Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

https://fmo-journal.org/

Філер З.Ю., Чуйков А.С. Методика пошуку комплексних розв'язків нерівностей способом нев'язки. Фізико-математична освіта, 2021. Випуск 5(31). С. 73-78.

Filer Z., Chuikov A. Method of searching complex solutions of inequalities by the deflection method. Physical and Mathematical Education, 2021. Issue 5(31). P. 73-78.

DOI 10.31110/2413-1571-2021-031-5-011
УДК 517.165

З.Ю. Філер
Національний авіаційний університет, Україна
zalmenfilier3319@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0804-6794
А.С. Чуйков
Національний авіаційний університет, Україна
chyikov.artem@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0945-0396

МЕТОДИКА ПОШУКУ КОМПЛЕКСНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕРІВНОСТЕЙ СПОСОБОМ НЕВ'ЯЗКИ

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Традиційно у школі розглядають нерівності у множині дійсних чисел. Розв'язуючи нерівності із невідомим, обмежуються відшуканням області, у якій виконується вимога більше (менше). Між іншим, у низці задач важливо на скільки відрізняються величини. При цьому виявляються і комплексні розв'язки при дійсній нев'язці.*

Матеріали і методи. *У статті використані методи математичного аналізу та теорії функцій комплексної змінної, а також аналіз і моделювання – для розробки алгоритмів графічного подання результатів у системі комп'ютерної математики Maple.*

Результати. *Запропоновано використовувати комплексну нев'язку $r = s + it$, де $s > 0$ або $s = 0$ і $t > 0$, яка дає комплексні розв'язки нерівностей. Множиною усіх розв'язків нерівності, отриманих методом комплексної нев'язки, є двовимірна область. Причому, нерівності з протилежними знаками мають розв'язки, які взаємно доповнюють один одного до комплексної площини. Показано приклади застосування методу комплексної нев'язки для розв'язування квадратних, раціональних та інших нерівностей. Продемонстровано застосування системи комп'ютерної математики Maple 17 для графічної побудови області-розв'язків нерівностей.*

Висновки. *Поданий матеріал може бути корисний вчителям, викладачам закладів фахової передвищої та вищої освіти при вивченні теми «Комплексні числа». Нерівності у комплексній множині розглядалися епізодично, наприклад, при доведенні леми Д'Аламбера про значення модуля комплексного аргументу в сусідніх точках в околі точки, де він не дорівнює нулю. Ці нерівності можна використати для пошуку коренів комплексних функцій. Подальші наукові дослідження у цьому напрямку полягають у систематизації та класифікації нерівностей та методів їх розв'язання у комплексній площині.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *метод нев'язки, комплексна нев'язка, комплексні розв'язки, Maple 17.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Ще у молодших класах діти знайомляться з поняттям нерівності на прикладах типу 3<5, розуміючи, що 5 більше 3 на 2. При цьому виробляється поняття порядку серед чисел і нев'язки (відхилення) між ними. У середніх і старших класах розглядаються лінійні і квадратні нерівності зі змінними, виробляється звичка бачити у розв'язанні інтервали і пошук розв'язків зводиться до відшукання кінців цих інтервалів. Між тим, втрачається уявлення про множину точок, які входять у множину розв'язків, і втрачається уявлення про залежності величини відхилення (нев'язки) від положення шуканої величини. Природна відмінність у часі для розв'язування рівнянь і нерівностей приводить до більшої кількості помилок при відшуканні розв'язків нерівностей, ніж коренів рівнянь, через множення на вираз, який містить невідому. Метод нев'язки, зводячи нерівності до рівнянь з параметром, усуває ці помилки і дає залежність коренів від цього параметра.

Аналіз статей показує піонерський характер наших робіт в цьому напрямку, не враховуючи роботи О.В. Кужеля.

Мета статті полягає в обґрунтуванні доцільності використання методу комплексної нев'язки для розв'язування нерівностей у комплексній області.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У статті використані методи математичного аналізу та теорії функції комплексної змінної, а також аналіз і моделювання – для розробки алгоритмів графічного подання результатів у системі комп'ютерної математики Maple.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метод дійсної нев'язки полягає в тому, що нерівність $f(x)<0$ замінюється рівнянням $f(x)+r=0$, де нев'язка $r>0$ – величина відхилення лівої частини нерівності від правої (Філер, 2014). Аналогічно, нерівність $f(x)>0$ замінюється рівнянням $f(x)=r,\ r>0.$ Така заміна дає можливість знаходити к дійсні, так і комплексні розв'язки $x(r)=a(r)+ib(r)$ при $r>0.$ Наприклад, нерівність $\frac{1}{x}<1$ замінюється рівнянням $\frac{1}{x}+r=1$ з додатним параметром *r*. Розв'язуючи це рівняння відносно *x* отримуємо $x=\frac{1}{1-r},\ r>0, r\neq 1.$ Звісно, зазвичай для розв'язування такої нерівності використовують метод інтервалів або перехід до сукупності систем нерівностей в залежності від знаків чисельника і знаменника. Відповіддю буде сукупність відкритих півінтервалів $(-\infty;0)\cup(1;\infty).$ Але це буде відповіддю на питання «*де?*», але на питання «*на скільки менше?*» цей розв'язок не відповідає. Нев'язка $r(x)=1-\frac{1}{x}$ разом з множиною розв'язків нерівності дають відповіді на ці два питання.

Розв'яжемо цим методом нерівність $x^2+2x+2<0.$ Він дає рівняння $x^2+2x+2+r=0$, де нев'язка $r>0.$ Розв'язуючи його, отримаємо множину комплексних розв'язків нерівності: $x=-1\pm i\sqrt{1+r}$, $r>0$ (рис. 1).

На цьому прикладі легко бачити, що сукупність розв'язків двох протилежних нерівностей $f(x)<0$ і $f(x)>0$ та коренів рівняння $f(x)=0$, отриманих методом дійсної нев'язки, не заповнює усю комплексну площину. Тоді прийшла думка розглянути комплексну нев'язку $r = s + it$ з дійсними додатними *s* і *t*.

Таким чином, виникає необхідність введення *порядку* в область комплексних чисел. Такий же порядок, як у бібліографії: слова пишуться у порядку А, Б і т. д. Але якщо перші літері однакові, то порядок встановлюється по другій літері. Або як білети і місця у театрі: якщо номери рядів різні, то номери білетів порівнюються за номерами рядів; для одного і того ж ряду номер встановлюється по місцю. Одне із таких впорядкувань наведено у книзі О.В. Кужеля (Кужель, 1974): $a+bi<c+di \Leftrightarrow a<c$ або $a=c$ і $b<d.$ Він навіть запропонував читачу розв'язати лінійну нерівність з комплексними коефіцієнтами, не вказавши методу і відповіді.

Вибравши $r = s + it$, де $s>0$ або $s=0$ *і* $t>0$ отримаємо, для вже розглянутої нерівності, рівняння $x^2+2x+2+s+it=0$. Зробивши заміну $x:=x+iy$, отримаємо систему $(x+1)^2-y^2=-(1+s),\ 2y(x+1)+t=0.$ Перше рівняння дає гіперболи з вершинами у точках $(-1;\sqrt{1+s})$ і $(-1;-\sqrt{1+s})$ та асимптотами $y=x+1$ і $y=-x-1$ (рис. 2). Гіперболи покривають усю область, утворену *граничною* гіперболою $y^2-(x+1)^2=1$ при $s=0$.

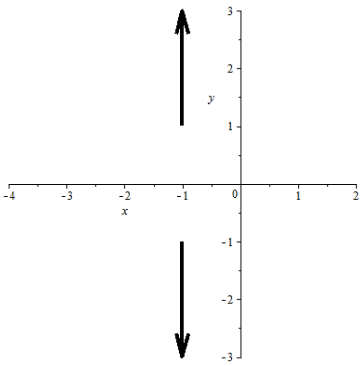

Рис. 1. Комплексні розв'язки нерівності $x^2+2x+2<0$

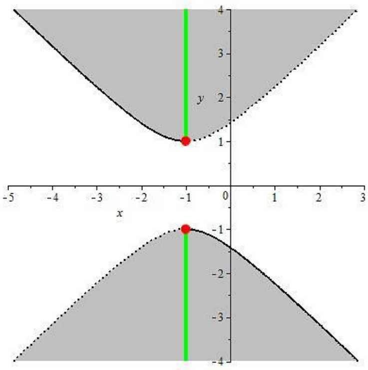

Рис. 2. Розв'язування нерівностей методом комплексного *r*

У низці пакетів типу Maple, Wolfram Mathematica передбачена можливість побудови графіків нерівностей $\mathrm{Re}(f(x+iy))<0$. Вона дає розв'язок нерівності $f(x+iy)<0$, але без границі. Границю дає розв'язок другої нерівності з врахуванням знаку *t*. Із нього отримуємо $y(x+1)=-t/2$, тобто знаки *y* і *x* + 1 протилежні. Отже, зліва від прямої $x+1=0$ $y>0$, справа від неї $y<0$. Інша частина граничної гіперболи приєднуються до розв'язків протилежної нерівності $x^2+2x+2>0.$ На рис. 2 сірий колір позначає розв'язки нерівності $x^2+2x+2<0$ методом комплексної нев'язки; чорна лінія – границя цієї області; зелений колір – розв'язки, отримані методом дійсної нев'язки; червоні точки – корені рівняння $x^2+2x+2=0$. Розв'язок нерівності $x^2+2x+2>0$ – біле поле на цьому рисунку з залишками границі між сірою та білою частинами.

Покажемо розв'язки нерівності $\frac{1}{x}<1$ методом комплексної нев'язки. Вона зводиться до рівняння $\frac{1}{x+iy}+s+it=1$, $\frac{x-iy}{x^2+y^2}+s+it=1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}+s=1$, $\frac{-y}{x^2+y^2}+t=0$. Перше рівняння дає кола $x^2+y^2+\frac{x}{1-s}=0$ радіусів $r=\frac{1}{2(1-s)}$ з центром в точці $(r;\,0)$. При $s<0$ кола дотикаються прямої зліва від прямої $x=0$, при $s>1$ – справа. При $s\to 1$ дуги кіл прямують до осі OY. При s=0 отримаємо $r=\frac{1}{2}$ – границю області розв'язків. За допомогою системи комп'ютерної математики Maple 17 отримано рис. 3. Друге рівняння системи означає, що знак на границі співпадає зі знаком *t*, тобто області розв'язків належить верхнє півколо. Протилежна нерівність $\frac{1}{x}>1$ буде виконуватись в самому крузі з нижнім півколом.

ОБГОВОРЕННЯ

Наведемо приклади графічного зображення комплексних розв'язків нерівностей. Для побудови області в системі комп'ютерної математики Maple 17 застосовуємо команду **piecewise** (Дрозденко, 2019), яка задає характеристичну функцію двох змінних: у точках, які задовольняють нерівність $\mathrm{Re}(f)<\mathrm{Re}(g)$ вона прийматиме значення 1 та –1 у іншому випадку. Далі застосовуємо команду **implicitplot** для побудови графіка неявно заданої функції, виділяючи ту частину області, де побудована функція додатна. Далі потрібно дослідити зміну знака уявної частини на лінії, яка визначає зміну знака дійсної частини нерівності.

Покажемо алгоритм такої побудови у Maple 17 на прикладі рис. 4. Спочатку підключаємо пакет для побудови графіків:

$with(plots)$:

Далі вводимо характеристичну функцію:

$$f := (x,y) \to piecewise\left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{(x+I\cdot y)^2}\right) < \mathrm{Re}(x+I\cdot y),\, 1, -1\right)$$

Задаємо виділення тієї області на площині, де побудована функція додатна. Для цього вводимо об'єкт P:

$$P := implicitplot(f(x,y) > 0, x=-2..2, y=-2..2, coloring=[\text{grey}, \text{white}], filledregions=true, numpoints=400000)$$

Відображаємо отриманий графічний об'єкт:

$display(P)$

У результаті ми отримаємо внутрішні точки області. Щоб знайти її границю, побудуємо область, яка задається уявною частиною та визначаємо точки перетину цієї області з лінією $\mathrm{Re}(f)=\mathrm{Re}(g)$. Аналітичний спосіб приводить до нерівності $\frac{x^2-y^2}{r^4}<x$ для дійсної частини та $\frac{-2xy-yr^4}{r^4}<0$ для уявної, де $r^2=x^2+y^2$.

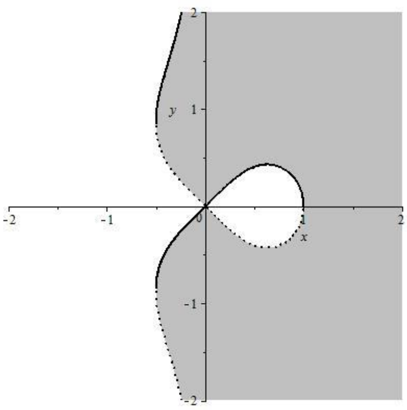

Рис. 4. ***Область розв'язків нерівності*** $\frac{1}{x^2}<x$

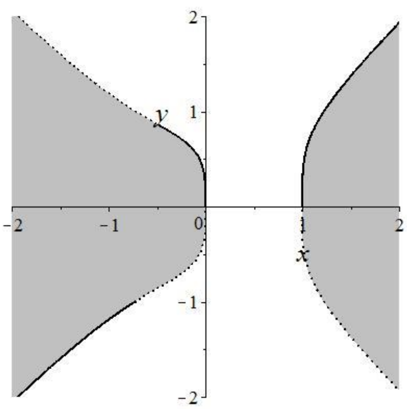

Рис. 5. ***Область розв'язків нерівності*** $\frac{1}{x}<x^2$

Аналогічно визначається приналежність границі на рис. 5: $\frac{x}{r^2}<x^2-y^2$, $y\left(2x+\frac{1}{r^2}\right)>0.$

Далі наведено деякі приклади графічного зображення комплексних розв'язків нерівностей (рис. 6–8).

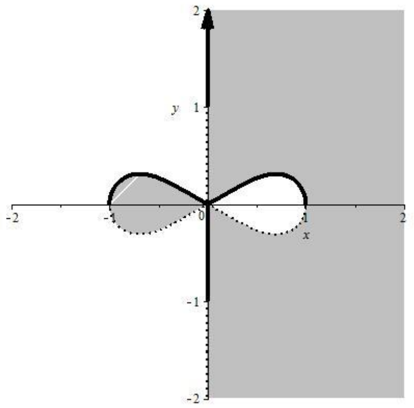

Рис. 6. Область розв'язків нерівності $\frac{1}{x^3} < x$

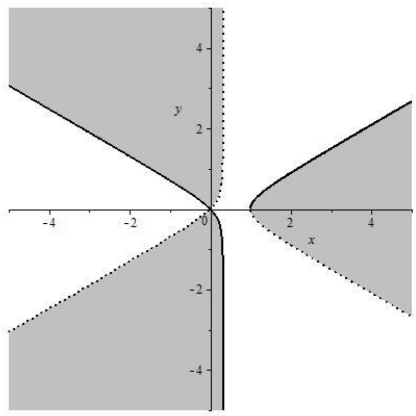

Рис. 7. Область розв'язків нерівності $x^2 < x^3$

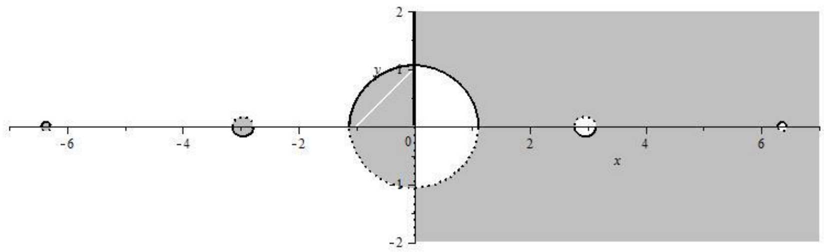

Рис. 8. Область розв'язків нерівності $\frac{1}{\sin x} < x$

На рис. 9-12 зображено області розв'язків елементарних нерівностей $z < 0, z > 0, z^2 < 0, z^2 > 0.$

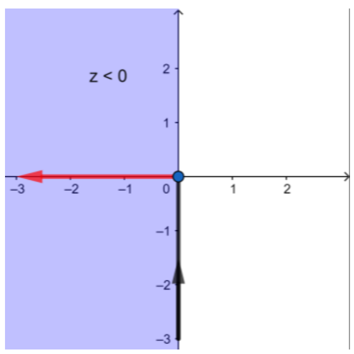

Рис. 9. Розв'язки нерівності $z < 0$

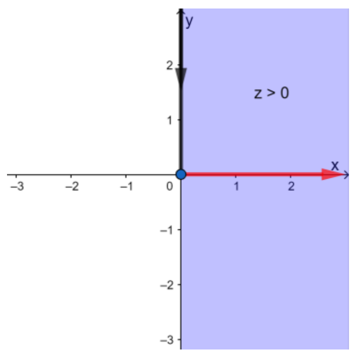

Рис. 10. Розв'язки нерівності $z > 0$

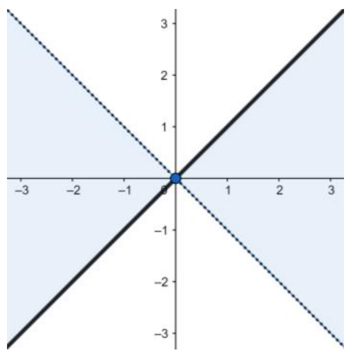

Рис. 11. Розв'язок нерівності $z^2 > 0$

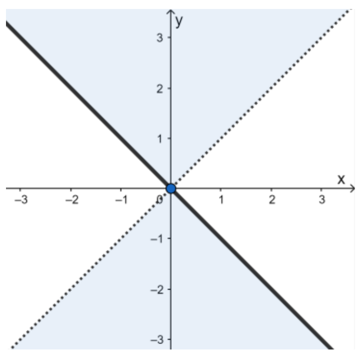

Рис. 12. Розв'язок нерівності $z^2 < 0$

Згадаємо метод інтервалів, який вивчають у школі для розв'язання нерівностей: відшукують *точки*, де функція дорівнює нулю та точки її розриву, а потім визначають знаки, які приймає функція в кожному з інтервалів. Цей метод ґрунтується на властивості неперервної функції зберігати знак в таких інтервалах. Можна за цим зразком побудувати метод суміжних областей, в якому будується *границя* між сусідніми підобластями, а потім з'ясовується, де лежать потрібні підобласті.

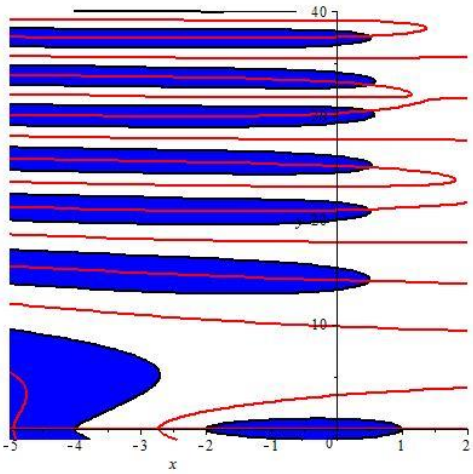

Рис. 13. Корені дзета-функції Рімана

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі досліджується проблема пошуку множини розв'язків нерівностей з дійсними коефіцієнтами у комплексній області, а також пропонується метод знаходження відхилення знайдених розв'язків від заданого значення. Це приводить до поняття нев'язки. Метод нев'язки при розв'язанні квадратних нерівностей веде до комплексних розв'язків, а застосування комплексної нев'язки – до заповнення усієї комплексної площини при розгляді сукупності нерівностей $f(x) < 0$, $f(x) > 0$ та рівняння $f(x) = 0$. Це дає змогу шукати границю – лінію, яка розділяє ці множини та корені функції на цій лінії. Тут лежить можливість пояснити суть гіпотези Рімана про корені дзета-функції ζ, які є точками перетину ліній – границь областей $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$ та $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$ з лініями $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$. Границя $\mathrm{Re}\,\zeta(z) = 0$ прямує знизу догори, досягаючи максимуму, відповідно до гіпотези, в коренях на прямій $x = 0{,}5$, тобто в точках виду $0{,}5 + iy_k$. Тоді в них $\zeta'(0{,}5 + iy_k) = 0$, де вона змінює знак з «-» на «+». На рис. 13 синім кольором виділено область, де $\mathrm{Re}\,\zeta(x+iy) < 0$, червона лінія є розв'язком рівняння $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$.

Подальші дослідження полягають у класифікації нерівностей (лінійні, дробово-лінійні, многочленні, тригонометричні, показникові тощо) та методів їх розв'язання у комплексній площині. Треба шукати математичні задачі для нерівностей, де будуть потрібні комплексні розв'язки нерівностей та їх застосування в задачах фізики та інших наук реального світу. Тоді цей апарат і метод будуть потрібні для відповідного кола користувачів.

Список використаних джерел

1. Дрозденко В.О. Maple в математиці: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів ІІІ та IV рівнів акредитації. Біла Церква, 2019. 328 с.
2. Ерёмин А.Ю., Капорин И.Е., Керимов М.К. О вычислении дзета-функции Римана в комплексной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1985, том 25, номер 4, С. 500-511.
3. Кужель О.В. Розвиток поняття про число. Ознаки подільності. Досконалі числа. К.: Вища школа, 1974. 80 с.
4. Ткаченко С.П., Філер З.Ю. Комплексні розв'язки квадратної нерівності. Математика в школі, 2003, №2. С. 47-49.
5. Филер З.Е. Неравенства в комплексной области. Современные проблемы естественных наук. Том 1(2), 2014. Харків: ХДУ. С. 194-199.
6. Філер З.Ю. Рівняння та нерівності в науці та навчанні. Матеріали міжвузівської регіональної конференції «Математика, її застосування та викладання» (Кіровоград, 24-25 вересня 1999 року). РВГ ІЦ КДПУ, 1999. С. 141-145.

References

1. Drozdenko V.O. (2019). *Maple v matematytsi: navchalnyi posibnyk dlia studentiv vyshchykh navchalnykh zakladiv III ta IV rivniv akredytatsii [Maple in Mathematics: a textbook for students of higher education institutions of III and IV levels of accreditation]*. Bila Tserkva. [in Ukrainian].
2. Erjomin A.Ju., Kaporin I.E. & Kerimov M.K. (1985). O vychislenii dzeta-funkcii Rimana v kompleksnoj oblasti [Calculation of the Riemann zeta function in a complex domain]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki – Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 25 (4), 500-511.[In Russian].
3. Kuzhel O.V. (1974). *Rozvytok poniattia pro chyslo. Oznaky podilnosti. Doskonali chysla [Development of the concept of number. Signs of divisibility. Perfect numbers].* Kyiv: Vyshcha shkola [in Ukrainian].
4. Tkachenko S.P. & Filer Z.Iu. (2003). Kompleksni rozviazky kvadratnoi nerivnosti [Complex solutions of a quadratic inequality]. *Matematyka v shkoli – Mathematics at school*, 2, 47-49 [in Ukrainian].
5. Filer Z.E. (2014). Neravenstva v kompleksnoj oblasti [Inequalities in the complex area]. *Sovremennye problemy estestvennyh nauk* – Modern problems of natural sciences, 1(2), 194-199 [In Russian].
6. Filer Z.Iu. (1999). Rivniannia ta nerivnosti v nautsi ta navchanni [Equations and inequalities in science and education]. Proceedings of the Regional Conference *«Mathematics, its application and teaching»* (pp. 141-145*)* Kirovohrad [in Ukrainian].

METHOD OF SEARCHING COMPLEX SOLUTIONS OF INEQUALITIES BY THE DEFLECTION METHOD

Z.Yu. Filer, A.S. Chuikov

National aviation university, Ukraine

Abstract.

Formulation of the problem. *Traditionally, the school textbooks deal with inequalities in the set of real numbers. Solving inequalities with the unknown number they are limited to finding the area where the requirement is greater or less is fulfilled. By the way, in a number of problems it is important how much the values are differs. At the same time, complex solutions are revealed in the case of a real deflection.*

Materials and methods. *The methods of mathematical analysis and theory of functions of a complex variable are used. Analysis and modeling techniques are also used to develop algorithms for graphically representing our results in the computer mathematics system Maple 17.*

Results. *It is proposed to use a complex deflection $r = s + it$, where $s > 0$ or $s = 0$ and $t > 0$, which gives complex solutions of inequalities. The set of all inequality solutions obtained by the complex residual method is a two-dimensional domain. Moreover, inequalities with* *opposite signs have solutions that complement each other to a complex plane. Examples of the application of the complex deflection method for solving quadratic, rational, and other inequalities are presented. The application of the computer mathematics system Maple 17 for graphical construction of the area-solutions of inequalities is demonstrated.*

Conclusions. *The submitted material can be useful for school teachers and teachers of professional higher and higher education in studying the topic «Complex numbers». Inequalities in a complex set have been considered sporadically, for example, in proving D'Alembert's lemma about the value of the modulus of a complex argument at adjacent points around a point where it is nonzero. These inequalities can be used to find the roots of complex functions. Further research in this area is to systematize and classify inequalities and methods of their solving in a complex plane.*

Key words: *deflection method, complex deflection, complex solutions, Maple 17.*