,}06<y_n<0{,}06$. Цей факт можна продемонструвати на рисунку 2: починаючи із номера 17 члени послідовності (y_n) потрапляють у смугу, обмежену двома прямими y=–0,06 і y=0,06. Якщо ε=0,0001, то $n_0=\left[\frac{1}{0{,}0001}\right]$=[10000] =10000. Тобто для всіх $n>n_0$=10000 матиме місце нерівність $|y_n–0|<0{,}0001$. Студенти помічають, що чим менше ε ми беремо, тим більшим є номер n, починаючи з якого виконується нерівність $|y_n–0|<\varepsilon$. Тому n_0 залежить від ε, у зв'язку з чим його позначають $n_0(\varepsilon)$.

Підводячи підсумок, потрібно наголосити, що яке б число $\varepsilon>0$ не брали, обов'язково знайдеться номер $n_0(\varepsilon)$ (в даному випадку це число $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$) такий, що для всіх $n>n_0(\varepsilon)$ справджуватиметься нерівність $|y_n–0|<\varepsilon$. Зазначити студентам, що у цьому випадку число 0 називають границею послідовності (y_n)= $\left(\frac{1}{n}\right)$ і записують $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ або $\frac{1}{n}\to 0$ ($n\to\infty$).

n	y_n	$\lvert y_n - 0\rvert$
1	1	1
2	0.5	0.5
3	0.333333	0.333333
4	0.25	0.25
5	0.2	0.2
6	0.166667	0.166667
7	0.142857	0.142857
8	0.125	0.125
9	0.111111	0.111111
10	0.1	0.1
11	0.090909	0.090909
12	0.083333	0.083333
13	0.076923	0.076923
14	0.071429	0.071429
15	0.066667	0.066667
16	0.0625	0.0625
17	0.058824	0.058824
18	0.055556	0.055556
19	0.052632	0.052632
20	0.05	0.05
21	0.047619	0.047619
22	0.045455	0.045455
23	0.043478	0.043478
24	0.041667	0.041667
25	0.04	0.04
26	0.038462	0.038462
27	0.037037	0.037037
28	0.035714	0.035714
29	0.034483	0.034483
30	0.033333	0.033333

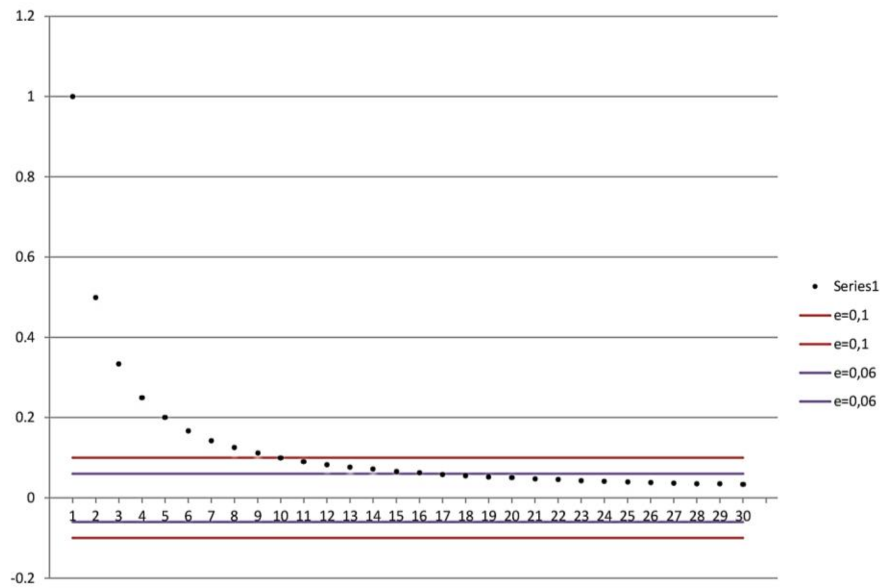

Рис. 2. Таблиця Microsoft Excel з обчисленнями та графічною ілюстрацією

Джерело: виконано з використанням табличного процесора Microsoft Excel.

Проведені міркування дозволять студентам самостійно або за допомогою викладача сформулювати таке означення:

Означення 1 (границі послідовності мовою «ε-n_0»). Число a називають границею послідовності (y_n), якщо для будь-якого ε>0 існує номер n_0(ε) такий, що для всіх $n>n_0$(ε) виконується нерівність $\lvert y_n - a\rvert<\varepsilon$. При цьому позначають $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ або $y_n\to a$ ($n\to\infty$). Після цього можна ввести символічний запис означення 1:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\, n_0(\varepsilon):\ \lvert y_n - a\rvert<\varepsilon\ \ \forall n>n_0(\varepsilon).$$

Далі потрібно розглянути, наприклад, таке завдання: «Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2+1}{3n^2+n}=2$. Розв'язання цього завдання доцільно супроводити обчислювальним експериментом та відповідним рисунком, виконаними за допомогою табличного процесора Microsoft Exel.

На практичних заняттях з метою кращого розуміння означення границі послідовності мовою «ε-n_0» потрібно розв'язати кілька завдань такого типу: «довести, що число a є границею послідовності (y_n)». Аналізуючи розв'язання цих завдань, необхідно разом із студентами скласти правило-орієнтир розв'язування завдань такого типу:

1) вибирають довільне фіксоване ε>0;

2) нерівність $\lvert y_n - a\rvert<\varepsilon$ розв'язують відносно n, в результаті чого одержують нерівність $n>\varphi(\varepsilon)$, з якої випливає нерівність $\lvert y_n - a\rvert<\varepsilon$ ($\varphi(\varepsilon)$ – деякий вираз, залежний від ε);

3) за n_0(ε) вибирають цілу частину $\varphi(\varepsilon)$, коли $\varphi(\varepsilon)>0$, тобто $n_0(\varepsilon)=[\varphi(\varepsilon)]$, коли $\varphi(\varepsilon)>0$, і 1 або будь-яке інше натуральне число, коли $\varphi(\varepsilon)\le 0$. У будь-якому з цих випадків маємо, що для всіх $n>n_0$(ε) справджується нерівність $\lvert y_n - a\rvert<\varepsilon$, а тому внаслідок довільності ε за означенням границі послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Деякі моменти потрібно обґрунтувати. Наприклад, чому у випадку, коли $\varphi(\varepsilon)\le 0$, за n_0(ε) можна взяти будь-яке натуральне число. Крім того, студентам потрібно зазначити, що у більшості випадків розв'язування нерівності $\lvert y_n - a\rvert<\varepsilon$ відносно n викликає значні труднощі, а інколи цю нерівність взагалі неможливо розв'язати відносно n. Тому доводиться застосовувати так звану операцію «підсилення нерівності». Саме цей момент («підсилення нерівності») досить часто є незрозумілим багатьом студентам, що вимагає проведення відповідних додаткових пояснень.

Для закріплення поняття границі послідовності не варто обмежуватися розглядом завдань лише вказаного типу. Для кращого розуміння означення цього поняття корисними можуть бути завдання такого типу: «Використовуючи означення границі послідовності, довести, що число a не є границею послідовності (y_n)».

Спираючись на означення границі послідовності мовою «ε-n_0», потрібно розкрити студентам суть поняття границі послідовності: *число а є границею послідовності* (y_n), *якщо її члени як завгодно мало відрізняються від а (майже дорівнюють числу а) при досить великих номерах n цих членів, тобто $y_n\approx a$, коли $n\approx\infty$.* При цьому також наголосити, що наведене вище означення 1 на практиці використовують для доведення того, що певна послідовність (y_n) має (не має) границею число a. Якщо ж стоїть завдання знайти границю послідовності, то використовують саме суть поняття границі послідовності. Далі навести кілька прикладів.

Приклади. Знайти границю послідовності: а) $\left(\frac{2}{n^3}\right)$; б) $\left(\frac{2n-1}{n}\right)$; в) ($-5n$).

Розв'язання. Використаємо суть поняття границі послідовності.

а) Якщо $n\approx\infty$, то $n^3\approx+\infty$, а тому $\frac{2}{n^3}\approx 0$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}=0$.

б) $\frac{2n-1}{n}=2-\frac{1}{n}$. Якщо $n\approx\infty$, то $\frac{1}{n}\approx 0$, а тому $2-\frac{1}{n}\approx 2$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2$.

в) Якщо $n\approx\infty$, то $5n\approx+\infty$ і $-5n\approx-\infty$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-5n\right)=-\infty$.

Далі потрібно перейти до введення означення границі послідовності мовою околів, сформулювавши попередньо такі означення:

Означення 2 (околу скінченної точки). Околом скінченної точки a називають будь-який інтервал, що містить цю точку.

Означення 3 (ε-околу скінченної точки). ε-околом скінченної точки a називають інтервал ($a-\varepsilon$; $a+\varepsilon$).

Означення 4 (плюс нескінченно віддаленої точки). Плюс нескінченно віддаленою точкою (позначають $+\infty$) називають таку точку числової прямої, що $x<+\infty$ для всіх дійсних чисел x.

Означення 5 (мінус нескінченно віддаленої точки). Мінус нескінченно віддаленою точкою (позначають $-\infty$) називають таку точку числової прямої, що $x>-\infty$ для всіх дійсних чисел x.

Означення 6 (околу плюс (мінус) нескінченно віддаленої точки). Околом плюс (мінус) нескінченно віддаленої точки називають інтервал (b; $+\infty$) (($-\infty$; b)), де b – довільне дійсне число.

Наведені означення обов'язково супроводити відповідними прикладами та геометричними ілюстраціями.

Повернемося до означення границі функції мовою «ε-n_0»:

$$\left|y_n-a\right|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<y_n-a<\varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon.$$

Отже, $a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon\ \forall n>n_0(\varepsilon)$, тобто члени послідовності y_n, номери яких є більшими за $n_0(\varepsilon)$, потрапляють в ε-окіл точки a. Причому це справедливо для всіх $\varepsilon>0$. Цей факт продемонструвати на рисунку:

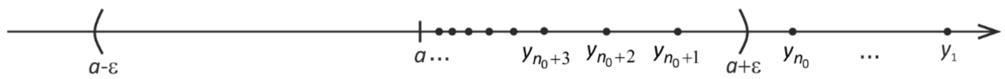

Рис. 3. Ілюстрація потрапляння членів послідовності y_n, номери яких є більшими за n_0, в ε-окіл точки a

Джерело: авторська розробка.

На основі проведених міркувань студенти самостійно або за допомогою викладача зможуть сформулювати таке означення:

Означення 7 (границі послідовності мовою околів). Число a називають границею послідовності (y_n), якщо в будь-якому околі точки a містяться всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера, тобто в будь-якому околі точки a міститься нескінченна кількість членів послідовності (y_n), а за межами кожного такого околу знаходиться не більше, ніж скінченна їх кількість. (Під поняттям «не більше, ніж скінченна кількість членів» розуміють скінченну кількість членів або жодного члена).

Потрібно наголосити студентам, що в означенні поняття границі послідовності мовою околів число a може бути як скінченним, так і нескінченно віддаленим.

Разом зі студентами встановити, за яких умов певне число a не буде границею послідовності (y_n): якщо існує окіл точки a, за межами якого знаходиться нескінченна кількість членів послідовності (y_n).

На основі означення 7 студенти відразу ж зможуть встановити, що $+\infty$ є границею послідовності (x_n)=($2n$). Також зможуть легко довести, що послідовність (g_n) =($(-1)^n$) не має границі (яке б число a не взяли, завжди можна вказати окіл точки a, за межами якого буде знаходитися нескінченна кількість членів послідовності (g_n)). Зокрема, якщо $a=1$, то взявши ε-окіл такий, що $\varepsilon=0,5$, за межами цього околу знаходитимуться всі члени послідовності з непарними номерами, а їх є нескінченна кількість. Якщо $a=-1$, то взявши ε-окіл такий, що $\varepsilon=0,5$, за межами цього околу знаходитимуться всі члени послідовності з парними номерами, а їх також є нескінченна кількість. Тому ні $a=1$, ні $a=-1$ не можуть бути границею послідовності (g_n). Аналогічно можна довести, що будь-яке інше дійсне число не може бути границею послідовності (g_n).

Якщо реалізовувати варіант: спочатку вводиться означення границі послідовності мовою околів, а потім –мовою «ε-n_0», то послідовність викладення матеріалу може бути такою:

1. Сформулювати означення 2-6.
2. Розглянути приклад послідовності (y_n)=$\left(\frac{1}{n}\right)$ та зробити відповідну геометричну ілюстрацію. Зобразивши на рисунку кілька ε-околів точки 0, вибираючи при цьому все менші і менші значення ε, студенти помічають таку властивість послідовності (y_n): у кожному із зображених околів міститься нескінченна кількість членів послідовності (y_n) (це всі її члени, починаючи з деякого номера n_0), а за межами кожного околу знаходиться скінченна кількість її членів. Крім того, очевидним для них є і той факт, що номер n_0 залежить від вибраного числа ε (чим менше ε вибирають, тим більшим є номер n_0, починаючи з якого всі члени послідовності (y_n) потрапляють у відповідний ε-окіл точки 0).
3. Сформулювати означення поняття границі послідовності мовою околів (означення 7).

4. Пояснити, що умову: у будь-якому ε-околі точки a містять всі члени з номерами n, що є більшими за $n_0(\varepsilon)$, аналітично можна записати так:

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon\ \forall n>n_0(\varepsilon) \Leftrightarrow -\varepsilon<y_n-a<\varepsilon\ \forall n>n_0(\varepsilon) \Leftrightarrow |y_n-a|<\varepsilon\ \forall n>n_0(\varepsilon).$$

Після цього сформулювати означення поняття границі послідовності мовою «ε-n_0».

Далі доцільно ознайомити студентів з поняттями збіжної і розбіжної послідовностей. Це можна зробити так. Студентам зазначити, що розглянуті приклади послідовностей підтверджують, що деякі послідовності можуть мати скінченні границі, деякі – нескінченні, а деякі взагалі не мати границі. Якщо границею послідовності є скінченне число, то її називають *збіжною* (наприклад, послідовності $(y_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ і $(z_n)=\left(\frac{2n-1}{n}\right)$ є збіжними, оскільки їхніми границями є відповідно числа 0 і 2). Послідовність, яка не є збіжною, називають *розбіжною* (наприклад, $(x_n)=(2n)$ і $(g_n)=((-1)^n)$). Доцільно буде разом зі студентами встановити співвідношення між збіжними, розбіжними послідовностями та послідовностями, що мають і не мають границі, та проілюструвати ці співвідношення, наприклад, такою схемою (рис. 4):

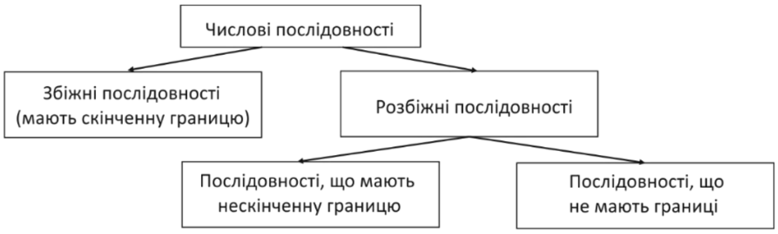

Рис. 4. Співвідношення між різними видами числових послідовностей

Джерело: авторська розробка.

Викладення навчального матеріалу здійснюється шляхом використання різних методів навчання. Постає запитання: які методи доцільно використати в процесі введення поняття границі послідовності, щоб мати найкращий результат? Зрозуміло, що навчальний матеріал студенти засвоюють краще, коли викладач використовує активні методи навчання. Це призводить до активізації пізнавальної діяльності студентів, результатом якої є краще засвоєння матеріалу. До активних методів навчання відносять, зокрема, методи проблемного навчання: метод проблемного викладення навчального матеріалу, частково-пошуковий (евристичний) метод, однією з форм якого є евристична бесіда, та дослідницький метод. На лекціях доцільно використовувати метод проблемного викладення навчального матеріалу, іноді – частково-пошуковий метод. На практичних заняттях повинні переважати частково-пошуковий метод і евристична бесіда, під час проведення самостійних і контрольних робіт повинен використовуватися дослідницький метод. Також важливим методом, використання якого дозволяє краще зрозуміти навчальний матеріал, зміст понять, що вводяться, є наочний метод. Наведена вище методика реалізована саме з використанням цих методів.

ВИСНОВКИ

Особливостями запропонованої методики формування поняття границі послідовності є те, що припущення, висунуті на основі міркувань наочності, одержують відповідне аналітичне обґрунтування, студенти самостійно приходять до формулювання різних означень поняття границі послідовності. Ця методика передбачає активне включення студентів у процес підведення до поняття та формулювання його означень, що забезпечує свідоме оволодіння ними цим поняттям.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Босовський, М. В. (2010). *Наступність у вивченні теорії границь у загальноосвітніх та вищих навчальних закладах.* Дис. канд. пед. наук, Черкаський національний університет імені Б. Хмельницького.
2. Колесник, Т.В., & Тарасенко О.В. (2008). Особливості введення поняття границі у шкільному курсі математики. *Математика в школі*, 5, 34-39.
3. Курченко, О.О., & Рабець, К.В. (2007). Границя послідовності мовою скінченності (альтернативний підхід до вивчення теми). *Науковий часопис НПУ ім. М. Драгоманова*, 3 (3), 47-53. https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/6671/Kurchenko.pdf.
4. Михалін, Г.О. (2003). *Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу*. РННЦ «ДІНІТ».
5. Музиченко, С.В. (2015). Деякі методичні особливості формування у старшокласників поняття границі**.** *Актуальні питання природничо-математичної освіти*, 5-6, 18-24. https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/6529/1/Muzichenko%20S.%20S.pdf.
6. Рабець, К.В. (2008). Формування компетентнісно-світоглядних рис майбутнього вчителя при вивченні теми «Границя послідовності». *Інновації в навчанні фізиці та дисциплін технологічної освітньої галузі: міжнародний та вітчизняний досвід*, 14, 96-99.
7. Третяк, М.В., & Босовський, М.В. (2017). Деякі роздуми про вивчення границі числової послідовності. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*, 135, 14-17. https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/557428.pdf.
8. Cory,B.L., & Garofalo, J. (2011). Using Dynamic Sketches to Enhance Preservice Secondary Mathematics Teachers' Understanding of Limits of Sequences. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(1), 65-96.
9. Flores, A., & Park, J. (2016). Students' Guided Reinvention of Definition of Limit of a Sequence With Interactive Technology. *Contemporary Issues in Technology & Teacher Education*, 16(2), 110-126.
10. Kyeong, H.R. (2008). Students' Images and Their Understanding of Definitions of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69(3), 217-233. https://www.jstor.org/stable/40284547.
11. Oehrtman, M., Swinyard, C., & Martin, J. (2014). Problems and solutions in students' reinvention of a definition for sequence convergence. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 131-148. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.11.006.

12. Przenioslo, M. (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 71-93. https://www.jstor.org/stable/25047181.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bosovskyi, M. V. (2010). *Nastupnist u vyvchenni teorii hranyts u zahalnoosvitnikh ta vyshchykh navchalnykh zakladakh [Continuity in the study of the theory of boundaries in general education and higher educational institutions].* Dys. kand. ped. nauk, Cherkaskyi natsionalnyi universytet imeni B. Khmelnytskoho. (in Ukrainian).
2. Kolesnyk, T.V., & Tarasenko O.V. (2008). Osoblyvosti vvedennia poniattia hranytsi u shkilnomu kursi matematyky [Peculiarities of the introduction of the concept of limit in the school mathematics course]. *Matematyka v shkoli – Mathematics at school*, 5, 34-39 (in Ukrainian).
3. Kurchenko, O.O., & Rabets, K.V. (2007). Hranytsia poslidovnosti movoiu skinchennosti (alternatyvnyi pidkhid do vyvchennia temy) [The limit of a sequence in the language of finiteness (an alternative approach to studying the topic)]. *Naukovyi chasopys NPU im. M. Drahomanova – Scientific journal of the NPU named after M. Drahomanova*, 3 (3), 47-53. https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/6671/Kurchenko.pdf. (in Ukrainian).
4. Mykhalin, H.O. (2003). *Profesiina pidhotovka vchytelia matematyky u protsesi navchannia matematychnoho analizu [Professional training of a mathematics teacher in the process of teaching mathematical analysis].* RNNTS «DINIT» (in Ukrainian).
5. Muzychenko, S.V. (2015). Deiaki metodychni osoblyvosti formuvannia u starshoklasnykiv poniattia hranytsi [Some methodological features of the formation of the concept of border in high school students]. *Aktualni pytannia pryrodnycho-matematychnoi osvity – Current issues of science and mathematics education*, 5-6, 18-24. https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/6529/1/Muzichenko%20S.%20S.pdf. (in Ukrainian).
6. Rabets, K.V. (2008). Formuvannia kompetentnisno-svitohliadnykh rys maibutnoho vchytelia pry vyvchenni temy «Hranytsia poslidovnosti» [The formation of competence and worldview features of the future teacher when studying the topic «Sequence limit»]. *Innovatsii v navchanni fizytsi ta dystsyplin tekhnolohichnoi osvitnoi haluzi: mizhnarodnyi ta vitchyznianyi dosvid – Innovations in the teaching of physics and disciplines of the technological educational field: international and domestic experience*, 14, 96-99 (in Ukrainian).
7. Tretiak, M.V., & Bosovskyi, M.V. (2017). Deiaki rozdumy pro vyvchennia hranytsi chyslovoi poslidovnosti [Some reflections on the study of the limit of a numerical sequence]. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*, (135), 14-17. https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/557428.pdf. (in Hungary).
8. Cory,B.L., & Garofalo, J. (2011). Using Dynamic Sketches to Enhance Preservice Secondary Mathematics Teachers' Understanding of Limits of Sequences. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(1), 65-96.
9. Flores, A., & Park, J. (2016). Students' Guided Reinvention of Definition of Limitof a Sequence With Interactive Technology. *Contemporary Issues in Technology & Teacher Education*, 16(2), 110-126.
10. Kyeong, H.R. (2008). Students' Images and Their Understanding of Definitions of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69(3), 217-233. https://www.jstor.org/stable/40284547.
11. Oehrtman, M., Swinyard, C., & Martin, J. (2014). Problems and solutions in students' reinvention of a definition for sequence convergence. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 131-148. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.11.006.
12. Przenioslo, M. (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 71-93. https://www.jstor.org/stable/25047181.

Матеріал надійшов до редакції 26.01.2024р.